ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9-5299

А.Г. Бонч-Осмоловский

ЗАРЯЖЕННОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ КОЛЬЦО ЭЛЕКТРОНОВ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1970

P9-5299

А.Г. Бонч-Осмоловский

ЗАРЯЖЕННОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ КОЛЬЦО ЭЛЕКТРОНОВ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Направлено в ЖТФ

Во внешних стационарных магнитных полях могут существовать равновесные конфигурации электронов с упорядоченным током. Хорошо известными примерами таких систем являются прямой ток в продольном магнитном поле (так называемая бриллюэновская фокусировка) и тороидальная конфигурация в спадающем по радиусу азимутально-симметричном магнитном поле (кольцевые слабофокусирующие ускорители).

В настоящей работе будут рассмотрены условия существования и движение заряженного тонкого кольца с релятивистским по азимуту током в азимутально-симметричном винтовом магнитном поле простейшего типа. Такое поле создается комбинацией продольного магнитного поля и поля прямого тока. Током, в частности, может быть электронный луч, поперечные размеры которого поддерживаются тем же продольным магнитным полем.

Оказывается, что в таком поле возможна равновесная конфигурация кольцевого электронного тока, также имеющая направленную скорость вдоль оси магнитного поля. Наличие азимутальной составляющей магнитного поля позволяет осуществить движение кольца с постоянным радиусом в медленно меняющемся вдоль оси продольном магнитном поле. Все это может иметь значение в задачах, связанных с коллективным методом ускорения /1/.

1. Движение заряженной частицы в винтовом магнитном поле

Пусть в полярной системе координат r, ϕ, z направление внешнего постоянного и однородного магнитного поля H совпадает с осью z. Вдоль этой же оси течет ограниченный по радиусу постоянный ток I, создающий H_ϕ составляющую магнитного поля, которая вне области, занятой током, равна:

$$H_\phi = \frac{\kappa}{r}, \quad |\kappa| = \frac{2I}{c}. \tag{1}$$

Знак κ в формуле (1) пока произволен.

Напишем уравнения движения заряженной частицы с зарядом e и массой покоя m в магнитном поле $H_z + H_\phi$, силовые линии которого будут, очевидно, винтовыми с постоянным шагом винта, определяемым отношением напряженностей обеих составляющих поля.

$$m \frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) = m r \dot{\phi}^2 + \frac{eH_z}{c} r \phi - \frac{e\kappa}{c} \frac{\dot{z}}{r},$$

$$\frac{d}{dt}\left(m \gamma r^2 \dot{\phi} + \frac{eH}{2c} r^2\right) = 0, \tag{2}$$

$$m \frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = \frac{e\kappa}{c} \frac{\dot{r}}{r}.$$

Здесь γ определено как обычно: $\gamma = \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

Введем обозначения:

$$\bar{\omega}_H = \frac{e H_z}{m c \gamma}, \tag{3}$$

$$\bar{a} = \frac{e \kappa}{m c \gamma}. \tag{4}$$

Величина $\bar{a}$ имеет размерность частоты, деленной на длину. Теперь систему (2) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\phi}^2 + \bar{\omega}_H r \dot{\phi} - \bar{a}\dot{z}/r, \\ r^2\dot{\phi} &+ \frac{\bar{\omega}_H}{2} r^2 = \bar{P} = \mathrm{Const}, \\ \ddot{z} &= \bar{a}\dot{r}/r. \end{aligned} \tag{5}$$

$\bar{P}$ – азимутальный момент количества движения, деленный на $m\gamma$, в рассматриваемом азимутально-симметричном поле он является интегралом движения.

Нас будет интересовать, прежде всего, частное решение системы уравнений (5), соответствующее движению кольца с постоянным радиусом $r = r_0$ и постоянной скоростью вдоль оси поля $\dot{z} = \dot{z}_0$, которое определяется из условий:

$$r_0 \dot{\phi}_0^2 + \bar{\omega}_H r_0 \dot{\phi}_0 = \bar{a} \frac{\dot{z}_0}{r_0} ,$$

$$r_0^2 \left(\dot{\phi}_0 + \frac{\bar{\omega}_H}{2} \right) = \bar{P} . \tag{6}$$

Здесь $\dot{z}_0$ - произвольный параметр, имеющий смысл начальной скорости влета частицы в магнитном поле, а r_0 и $\dot{\phi}_0$ могут быть найдены из (6); приведем выражение для r_0 :

$$r_0^2 = \frac{\sqrt{\bar{a}^2 \dot{z}_0^2 + \bar{P}^2 \bar{\omega}_H^2 - \bar{a} \dot{z}}}{\bar{\omega}_H^2 / 2} . \tag{7}$$

Траектория с постоянным радиусом (7) возможна при определенных условиях на начальные составляющие скорости $\dot{r}$ и $r \dot{\phi}$ и положение влета частицы в поле. Частицы с другими начальными данными (но с той же скоростью $\dot{z}_0$) будут испытывать колебания около этой траектории. Нетрудно их определить, предполагая, что отклонения от равновесных начальных условий малы. Положим $r = r_0 + \xi$, $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 + \dot{\theta}$, подставим в (5) и оставим члены, линейные по отклонениям. Тогда, используя (6), получим:

$$\dot{\xi} + \left(\bar{\omega}_H^2 + \frac{\bar{a}^2}{r_0^2} + \frac{2 \bar{a} \dot{z}_0}{r_0^2} \right) \xi = 0 ,$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\bar{P}}{r_0^2}\xi, \quad \dot{z} = \frac{\bar{a}}{r_0}\xi + \dot{z}_0. \tag{8}$$

Отсюда видно, что колебания около траектории с постоянным радиусом происходят с частотой $\bar{\omega}_H^2 + \frac{\bar{a}^2}{r_0^2} + \frac{2\bar{a}\dot{z}_0}{r_0^2}$, причём колебания по всем трем степеням свободы связаны между собой: отклонение какой-либо координаты скорости частицы от своего равновесного значения $(\dot{r}_0, \dot{\phi}_0, \dot{z}_0)$ вызывает колебания также и по другим переменным. Анализ общих уравнений (5) показывает, что колебания около равновесной траектории (7) являются устойчивыми.

Вращение частицы в плоскости, перпендикулярной оси z, происходит в общем случае с частотой, отличной от циклотронной ω_H (явное выражение для нее легко найти из (6)) и лишь при $\dot{z}_0 = 0$ совпадает с $\bar{\omega}_H$, при этом и радиус вращения (7) равен обычному значению в одном только продольном магнитном поле: $r_0 = \sqrt{\frac{2|P|}{\bar{\omega}_H}}$.

2. Равновесное состояние заряженного кольца

Результаты предыдущего раздела, а также простые физические соображения дают основания полагать, что в винтовом магнитном поле рассматриваемого вида возможна компенсация кулоновских сил расталкивания в заряженном кольце с азимутальным током /2/. Сейчас мы покажем, что это действительно так, предполагая, что такое равновесное состояние действительно существует, и рассматривая движение отдельной частицы кольца с учётом собственного поля, созданного всеми остальными частицами. При этом будут получены необходимые условия равновесия (фокусировки).

Введем следующие предположения:

1. $$\frac{\nu}{\gamma_\phi} \ll 1, \quad \nu = \frac{e^2 N}{2\pi r_0 m c^2}. \qquad (9)$$

N – полное число частиц в кольце. Условие (9) означает, как нетрудно показать, что поперечное движение частиц в кольце (в системе, где оно покоится как целое) нерелятивистское. Иначе говоря, мы будем пренебрегать изменением полной энергии частиц (γ) за счёт собственного электрического поля кольца.

2. $$\frac{a}{r_0} \ll 1. \qquad (10)$$

Здесь a – малый поперечный размер кольца, форму сечения которого будем для простоты предполагать близкой к круговой. Условие (10) с учётом (9) позволяет приближенно записать собственное поле кольца в виде поля прямого шнура.

Проще всего для решения задачи перейти в систему координат, движущуюся со скоростью кольца как целого $\dot{z}_0$.

Составляющие поля в этой системе будут

$$E'_r = -\gamma_{z_0} \beta_{z_0} \frac{\kappa}{r},$$

$$H'_\phi = \gamma_{z_0} \frac{\kappa}{r}, \qquad (11)$$

$$H'_z = H_z.$$

Здесь $\gamma_{z_0} = (1 - \beta^2_{z_0})^{-1/2}$, $\beta_{z_0} = \dot{z}_0 / c$.

Тогда уравнения движения какой-либо частицы в пределах поперечного сечения кольца с учётом (9) и (10) можно привести к виду:

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}'^2 + \omega_H r\dot{\phi}' - \gamma_{z_0}\frac{a}{r}\dot{z}_0 - \gamma_{z_0}\frac{a}{r}\dot{z}' + \frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2}(r - r_0),$$

$$r^2\dot{\phi}' + r^2\frac{\omega_H}{2} = P, \tag{12}$$

$$\ddot{z} = \frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2}(z - z_0) + a\gamma_{z_0}\frac{\dot{r}}{r}.$$

Здесь все величины взяты в собственной системе координат, так что ω_H и a теперь равны

$$\omega_H = \frac{eH_z}{mc\gamma_\phi}, \quad a = \frac{e\kappa}{mc\gamma_\phi}. \tag{13}$$

В (12) r_0, z_0 – координаты осевой линии кольца,

$$\Omega_p^2 = \frac{e^2N}{\pi m r_0 a^2\gamma_\phi} = \frac{2\nu c^2}{\gamma_\phi a^2}, \quad \gamma_\phi = \left(1 - \frac{r^2\dot{\phi}'^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

– релятивистский фактор в собственной системе координат. Заметим, что $\gamma = \gamma_\phi\gamma_{z_0}$.

Выясним, при каких условиях малые колебания электронов относительно r_0, z_0 в пределах поперечного сечения кольца будут устойчивы. Положим $\xi = r - r_0$, $\theta = \phi' - \phi'_0$, $\eta = z - z_0$ и проведем линеаризацию уравнений (12). Учитывая условия равновесия (6) – теперь там надо заменить $\bar{a}$ на $a\gamma_{z_0}$ и $\bar{P}$ на $P\gamma_{z0}$ – получим

$$\ddot{\xi} = \left(\frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2} - \omega_H^2 - 2\frac{a\dot{z}_0\gamma_{z_0}}{r_0^2} \right)\xi - \frac{a\gamma_{z_0}}{r_0}\dot{\eta},$$

$$\ddot{\eta} = \frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2}\eta + \frac{a\gamma_{z_0}}{r_0}\dot{\xi}. \tag{14}$$

Будем искать осциллирующее решение системы (14), полагая $\xi, \eta \approx e^{i\omega t}$. Тогда для частот колебаний легко получить следующие характеристическое уравнение:

$$\omega^4 - \omega^2\left(\Omega^2 - \frac{2\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2}\right) + \frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2}\left(\frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2} + \frac{a^2\gamma_{z_0}^2}{r_0^2} - \Omega^2\right) = 0. \tag{15}$$

Здесь введена частота свободных колебаний

$$\Omega^2 = \omega_H^2 + \frac{a^2\gamma_{z_0}^2}{r_0^2} + \frac{2a\gamma_{z_0}\dot{z}}{r_0^2}. \tag{16}$$

Корни уравнения (15) будут вещественными (или нулями) и, следовательно, решения системы (14) устойчивыми, если выполнены следующие условия[x/]:

$$\frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2} \geq \Omega^2 - \frac{a^2 \gamma_{z_0}^2}{r_0^2} \tag{17}$$

$$\frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2} \leq \frac{1}{2} \Omega^2 \tag{18}$$

$$\frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2} \leq \frac{\Omega^4}{4} \frac{r_0^2}{a^2 \gamma_{z_0}^2} . \tag{19}$$

Исследуем полученные условия подробнее. Прежде всего, если $a = 0$, условия устойчивости не выполняются, как и должно быть, так как в однородном H_z магнитном поле кольцо расплывается под действием сил пространственного заряда вдоль оси поля.

Другой предельный случай – прямолинейный пучок в продольном поле – получим, положив $\omega_H = 0$, $\dot{z}_0 = 0$, $\frac{a}{r_0} = \omega_H$, $\gamma_\phi = \gamma$. Тогда из (19) следует:

$$\frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2} \leq \frac{1}{4} \omega_H^2 , \tag{20}$$

[x/] Тривиальный случай устойчивости при $\Omega_p = 0$ здесь, естественно, исключен.

что совпадает с условием бриллюэновской фокусировки. Возвращаясь к анализу общих условий (17) - (19), заметим, что если первые два непротиворечивы, т.е. правая часть (18) больше правой части (17), то условие (19) более сильное, чем (1 8). Тогда условия устойчивости можно выразить так:

$$\frac{1}{2}\Omega^2 < \frac{a^2\gamma_{z_0}^2}{r_0^2} \tag{21}$$

и

$$\Omega^2 - \frac{a^2\gamma_{z_0}^2}{r_0^2} \le \frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2} \le \frac{\Omega^4}{4}\,\frac{r_0^2}{a^2\gamma_{z_0}^2}\,. \tag{22}$$

Условие (21) фактически определяет ширину области устойчивости, (22) накладывает ограничение на количество частиц в кольце, находящегося в состоянии равновесия.

Займемся, прежде всего, условием (21). Будем считать заданными параметры: r_0, v'_ϕ, $\dot{z}_0$. Тогда условие движения по равновесной траектории с радиусом r_0, которое мы теперь запишем в виде

$$\frac{a\gamma_{z_0}\dot{z}_0}{c^2} = \beta_\phi^2 - \frac{\omega_H r_0}{c}\beta_\phi\,,\quad \beta_\phi = \frac{|v'_\phi|}{c}\,, \tag{23}$$

дает связь между ω_H и a. Исключая ω_H из (21) с помощью (23), получим:

$$a^2 \cdot \gamma_{z_0}^2 > \frac{c^2\beta_\phi^2}{1-\beta_z^2/\beta_\phi^2}, \quad \beta_z < \beta_\phi \quad \text{или} \quad a^2 > \frac{c^2\beta_\phi^4}{1-\gamma_{z_0}^2/\gamma_\phi^2}. \qquad (24)$$

Здесь $\gamma_\phi = (1-\beta_\phi^2)^{-1/2}$. Условие (24) предполагает, что должно быть выполнено

$$\gamma_\phi > \gamma_{z_0}. \qquad (25)$$

Таким образом, в принципе устойчивость заряженного кольца может быть обеспечена, если скорость кольца вдоль оси поля не превосходит скорости вращения электронов (в собственной системе координат) и компонента H_ϕ магнитного поля удовлетворяет условию (24).

Остается рассмотреть неравенства (22), ограничивающие кулоновский заряд кольца. После некоторых преобразований, используя связь между H_z и H_ϕ полями из определения большого радиуса в форме (23), неравенства (22) можно привести к виду:

$$1 < \frac{r_0^2\Omega_p^2/\gamma_\phi^2}{c^2\beta_\phi^2 + a^2\gamma_{z_0}^2\dfrac{\beta_z^2}{\beta_\phi^2}} < 1 + \frac{\left[a^2\gamma_{z_0}^2\left(1-\dfrac{\beta_{z_0}^2}{\beta_\phi^2}\right) - c^2\beta_\phi^2\right]^2}{4a^2\gamma_{z_0}^2\left(c^2\beta_\phi^2 + a^2\gamma_{z_0}^2\dfrac{\beta_z^2}{\beta_\phi^2}\right)}. \qquad (26)$$

Наибольшая ширина области устойчивости будет, когда в (24) заключено сильное неравенство. Тогда второй член в правой части (26) можно упростить:

$$1 < \frac{r_0^2 \Omega_p^2 / \gamma_\phi^2}{a^2 \gamma_{z_0}^2 \beta_z^2 / \beta_\phi^2} < 1 + \frac{(1 - \beta_z^2 / \beta_\phi^2)^2}{4 \beta_z^2 / \beta_\phi^2} . \tag{27}$$

Отсюда видно, что ширина области устойчивости быстро уменьшается с ростом $\beta_z (\beta_\phi \approx 1)$ и при $\gamma_{z_0}^2 = 2$ уже равняется примерно 10%. Этот вывод уточняет предварительные результаты /2/.

В частном случае $\beta_z \approx 0$, $\frac{c \beta_\phi}{r_0} = \omega_H$ и условия фокусировки будут такими:

$$a > c \beta_\phi \quad \text{или} \quad H_\phi > H_z , \tag{28}$$

$$1 < \frac{\Omega_p^2 / \gamma_\phi^2}{\omega_H^2} < 1 + \frac{(a^2 - c^2 \beta_\phi^2)^2}{4 a^2 c^2 \beta_\phi^2} = 1 + \frac{(H_\phi^2 - H_z^2)^2}{4 H_\phi^2 H_z^2} . \tag{29}$$

Полученные результаты можно несколько обобщить. Если записать уравнения (14) в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{\zeta} + \omega_{H_\phi} \dot{\eta} + \lambda_1 \xi = 0 \\ &\ddot{\eta} - \omega_{H_\phi} \dot{\xi} + \lambda_2 \eta = 0 , \qquad \omega_{H_\phi} = \frac{a \gamma_{z_0}}{r_0} , \end{aligned} \tag{30}$$

то можно заметить, что случай неподвижного в пространстве кольца в присутствии бочкообразного H_z поля с показателем спада поля n также содержится в (30), при этом, как нетрудно показать, λ_1 и λ_2 равны:

$$\lambda_1 = \omega_H^2 (1 - n) - \frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2}$$
$$\lambda_2 = \omega_H^2 n - \frac{\Omega_p^2}{\gamma_\phi^2} \; . \tag{31}$$

Характеристические частоты системы (30) равны

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{H_\phi}^2 + \lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_{H_\phi}^2 + \lambda_1 + \lambda_2)^2}{4} - \lambda_1 \lambda_2 \ldots} \; . \tag{32}$$

Основное условие вещественности частот $\omega_{1,2}$ состоит в том, что λ_1 и λ_2 должны иметь одинаковые знаки. Если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, то к этому требованию добавляются еще два, аналогичные рассмотренным ранее - (18) и (19). Если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, что может осуществляться для λ вида (31), дополнительных условий нет. Отсюда следует, что в слабофокусирующем магнитном поле в присутствии H_ϕ компоненты помимо обычной области устойчивости $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$ при определенных условиях появляется еще одна область устойчивости, соответствующая $\lambda_2, \lambda_2 < 0$, которая по своему характеру аналогична рассмотренной выше для случая однородного H_z поля.

В связи с тем, что одна из частот (32) при достаточно большом H_ϕ - поле становится весьма большой, представляет интерес выяснить влияние H_ϕ поля на малый размер кольца.

3. Движение кольца в неоднородном винтовом поле

В заключение мы рассмотрим вопрос об изменении большого радиуса релятивистского кольца электронов, когда оно движется в изменяющемся вдоль направления движения H_z -поле и H_ϕ - поле вида (1). Известно /3/, что в адиабатически меняющемся в пространстве H_z поле поступательная энергия кольца переходит во вращательную (или наоборот), при этом большой радиус изменяется обратно пропорционально $\sqrt{H_z(z)}$. Если выполнить пространственное бетатронное условие 2:1, что требует введения внутреннего соленоида с переменным в пространстве магнитным потоком (см. /3/), то оказывается возможным сохранить постоянным большой радиус кольца при ускорении в спадающем по оси z магнитном поле.

Сейчас мы покажем, что при некоторых условиях добавление H_ϕ компоненты магнитного поля приводит к сходному результату.

Будем считать, что поле H_z меняется адиабатически по оси z по закону, близкому к линейному, так что выполнено

$$\left| \gamma_z \frac{z}{H_z} \frac{\partial H_z}{\partial z} \right| \ll 1 \qquad (33)$$

и

$$\frac{1}{r^2} \int_0^r r H_z dr \approx \frac{1}{2} H_z . \qquad (34)$$

Тогда уравнения движения осевой частицы кольца будут отличаться от уравнений (5) только добавочным членом от H_r – составляющей поля в третьем уравнении. Выпишем его:

$$\ddot{z} = \bar{a}\,\frac{\dot{r}}{r} + \frac{1}{2}\left(P - \frac{r^2\omega(z)}{2}\right)\frac{d\bar{\omega}}{dz} \, . \qquad (35)$$

Первые два уравнения (5), как и раньше, дают орбиту равновесного движения, и адиабатически изменяющийся большой радиус кольца определяется выражением вида (7):

$$r^2 = \frac{\sqrt{\bar{a}^2\dot{z}^2 + \bar{P}^2\bar{\omega}_H^2(z)} - \bar{a}\dot{z}}{\bar{\omega}_H^2(z)/2} \, . \qquad (36)$$

Таким образом, необходимо совместно решить уравнения (35) и (36).

В уравнении (35) введем новую независимую переменную $\bar{\omega}_H(z)$ и штрихом будет обозначать производную по $\bar{\omega}_H$. Тогда оно приобретет вид:

$$\dot{z}\,\dot{z}' = \bar{a}\,\dot{z}\,\frac{r'}{r} + \frac{1}{2}\left(\bar{P} - \frac{r^2\bar{\omega}_H}{2}\right). \qquad (37)$$

Теперь введем безразмерные переменные

$$\beta = \frac{\dot{z}}{c}, \quad y = \frac{r}{r_0}, \quad \xi = \frac{\bar{\omega}_H}{\bar{\omega}_{H_0}}, \quad k = \frac{\bar{a}}{c} \, . \qquad (38)$$

Для определенности будем считать, что кольцо в начальном состоянии покоилось в практически однородном поле, так что

$$\bar{P} = -\frac{r_0^2 \bar{\omega}_{H_0}}{2}, \quad \frac{r_0 \bar{\omega}_{H_0}}{c} = \beta_{\perp 0}, \quad \frac{\bar{P}}{c} = -\frac{r_0 \beta_{\perp 0}}{2}. \tag{39}$$

В новых обозначениях искомые уравнения, определяющие изменение скорости кольца и его большого радиуса, выглядят так :

$$4\beta \frac{d}{d\xi}(k \ln y - \beta) = \beta_{\perp 0}^2 (1 + \xi y^2), \tag{40}$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{k^2\beta^2 + \beta_{\perp 0}^2 \xi^2/4} - k\beta}{\xi^2/2}. \tag{41}$$

Подставляя (41) в (40), получим уравнение для $\beta(\xi)$:

$$\frac{d\beta^2}{d\xi} = -\frac{1}{2}\,\frac{\xi\beta_{\perp 0}^2 + 2\sqrt{k^2\beta^2 + \beta_{\perp 0}^2\xi^2/4}}{k^2 + 2\sqrt{k^2\beta^2 + \beta_{\perp 0}^2\xi^2/4}} + 0\left(\frac{1}{\gamma_{\perp 0}^2}\right). \tag{42}$$

Наиболее интересен случай начальной релятивистской скорости вращения электронов, когда $\gamma_{\perp 0}^2 \gg 1$, так что в (42) ограничимся выписанным основным членом. Уравнение (42) можно проинтегрировать, если положить

$$\phi = \sqrt{k^2\beta^2 + \xi^2/4}. \tag{43}$$

Для $\phi(\xi)$ имеем:

$$2\phi'(k^2+2\phi)=\xi-k^2. \qquad (44)$$

С учётом начальных условий $\beta=0$, $\xi=1$, $\phi=1/2$ решение (42) таково (возвращаемся к функции $\beta(\xi)$):

$$\sqrt{k^2\beta^2+\xi^2/4}=\sqrt{k^2+\frac{k^4}{4}+\frac{\xi^2}{4}-\frac{k^2}{2}\xi}-k^2/2. \qquad (45)$$

Уравнение (45) определяет в неявной форме функцию $\beta(\xi)$ и после подстановки в (41) – функцию $y(\xi)$. Теперь хорошо видно, что закон изменения скорости и большого радиуса кольца определяется одним параметром k. Если $k=0$, ($H_\phi=0$), то получаем обычный адиабатический закон (из (40)):

$$\beta^2=\beta^2_{\perp 0}\left(1-\frac{\bar{\omega}_H}{\bar{\omega}_{H_0}}\right)$$

и (46)

$$\frac{r^2}{r_0^2}=\beta_{\perp 0}\frac{\nu\bar{\omega}_{H_0}}{\bar{\omega}_H}.$$

При $k\neq 0$ асимптотические значения β и r, когда $\xi\to 0$, таковы:

$$\beta_{ac}=\sqrt{1+k^2/4}-k/2.$$

и (47)

$$\frac{r^2}{r_0^2}=\frac{\beta^2_{\perp 0}}{4k\,\beta_{ac}}.$$

Таким образом, в отличие от ускорения кольца в поле $H_z(z)$ при выполнении пространственного бетатронного условия, в нашем случае существует предельная скорость кольца при уменьшении поля H_z, т.е. происходит неполный перевод вращательной энергии в поступательную. Физически это ясно, так как при $H \to 0$ радиус не стремится к бесконечности за счёт компенсации центробежной силы силой Лоренца от H_ϕ поля, равной $\frac{a \overset{\cdot}{z} \gamma_{z_0}}{\dot{z}}$, при этом $\beta_\phi|_{ac} = \frac{v_\phi}{c} \approx \sqrt{k \beta}$.

На рис. 1 представлены результаты численного расчёта функции $y(\xi, k)$ при некоторых значениях параметра k. Практически постоянным радиус кольца оказывается при $k \approx 0{,}3$, при этом $\gamma_{z\,ac} \approx 2{,}0$.

Автор весьма признателен М.Л. Иовновичу за обсуждение ряда принципиальных вопросов, касающихся данной работы.

Литература

1. В.И. Векслер и др. Материалы 6-ой международной конференции по ускорителям. Кембридж, 1967, стр. 289. Атомная энергия ,<u>24</u>, 317 (1968).
2. А.Г. Бонч-Осмоловский, Г.В. Долбилов, И.Н. Иванов, Э.А. Перельштейн, В.П. Саранцев, О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ, Р9-4135, Дубна, 1968.
3. А.Г. Бонч-Осмоловский, Г.В. Долбилов, О.А. Колпаков, А.Б. Кузнецов, В.Н. Мамонов, К.А. Решетникова, Н.Б. Рубин, С.Б. Рубин, В.П. Саранцев. Препринт ОИЯИ, Р9-4171, Дубна, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 августа 1970 года.

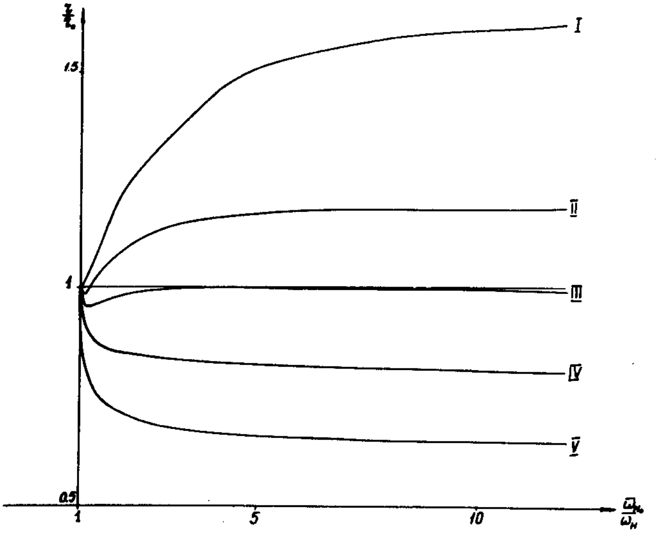

Рис. 1. Изменение большого радиуса кольца при движении в спадающем магнитном поле.

I. $k = 0{,}1 \quad \gamma_z\big|_{H_z \to 0} = 3{,}2$

II. $k = 0{,}2 \quad \gamma_z\big|_{H \to 0} = 2{,}36$

III. $k = 0{,}3 \quad \gamma_z\big|_{H \to 0} = 1{,}96$

IV. $k = 0{,}5 \quad \gamma_z\big|_{H \to 0} = 1{,}6$

V. $k = 1{,}0 \quad \gamma_z\big|_{H \to 0} = 1{,}27$.