

Р-471

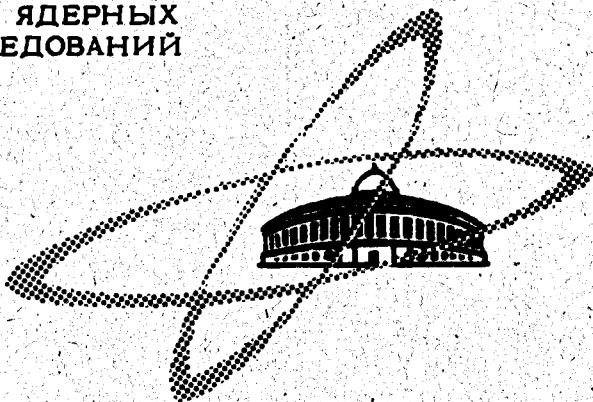
ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

242/2-71

1/11-71

Р9 - 5394



ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

К.А. Решетникова

ДВИЖЕНИЕ

ЗАРЯЖЕННОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО КОЛЬЦА  
В ГОФРИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

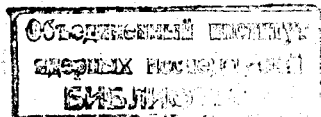
1970

P9 - 5394

К.А. Решетникова

**ДВИЖЕНИЕ  
ЗАРЯЖЕННОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО КОЛЬЦА  
В ГОФРИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Направлено в ЖТФ



Рассмотрим движение тонкого азимутально симметричного электронного кольца в магнитном поле, представляющем собой сумму нулевой и первой гармоник, относительно переменной  $z^*$ . Вектор-потенциал поля имеет одну компоненту:

$$A_{\phi}^{BH} = \frac{\bar{H}_z r^*}{2} (1 + a \sin \kappa z^*). \quad (1)$$

Здесь  $a$  - глубина модуляции поля,  $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda^*}$ ,  $\lambda^*$  - пространственный период магнитного поля. Индекс (\*) показывает, что величины относятся к лабораторной системе координат.

В системе координат, движущейся с постоянной скоростью, равной начальной продольной скорости кольца ( $V_{zH}^{(*)}$ ), при влете в гофрированное поле, для (1) имеем:

$$A_{\phi}^{BH} = \frac{\bar{H}_z r}{2} (1 + a \sin \psi). \quad (2)$$

Здесь  $\psi = \omega t + \kappa z$ ,  $\kappa = \kappa \gamma_{zH}$ ,  $\omega = \kappa v_{zH}^{(*)}$ ,  $\gamma_{zH} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{zH}^{(*)2}}{c^2}}}$ .

Напряженности электромагнитного поля, соответствующие потенциалу (2), будут равны:

$$E_{\phi}^{\text{BH}} = - \frac{a r \omega \bar{H}_z}{2c} \cos \psi ,$$

$$H_r^{\text{BH}} = - \frac{a r k \bar{H}_z}{2} \cos \psi , \quad (3)$$

$$H_z^{\text{BH}} = \bar{H}_z (1 + a \sin \psi) .$$

### §1. Движение одной частицы

Найдем сначала траекторию движения одной частицы в полях вида (3), не учитывая влияния собственного поля заряженного кольца.

Уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2 \beta_H^2 r_H^2 \gamma_H^2}{4\gamma^2} \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{r}{r_H^4} (1 + a \sin \psi)^2 \right] - \frac{1}{\gamma} \frac{dr}{dt} \frac{d\psi}{dt} , \quad (4a)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -a \frac{c^2 \beta_H^2 \gamma_H^2 k a}{4\gamma^2} \left[ 1 + \frac{r^2}{r_H^2} (1 + a \sin \psi) \right] \cos \psi - \frac{1}{\gamma} \frac{dz}{dt} \frac{d\psi}{dt} , \quad (4б)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = a \frac{\beta_H^2 \gamma_H^2 \omega}{4\gamma} \left[ 1 + \frac{r^2}{r_H^2} (1 + a \sin \psi) \right] \cos \psi , \quad (4c)$$

При начальных условиях

$$t = 0, \quad r = r_H, \quad z = 0, \quad v_r = 0, \quad v_{\phi} = v_{\phi_H} = v_H, \quad v_z = 0.$$

Здесь использовано определение

$$\beta_H = \beta_{\phi H} = - \frac{e \bar{H}_z r_H}{m_0 c^2 \gamma_H} \quad (5)$$

и закон сохранения обобщенного азимутального импульса

$$\beta_{\phi} r \gamma = \frac{\beta_{H H} \gamma_H}{2} \left[ 1 + \frac{r^2}{r_H^2} (1 + \alpha \sin \psi) \right]. \quad (6)$$

Сравнивая (4б) и (4с), получим:

$$\gamma \left( \frac{ck}{\omega} + \beta_z \right) = \text{const.} \quad (7)$$

Здесь

$$\frac{ck}{\omega} = \frac{1}{\beta_{z H}^{(0)}}.$$

При релятивистской скорости влета ( $\gamma_{zH} \gg 1$ ) соотношение (7) запишется в виде

$$\gamma (1 + \beta_z) = \gamma_H. \quad (8)$$

Таким образом, при движении частицы в полях вида (3) существует, кроме обобщенного азимутального импульса, еще второй инвариант (7), дающий простую связь энергии частицы с ее продольной скоростью.

В уравнениях (4) перейдем к безразмерным переменным:

$$r = \omega t, \quad \rho = kr, \quad \eta = kz, \quad \frac{d\rho}{dr} = \dot{\rho}, \quad \frac{d\eta}{dr} = \dot{\eta}, \quad \psi = r + \eta.$$

Учтем:

$$\frac{d}{dr} = (1 + \dot{\eta}) \frac{d}{d\psi}. \quad (9)$$

Имея в виду (9), получим из (4):

$$\frac{d^2 \rho}{d\psi^2} = \frac{\beta_H^2 \rho_H^2}{4} \left[ \frac{1}{\rho^3} - \frac{\rho}{\rho_H^4} (1 + \alpha \sin \psi)^2 \right], \quad (10)$$

$$\frac{d \dot{\eta}}{d \psi} = - \frac{a \beta_H^2 (1 + \dot{\eta})^2}{4} \left[ 1 + \frac{\rho^2}{\beta_H^2} (1 + a \sin \psi) \right] \cos \psi. \quad (11)$$

Допустим:

$$a \ll 1. \quad (12)$$

Решение уравнения (10) с учётом членов  $\approx a^2$  будет<sup>1/</sup>:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_H + a \left[ A \sin \psi - \frac{\Lambda}{q} \sin q \psi \right] + a^2 \{ & B_1 (1 - \cos q \psi) + B_2 (\cos 2\psi - \cos q \psi) + \\ & + B_3 [\cos (1-q) \psi - \cos q \psi] + B_4 [\cos (1+q) \psi - \cos q \psi] + \\ & + B_5 [\cos 2q \psi - \cos q \psi] \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho_H q^2}{2(1-q^2)}, \quad B_1 = -\frac{\rho_H}{8} - \frac{\Lambda}{4} + \frac{3A^2}{4\rho_H} \left(1 + \frac{1}{q^2}\right), \\ B_2 &= -\frac{q^2 A}{16(1-\frac{q^2}{4})} - \frac{q^2 \rho_H}{32(1-\frac{q^2}{4})} + \frac{3}{16} \frac{q^2 A^2}{\rho_H(1-\frac{q^2}{4})}, \\ B_3 &= -\frac{q A}{4(1-2q)} + \frac{3}{2} \frac{q A^2}{\rho_H(1-2q)}, \\ B_4 &= \frac{q A}{4(1+2q)} - \frac{3q A^2}{2\rho_H(1+2q)}, \quad B_5 = \frac{A^2}{4q^2 \rho_H}. \end{aligned} \quad (14)$$

Величина  $q^2$  определяется из уравнения

$$q^2 \left\{ 1 - \frac{a^2}{2} \left[ 1 + \frac{q^2 (1 - 3.5q^2 + 9q^4)}{(1 - q^2)(1 - 4q^2)} \right] \right\} = \frac{\beta_H^2}{\rho_H^2}. \quad (15)$$

Подставляя (13) в (11) и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{a \beta_H^2}{2} (\cos \psi - 1) + \frac{a^2 \beta_H^2}{32} \sin 2\psi + \frac{a^2 \beta_H^2 \Lambda}{16 \rho_H} \sin 2\psi + \\ & + \frac{a^2 \beta_H^2 \Lambda}{4q \rho_H} \left[ \frac{\sin(1-q)\psi}{(1-q)^2} - \frac{\sin(1+q)\psi}{(1+q)^2} \right] - \frac{a^2 \beta_H^2}{16} \left[ 1 + \frac{2\Lambda}{\rho_H} + \frac{8\Lambda}{\rho_H(1-q^2)} \right] \psi. \end{aligned} \quad (16)$$

Положим

$$\rho_H \gg 1. \quad (17)$$

Это условие эквивалентно  $\omega \gg \bar{\omega}$ , где  $\bar{\omega}$  - ларморова частота.

Выражая (13) и (16) как функции времени, получим с учётом членов  $\approx a^2$  ( $\frac{1}{\rho} \lesssim a$ ;  $q \approx a$ ):

$$\rho = \rho_H \left[ 1 - \frac{aq}{2} \sin q\tau + \frac{aq^2}{2} \sin \tau - \frac{a^2}{8} (1 - \cos q\tau) \right], \quad (18)$$

$$\eta = \frac{a \beta_H^2}{2} (\cos \tau - 1) + \frac{a^2 \beta_H^4}{4} \sin \tau - \frac{a^2 \beta_H^4}{8} \sin 2\tau + \frac{a^2 \beta_H^2}{32} \sin 2\tau - \frac{a^2 \beta_H^2}{16} \tau.$$

Компоненты скорости  $\dot{\rho} = \beta_r$ ,  $\dot{\eta} = \beta_z$  находятся из (18), компонента  $\beta_\phi$  - из (6):

$$\beta_r = \left( -\frac{a q^2}{2} \sin q r + \frac{a q^2}{2} \sin r - \frac{a^2 q}{8} \sin q r \right) \rho_H,$$

$$\beta_z = -\frac{a \beta_H^2}{2} \sin r + \frac{a^2 \beta_H^4}{4} \cos r + \frac{a^2 \beta_H^2}{16} (1 - 4 \beta_H^2) \cos 2r - \frac{a^2 \beta_H^2}{16}, \quad (19)$$

$$\beta_\phi = \beta_H \left[ 1 - \frac{a^2 \beta_H^2}{16} (1 - \cos 2r) \right].$$

## §2. Учет взаимодействия

Рассмотрим теперь движение частицы в гофрированном магнитном поле с учётом собственных полей заряженного кольца, как статических, так и обусловленных движением во внешнем поле.

Собственное поле азимутально симметричного заряженного кольца в выбранной системе координат описывается потенциалами:

$$\Phi = \int \sigma(t, \vec{x}') G_1 r' d^2 x', \quad A_r = \frac{1}{c} \int j_r(t, \vec{x}') G_2 r' d^2 x', \quad (20)$$

$$A_\phi = \frac{1}{c} \int j_\phi(t, \vec{x}') G_2 r' d^2 x', \quad A_z = \frac{1}{c} \int j_z(t, \vec{x}') G_1 r' d^2 x'.$$

Здесь  $\sigma$  — плотность электронов в кольце,  $\vec{j} = \sigma \vec{v}$ .

$$G_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{R}, \quad G_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\phi - \phi')}{R} d\phi', \quad (21)$$

$$R^2 = (r_0 + x'_1)^2 + (r_0 + x_1)^2 - 2(r_0 + x_1)(r_0 + x'_1) \cos(\phi - \phi') + (x_2 - x'_2)^2,$$



$r_0$  - большой радиус кольца,  $x_1=r-r_0$ ,  $x_2=z-z_0$  - компоненты отклонения координат частицы от центра сечения кольца.

В качестве параметра малости используем величину  $a$   
 $(\frac{1}{\rho} \lesssim a)$ .

Положим

$$\sigma = \sigma_H + a \sigma_1(\tau, \eta) + a^2 \sigma_2(\tau, \eta), \quad (22)$$

где  $\sigma_H$  - начальное значение плотности. Из уравнения непрерывности найдем

$$\sigma = \sigma_H (1 + f), \quad (23)$$

где

$$f = \frac{a \beta_H^2}{2} \sin(\tau + \eta) - \frac{a^2 \beta_H^2}{16} \cos 2(\tau + \eta).$$

При этом скорости определены из (13) и (16).

Из уравнений движения для любой частицы в кольце получим уравнения для отклонений координат от центра сечения. Для этого положим

$$\rho = \rho_0 + \eta_1, \quad \eta = \eta_0 + \eta_2, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma', \quad \psi = \psi_0 + \eta_2, \quad (24)$$

где  $\eta_1 = kx_1$ ,  $\eta_2 = kx_2$ .

Величины  $\rho_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\psi_0$  характеризуют движение центра сечения кольца и при условии

$$\mu L \ll 1 \quad (25)$$

определяются выражениями (18), (19). Здесь

$$\mu = \frac{e^2 N}{\pi r_H m_0 c^2 \gamma_H}, \quad L = l_H \frac{\partial r_H}{a}, \quad (26)$$

$N$  - число частиц в кольце,  $\gamma_H^2 = \frac{1}{1 - \beta_H^2}$ ,  $v = v_{\phi_H} = \beta_H c$  - начальная скорость центра,  $a$  - радиус кругового сечения кольца.

Для отклонения координат частицы от центра сечения кольца имеем с учётом (23) и (24) следующую систему уравнений:

$$\ddot{\eta}_1 = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dr} \frac{d\rho}{dr} + \frac{\beta_\phi^2}{\rho} - \beta_\phi \beta_H^0 \frac{\gamma_H}{\rho_H \gamma} (1 + a \sin \psi) + \mu \frac{\gamma_H}{\gamma} \left\{ \beta_\phi \left( \frac{\partial \Lambda'_\phi}{\partial \rho} + \frac{\Lambda'_\phi}{\rho} \right) - \frac{\partial \Phi'}{\partial \rho} - \beta_z \left( \frac{\partial \Lambda'_r}{\partial \eta} - \frac{\partial \Lambda'_z}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial \Lambda'_r}{\partial r} \right\} - \ddot{\rho}_0. \quad (27)$$

$$\ddot{\eta}_2 = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dr} \frac{d\eta}{dr} - \frac{a}{2} \beta_\phi \beta_H^0 \frac{\rho \gamma_H}{\rho_H \gamma} \cos \psi + \mu \frac{\gamma_H}{\gamma} \left\{ -\frac{\partial \Phi'}{\partial \eta} + \beta_\phi \frac{\partial \Lambda'_\phi}{\partial \eta} + \beta_r \left( \frac{\partial \Lambda'_r}{\partial \eta} - \frac{\partial \Lambda'_z}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial \Lambda'_z}{\partial r} \right\} - \ddot{\eta}_0.$$

Здесь

$$\beta_\phi = \frac{\beta_H^0 \rho_H \gamma_H}{2\rho\gamma} \left[ 1 + \frac{\rho^2}{\rho_H^2} (1 + a \sin \psi) \right] - \frac{\mu \gamma_H}{\gamma} \Lambda'_\phi,$$

$$\beta_H^0 = -\frac{e \bar{H}_z r_H}{m_0 c^2 \gamma_H}, \quad \beta_H = \beta_H^0 - \mu \Lambda'_\phi.$$

$$\psi = \psi_0 + \eta_2,$$

$$\Phi' = \frac{1}{2\pi(ka)^2} \int (1+f') \rho' G_1 d\eta'_1 d\eta'_2,$$

$$A'_r = \frac{1}{2\pi(ka)^2} \int \beta'_r (1+f') \rho' G_2 d\eta'_1 d\eta'_2,$$

$$A'_\phi = \frac{1}{2\pi(ka)^2} \int \beta'_\phi (1+f') \rho' G_2 d\eta'_1 d\eta'_2, \quad (28)$$

$$A'_z = \frac{1}{2\pi(ka)^2} \int \beta'_z (1+f') \rho' G_1 d\eta'_1 d\eta'_2,$$

$$f' = \frac{\alpha \beta_H^2}{2} \sin(\psi_0 + \eta'_2) - \frac{\alpha^2 \beta_H^2}{16} \cos 2(\psi_0 + \eta'_2).$$

Допустим:

$$\frac{\eta_1}{\rho_0} \ll 1, \quad \frac{\gamma'}{\gamma_0} \ll 1. \quad (29)$$

Введем новые переменные:

$$\eta_1 = \bar{\eta}_1 + \frac{\alpha \beta_H^2}{2 \rho_H} [\sin(\tau + \bar{\eta}_2) - \sin \tau],$$

$$\eta_2 = \bar{\eta}_2 + \frac{\alpha \beta_H^2}{2} [\cos(\tau + \bar{\eta}_2) - \cos \tau] + \frac{\alpha^2 \beta_H^4}{4} [\sin(\tau + \bar{\eta}_2) - \sin \tau] -$$

$$- \frac{\alpha^2 \beta_H^4}{8} [\sin 2(\tau + \bar{\eta}_2) - \sin 2\tau] + \frac{\alpha^2 \beta_H^2}{32} [\sin 2(\tau + \bar{\eta}_2) - \sin 2\tau],$$
(30)

$$\gamma' = \bar{\gamma}' + \gamma_H \left\{ \frac{\alpha \beta_H^2}{2} [\sin(\tau + \bar{\eta}_2) - \sin \tau] - \frac{\alpha^2 \beta_H^4}{4} [\cos(\tau + \bar{\eta}_2) - \cos \tau] + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2 \beta_H^4}{4} [\cos 2(\tau + \bar{\eta}_2) - \cos 2\tau] - \frac{\alpha^2 \beta_H^2}{16} [\cos 2(\tau + \bar{\eta}_2) - \cos 2\tau] \right\}.$$

Здесь  $\bar{\eta}_1$ ,  $\bar{\eta}_2$ ,  $\bar{\gamma}$  - медленные переменные. Подставим (24) и (30) с учетом (29) в уравнения (27). Имеем в виду, что  $\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1}$  и  $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \eta_2}{\partial \bar{\eta}_2}}$ , т.к.  $\rho_0 = \rho_0(\tau)$ ,  $\eta_0 = \eta_0(\tau)$  согласно (18). Проверяем усреднение по быстрым колебаниям с точностью до членов  $\approx a^2$ , при этом медленными скоростями ( $\dot{\bar{\eta}}_1$ ,  $\dot{\bar{\eta}}_2$ ) и их произведениями будем пренебрегать.

В результате в линейном по  $\mu$  приближении получим следующую систему уравнений для медленных переменных:

$$\ddot{\bar{\eta}}_1 + \frac{\beta_H^{02}}{\rho_H^2} \bar{\eta}_1 = \frac{\mu \bar{\eta}_1}{(ka)^2} \left[ \frac{1}{\gamma_H^2} + \frac{\beta_H^{02} (ka)^2}{\rho_H^2} (L - \frac{3}{2} + f_1) + \frac{\alpha^2 \beta_H^4}{8} (1 - f_2) \right], \quad (31a)$$

$$\ddot{\bar{\eta}}_2 = \mu \left[ \frac{\bar{\eta}_2}{(ka)^2} \left( \frac{1}{\gamma_H^2} + \frac{\alpha^2 \beta_H^4}{8} + \frac{\beta_H^{02} (ka)^2}{\rho_H^2} f_3 \right) - \frac{\alpha^2 \beta_H^4}{8 (ka)^2} f_4 \right]. \quad (31b)$$

Здесь

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[ L-2 - \frac{5(\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2)}{4(ka)^2} \right], \quad f_3 = \frac{1}{2} \left[ L-2 - \frac{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2}{4(ka)^2} \right],$$

$$f_2 = 2 \cos \bar{\eta}_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n-1}(ka)}{(ka)^{2n-1}} \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} [(\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2)^{2n} \cos 2n \psi]$$

(32)

$$+ 2 \sin \bar{\eta}_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n-2}(ka)}{(ka)^{2n-2}} \frac{1}{2n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} [(\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2)^{2n-1} \sin (2n-1) \psi],$$

$$f_4 = 2 \sin \bar{\eta}_2 [ka L J_1(ka) - J_0(ka) + \cos \bar{\eta}_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n-1}(ka)}{(ka)^{2n-1}} (\sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2})^{2n} \frac{\cos 2n \psi}{2n}] +$$

$$+ 2 \cos \bar{\eta}_2 [-\sin \bar{\eta}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n-2}(ka)}{(ka)^{2n-2}} (\sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2})^{2n-1} \frac{\sin (2n-1) \psi}{2n-1}].$$

$J_n(ka)$  - функции Бесселя,  $\sin \psi = \frac{\bar{\eta}_2}{\sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2}}$ ,  $\cos \psi = \frac{\bar{\eta}_1}{\sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2}}$ . Исследуя обычным способом уравнения (31) на устойчивость вблизи  $\bar{\eta}_1 = 0$ ,  $\bar{\eta}_2 = 0$ , получим условия фокусировки:

$$\frac{\beta_H^{02}}{\rho_H^2} > \frac{\mu}{(ka)^2} \left\{ \frac{1}{\gamma_H^2} + \frac{\alpha^2 \beta_H^{04}}{8} \left[ 1 - 2 \frac{J_1(ka)}{ka} \right] + \frac{3 \beta_H^{02} (ka)^2}{2 \rho_H^2} \left( L - \frac{5}{3} \right) \right\}, \quad (33)$$

$$\frac{\alpha^2 \beta_H^{04}}{8} [2ka L J_1(ka) - 1] > \frac{1}{\gamma_H^2} + \frac{\beta_H^{02} (ka)^2 (L-2)}{2 \rho_H^2}. \quad (34)$$

Было проведено численное решение системы уравнений (27) на ЭВМ. Результаты расчёта подтвердили наличие устойчивых колебаний относительно центра при значениях параметров, удовлетворяющих условиям (33) и (34).

Фокусировка в радиальном направлении обеспечивается однородным магнитным полем. Условие (33) — обычное, оно зависит от величины однородного магнитного поля и числа частиц и не зависит от  $\gamma_{zH}$ .

Что касается продольного движения, то, как видно из (31b), модуляция внешнего поля с учётом влияния собственного поля кольца приводит, с одной стороны, к созданию потенциальной ямы в продольном направлении, с другой — уменьшает магнитное стягивание токов.

При обычном условии  $\frac{(ka)^2}{\rho_H^2} L \ll \frac{1}{\gamma_H^2}$  соотношение (34) будет иметь вид:

$$\frac{\alpha^2 \beta_H^{04}}{8} [2kaLJ_1(ka) - 1] > \frac{1}{\gamma_H^2}. \quad (35)$$

Как видно из (34) и (35), в условие продольной фокусировки число частиц не входит, глубина потенциальной ямы пропорциональна  $\gamma_{zH}$  ( $k = k\gamma_{zH}$ ).

Механизм продольной фокусировки представляется следующим.

Под действием внешнего  $E_\phi$  — поля в выбранной движущейся системе координат, с одной стороны, меняется энергия частицы согласно инварианту  $\gamma = \frac{\gamma_H}{1 + \beta_z^2}$ ; с другой стороны, возникает радиационное поле<sup>/3/</sup>, пропорциональное числу частиц и ускорению сгустка как целого (  $E_z^{\text{рад.}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \approx -\frac{z}{N}$  ). Радиационным полем называется часть собственного поля сгустка, обусловленная его ускорением.

Рассмотрим случай  $ka < 1$ . В местах, где сгусток тормозится внешним полем, радиационное поле ускоряет частицы. Частицы, находя-

шиеся впереди центра, тяжелее, чем центральные, т.к.  $\beta_z < \beta_{z_0}$ .

Поэтому радиационное поле ускоряет их меньше, чем центральную частицу. В местах, где сгусток ускоряется внешним полем, радиационное поле тормозит частицы. Частицы, находящиеся впереди центральной, легче, т.к.  $\beta_z > \beta_{z_0}$ . Поэтому радиационное поле тормозит их сильнее, чем центральную частицу.

Возникает обычный механизм фокусировки на стоячей волне, величина которого определяется отношением  $\frac{E}{\lambda} \approx \gamma_{zH}^2$ .

$$(E \approx \ddot{z} \approx H_r^{BH} \approx \gamma_{zH} \ , \ \lambda \approx \frac{1}{\gamma_{zH}}).$$

Таким образом, при движении заряженного релятивистского кольца в гофрированном магнитном поле возникает при определенных условиях потенциальная яма, обеспечивающая фокусировку кольца в продольном направлении.

Из условия удержания ионов при переменных ускорениях электронного кольца в случае, когда частота воздействия поля ( $\Omega = \kappa V_{zH}^*$ ) много больше частоты ионных колебаний ( $\Omega^2 = \frac{e^2 N}{\pi r_0 a^2 M \gamma_{z1}^3}$ ), находим:

$$a \leq \kappa a \gamma_{zH}^2,$$

т.е. глубина модуляции поля не зависит от числа электронов в кольце.

В заключение благодарю А.Г. Бонч-Осмоловского за интерес к работе и поддержку, С.Н. Богданову за проведение расчётов.

### Приложение

Значения некоторых интегралов, встречающихся при вычислении функций  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ :

$$F_1 = \frac{2}{\pi(ka)^2} \iint (\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}'_1) \{ \ln 8\rho_H - \frac{1}{2} [(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}'_1)^2 + (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}'_2)^2] \} d\bar{\eta}'_1 d\bar{\eta}'_2 =$$

$$= 2\bar{\eta}_1 \left[ L - \frac{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2}{4(ka)^2} \right],$$

$$F_2 = \frac{1}{\pi(ka)^2} \iint \{ \ln 8\rho_H - \frac{1}{2} [(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}'_1)^2 + (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}'_2)^2] \} \cos(\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}'_2) d\bar{\eta}'_1 d\bar{\eta}'_2 =$$

$$= \frac{2}{(ka)^2} \left[ ka L J_1(ka) - J_0(ka) + \cos \bar{\eta}_2 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(ka) \frac{(\sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2})^{2n} \cos 2n\psi}{(ka)^{2n-1} 2n} \right] \cos \bar{\eta}_2 +$$

$$+ \frac{2}{(ka)^2} \left[ \sin \bar{\eta}_2 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-2}(ka) \frac{(\sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2})^{2n-1} \sin(2n-1)\psi}{(ka)^{2n-2} 2n-1} \right] \sin \bar{\eta}_2.$$

$$F_3 = \frac{1}{\pi(ka)^2} \iint \{ \ln 8\rho_H - \frac{1}{2} [(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}'_1)^2 + (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}'_2)^2] \} \sin(\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}'_2) d\bar{\eta}'_1 d\bar{\eta}'_2 =$$

$$= \frac{2}{(ka)^2} \left[ ka L J_1(ka) - J_0(ka) + \cos \bar{\eta}_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n-1}(ka)}{(ka)^{2n-1}} \frac{(\sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2})^{2n} \cos 2n\psi}{2n} \right] \sin \bar{\eta}_2 +$$

$$+ \frac{2}{(ka)^2} \left[ -\sin \bar{\eta}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n-2}(ka)}{(ka)^{2n-2}} \frac{(\sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2})^{2n-1} \sin(2n-1)\psi}{2n-1} \right] \cos \bar{\eta}_2.$$



Интегрирование велось по круговому сечению кольца, при этом

$$\bar{\eta}_1 = \sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2} \cos \psi, \quad \bar{\eta}_2 = \sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2} \sin \psi.$$

#### Л и т е р а т у р а

1. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
2. Э.А. Перельштейн, О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ, 2351, Дубна, 1965.
3. И.Е. Тамм. Исследования плазмы. Труды ФИАН СССР, 18, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 октября 1970 года.