С345.1
Ц-977

23/VII-70

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р9-5090

В.Н. Цытович

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СОЛИТОНЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ КАК СГУСТКИ ДЛЯ КОГЕРЕНТНОГО УСКОРЕНИЯ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1970

P9-5090

В.Н. Цытович

84/2/2 ир.

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СОЛИТОНЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ КАК СГУСТКИ ДЛЯ КОГЕРЕНТНОГО УСКОРЕНИЯ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1. Как известно, В.И. Векслером /1/ было предложено несколько механизмов когерентного ускорения частиц, использующих коллективные силы. Одним из перспективных методов, к которому привлечено большое внимание в последнее время, является ускорение релятивистских электронных колец. Кольца вследствие эффекта Бенета /2/ - Будкера /3/ могут быть заряженными, причем избыток электронов своим коллективным полем удерживает ионы в процессе ускорения. Очевидно, что необходимой предпосылкой развития таких исследований является решение задачи создания таких колец. Именно экспериментальные успехи, достигнутые отделом В.П. Саранцева в ОИЯИ, о которых было доложено на Международной конференции в Кембридже в 1967 г. /4/, приковали к проблеме линейного коллективного ускорения внимание многих лабораторий.

В настоящей работе мы проанализируем другую возможность создания сгустков, имеющих большие коллективные поля, которые, возможно, могли бы найти применение для коллективного ускорения. Обычно созданию сильных коллективных полей препятствуют силы взаимного электрического отталкивания. Предполагается, что в электронных кольцах они могут быть ликвидированы за счет магнитного притяжения при малом числе ионов. Возможна, однако, также стабилизация сил расталкивания из-за того, что они создаются не одними и теми же частицами, а разными. Такая стабилизация является динамической и возможна, если соответствующая нелинейная волна распространяется в плазме. Таким образом, речь идет об использовании коллективных эффектов не только для ускорения, но и для создания сгустков - объектов ускорения. Ускорение нелинейными волнами в плазме было предложено Я.Б. Файнбергом /5/. При использовании для ускорения сильных нелинейных волн, имеющих фазовые скорости, близкие к скорости света, важно знать их структуру. Как было показано автором [6], для таких волн, фазовая скорость которых близка к скорости света, но не достигает ее, возникает ряд специфических особенностей, в частности, резко возрастают значения максимальной потенциальной ямы, которая может существовать в волне без возникновения многоскоростных течений. В принципе возможны как квазипериодические нелинейные волны, так и одиночные импульсы – солитоны. Для когерентного ускорения, по-видимому, оба типа нелинейных волн представляют интерес. Наличие периодичности означает, грубо говоря, что имеется система следующих друг за другом сгустков, что может даже рассматриваться как плюс для когерентного ускорения.

Вопрос о том, как возбудить указанные нелинейные движения в плазме, представляет собой отдельную проблему, которой мы здесь практически касаться не будем. Отметим лишь, что в связи с созданием мощных электронных релятивистских пучков [7] эта задача сейчас имеет значительно больше возможностей для решения [x].

Нижеследующий анализ базируется на работах автора [6,8,9], С.Б.Рубина и автора [10], опубликованных в 1961–1963 годах. Анализ результатов этих работ мы делаем с точки зрения современного состояния проблемы, имея в виду создание плазменных сгустков для когерентного ускорения.

2. Рассмотрим нелинейную волну, распространяющуюся вдоль внешнего магнитного поля. На продольную волну магнитное поле не влияет, и, следовательно, можно воспользоваться результатами [6]. Пусть

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_\phi^2}{c^2}}} \gg 1, \tag{1}$$

где v_ϕ – фазовая скорость волны. Постоянство v и $v < c$ означает, что существует такая система отсчета, в которой картина волны стацио-

[x] Можно использовать эффекты взаимодействия релятивистских пучков с плазмой, неустойчивости в самих пучках и т.п.

нарна. Амплитуда волны может быть в этой системе отсчета охарактеризована значением максимальной разности потенциалов

$$\frac{e\phi_{max}}{\frac{m_e v^2}{2}} = \lambda , \tag{2}$$

λ - безразмерная характеристика ϕ_{max}. Максимальное значение λ, согласно /6/, есть

$$\lambda_{max} = 4\gamma^2 . \tag{3}$$

Таким образом, максимальная потенциальная яма в волне оказывается при $\gamma \gg 1$ очень большой: $2 m_e c^2 \gamma^2$. Волна имеет периодическую структуру. При этом на относительно большой длине поля и потенциалы меняются слабо, а максимальные значения их сосредоточены в узкой области. Такая картина имеет место при $\lambda > \gamma$. Таким образом, в указанных условиях нелинейная волна представляет собой систему как бы квазинезависимых электронных сгустков. Расстояние между этими сгустками равно в системе, где фронт стационарен, пространственному периоду x_0:

$$x_0 = \frac{c}{\omega_{pe}} 2\sqrt{2\gamma\lambda} , \tag{4}$$

где $\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}$, n_0 - плотность плазмы в лабораторной системе, в которой волна движется с фазовой скоростью v. Расстояние между сгустками в лабораторной системе в γ раз меньше из-за релятивистского сокращения длин. Максимальная напряженность электрического поля достигается достаточно близко от дна потенциальной ямы.

$$(x - \frac{x_0}{2}) \frac{1}{x_0} \ll 1 , \quad \text{если} \quad \lambda \gg \gamma , \text{ а именно:}$$

$$(\frac{x_0}{2} - x)\frac{1}{x_0} = \frac{2\gamma^2}{\lambda^2} . \tag{5}$$

На остальном участке периода, который при $\lambda \gg \gamma$ практически совпадает с x_0, напряженность электрического поля плавно спадает до нуля.

Значение максимальной напряженности поля на фронте волны есть

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{5} n_0 m c^2 \frac{\lambda}{\gamma}}, \tag{6}$$

и при $\lambda = 4\gamma^2$ для максимальной амплитуды

$$(E_0)_{max} = \sqrt{\frac{8\pi}{5} n_0 m c^2 \gamma} . \tag{7}$$

Средняя на периоде напряженность поля есть (см. /6/)

$$\frac{\bar{E}^2}{8\pi} = \frac{1}{12} n_0 m c^2 \frac{\lambda}{\gamma}. \tag{8}$$

В силу инвариантности продольной компоненты поля значения (6), (7) соответствуют также полю в лабораторной системе отсчета. В /6/ было получено, что для системы отсчета, в которой фронт стационарен, средняя по периоду плотность кинетической энергии частиц в $4\gamma^2$ раз больше (8). Однако при переходе к лабораторной системе оказывается (в силу релятивистского преобразования тензора энергии и импульса), что кинетическая энергия частиц лишь в 4 раза превосходит величину, приводимую в (8), т.е. составит

$$\frac{1}{3} n_0 m_e c^2 \frac{\lambda}{\gamma}. \tag{9}$$

Формула (7) может служить для оценки максимальной напряженности поля. Так, при $n_0 \approx 10^{14}$ см$^{-3}$, $\gamma \approx 10$ получим

$$E_{0\,max} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{в}}{\text{см}} = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{Мв}}{\text{м}} .$$

Для того, чтобы использовать эти поля, требуется не только создать такие нелинейные волны и доказать их устойчивость, но и управлять ими, изменяя значение их фазовой скорости.

Отметим здесь, что такие волны представляют собой самосогласованные точные нелинейные решения и поэтому, возможно, они могут оказаться существенно более устойчивыми, чем образования, создаваемые искусственно. Существенной проблемой является также захват частиц в потенциальную яму таких волн, роль захваченных частиц в создании неустойчивостей и т.п.

Укажем здесь лишь одно условие, которое представляется необходимым для существования таких волн. Это условие состоит в том, чтобы ионы плазмы, компенсирующие в среднем заряд электронов, не захватывались в потенциальную яму волны с нулевых скоростей (малая доля специально инжектируемых ионов, естественно, должна быть захвачена при когерентном ускорении).

В системе отсчета, в которой волна стационарна, энергия ионов есть $m_i c^2 \gamma$. Таким образом, необходимо

$$\lambda < \frac{m_i}{m_e} \gamma . \qquad (10)$$

Если подставить сюда $\lambda_{max} = 4\gamma^2$, получим $\gamma < \frac{1}{4} \frac{m_i}{m_e}$, что в общем не является жестким ограничением.

3. Обсудим здесь кратко возможности возбуждения таких волн релятивистским пучком. Будем считать, что его плотность n_1 в лабораторной системе удовлетворяет неравенству

$$\frac{n_1}{n_0} \ll 1 . \qquad (11)$$

По-видимому, необходимо обеспечить условия, когда имеется резонанс между пучком и лишь одной волной. На линейной стадии это допустимо, если

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} \ll \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{1/3} \gamma . \qquad (12)$$

(12) совместимо с предположением, что пучок отдает в волну энергию порядка своей энергии, т.е. $\Delta\gamma \approx \gamma$, что дает

$$\frac{n_1}{n_0} \gg \frac{1}{\gamma^3}. \qquad (13)$$

Конечно, аргументы, согласно которым получено (13), достаточно грубы и желательно иметь детальную нелинейную теорию развития неустойчивости. Если пучок отдает энергию порядка своей энергии, которая в конечном счете становится нелинейной волной описанного выше вида, то

$$E = \sqrt{4\pi n_1 m c^2 \gamma}, \qquad (14)$$

если считать, что γ волны и пучка совпадают. Таким образом, из (14) и (6) получим оценку амплитуды волны:

$$\lambda \approx \gamma^2 \frac{n_1}{n_0}. \qquad (15)$$

Для того, чтобы волна была сильной, $\lambda \gg \gamma$, и представляла собой систему квазинезависимых сгустков, необходимо

$$\frac{n_1}{n_0} \gg \frac{1}{\gamma^3}, \qquad (16)$$

что совпадает с (13).

Следовательно, оптимальному случаю соответствует

$$1 \gg \frac{n_1}{n_0} \gg \frac{1}{\gamma^3}. \qquad (17)$$

Область (17) существует лишь для релятивистских волн $\gamma \gg 1$.

Проведенные оценки, на наш взгляд, лишь указывают на направление, в котором желательно провести более детальные исследования. В частности, важно знать, действительно ли возбуждается одна нелинейная стационарная волна. Заметим, что в силу отсутствия суперпозиции в нелинейном режиме более быстрое развитие одной волны может подавлять другие волны. Однако, в принципе, нельзя исключить возможность появления квазипериодических во времени нестационарных самосогласованных решений.

4. Существует другая возможность возбуждения нелинейных волн, связанная с прохождением через плазму заряженных сгустков. Наибольший интерес представляет случай, когда таким сгустком является релятивистское электронное кольцо (пример сгустка, реально существующего). Если кольцо движется с релятивистской скоростью, то перед ним имеется практически невозмущенная плазма, а за ним возбуждается электронная нелинейная волна. Механизмом ее возбуждения является когерентное излучение такой волны зарядом кольца. В системе отсчета, в которой кольцо покоится (и плазма налетает на него с релятивистской скоростью), за кольцом образуется стационарная нелинейная волна. Условие когерентности излучения состоит в том, чтобы характерный размер излучателя (кольца) a в направлении излучения был значительно меньше длины волны (в данном случае периода x_0), т.е.

$$a < \frac{2}{\omega_{pe}} \sqrt{2\gamma\lambda} \; . \tag{18}$$

Для оценки эффекта можно воспользоваться точным решением, найденным в /10/, для возбуждения волны заряженной плоскостью, движущейся с релятивистской скоростью в плазме. Это решение показывает, что, действительно, за плоскостью должна возникать нелинейная волна описанного выше вида и амплитуда ее велика, $\lambda > \gamma$, если

$$\frac{2\pi\sigma^2}{m_e n_0} \gg 1, \tag{19}$$

где σ - заряд 1 см^2 поверхности заряженной плоскости.

Результаты решения этой задачи могут быть использованы для оценки амплитуды волны в условиях, когда кольцо представляет собой "плоскую шайбу", т.е. в поперечном сечении имеет продольный размер (по движению), много меньший длины волны, а поперечный (перпендикулярно движению) - много больший длины волны. Если R есть большой радиус кольца, а d - малый в плоскости, перпендикулярной движению ($a \ll d$), то плотность заряда есть

$$\sigma = \frac{eN}{2\pi R\, d} \; . \tag{20}$$

Условие (19) с учетом "утяжеления" электронов из-за перпендикулярного релятивистского движения (фактор $\gamma_\perp$) имеет вид

$$\frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\nu}{\gamma_\perp} \gg 1, \tag{21}$$

где

$$n_1 = \frac{N}{2\pi R d^2}, \tag{22}$$

$$\nu = \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{N}{2\pi R}. \tag{23}$$

ν – так называемый погонный электрон; n_1 играет роль плотности электронов кольца (однако в силу $d \gg a$, n_1 фактически много меньше реальной плотности). Обычно $\nu \ll \gamma_\perp$. Заметим, что расчет /10/ не связан с каким-либо предположением об отношении $\frac{n_1}{n_0}$ и, таким образом, (21) указывает на то, что кольцо может возбуждать в плазме весьма сильную нелинейную волну при $\frac{n_1}{n_0} \gg \frac{\gamma_\perp}{\nu}$, что при $\frac{\gamma_\perp}{\nu} \gg 1$ дает $\frac{n_1}{n_0} \gg 1$.

В отличие от приведенных выше оценок для возбуждения волн пучком заданная оценка базируется на точном решении задачи, найденном в /10/. Надо иметь в виду также, что реально за кольцом возникает расходящаяся цилиндрическая волна и описанная выше нелинейная структура волны может возникать за кольцом лишь в течение некоторого времени до тех пор, пока возбужденную волну приближенно можно рассматривать как плоскую. Отметим также, что в данном случае вопрос об эффективности возбуждения волны определяется, по-видимому, в большей степени возможной точностью выполнения условия когерентности (18). При выполнении (21) амплитуда нелинейной волны, возбуждаемой за кольцом, определяется соотношением

$$\lambda = 4\gamma \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\nu}{\gamma_\perp}. \tag{24}$$

Максимальная амплитуда достигается, если

$$\frac{n_1}{n_0} \frac{\nu}{\gamma_\perp} = \gamma . \tag{25}$$

Таким образом, в плазме относительно небольшой плотности релятивистские кольца могут возбуждать нелинейные волны весьма больших амплитуд.

Условие когерентности приобретает вид

$$a < \frac{4c}{\omega_{pe}} \gamma \sqrt{\frac{2n_1}{n_0} \frac{\nu}{\gamma_\perp}} , \tag{26}$$

а в предельном случае $\lambda = \lambda_{max}$

$$a < \frac{4c\sqrt{2}}{\omega_{pe}} \gamma^{3/2} . \tag{27}$$

Выполнимость последнего условия облегчается с ростом γ. Описанный способ возбуждения нелинейных волн как бы перекидывает "мостик" между двумя методами создания сгустков для когерентного ускорения.

5. Рассмотрим теперь сильные нелинейные волны, распространяющиеся поперек внешнего магнитного поля /9/. В этом случае возможно существование уединенных импульсов - солитонов. Фазовые скорости таких солитонов будут ультрарелятивистскими, т.е. $\gamma \gg 1$, если $v_{Ae} \gg c$, где

$$v_{Ae} = \frac{H}{\sqrt{4\pi n_0 m_e}} - \tag{28}$$

альфвеновская скорость электронов.

Условие $v_{Ae} \gg c$ означает

$$\omega_{He} = \frac{eH}{mc} \gg \omega_{pe} , \tag{29}$$

что обычно не очень трудно выполнить.

При

$$\gamma > \frac{v_{Ae}}{c} \tag{30}$$

линейные волны не распространяются $(n^2 < 0)$. Из "сшитых" экспоненциально убывающих и нарастающих решений и образуется солитон. Многоскоростные течения возникают в волне при

$$\gamma > \gamma_{max} = 2 \frac{v_{Ae}^2}{c^2}. \tag{31}$$

Таким образом, при $v_{Ae} \gg c$ существует широкая область релятивистских солитонов

$$\frac{v_{Ae}^2}{c^2} > \gamma > \frac{v_{Ae}}{c}. \tag{32}$$

Амплитуда электрического поля на фронте солитона возрастает с ростом γ. Если $\gamma \gg \frac{v_{Ae}}{c}$, то амплитуду можно считать уже большой, а солитон – сильным. Характерный размер солитона в собственной системе отсчета есть

$$x_0 = \frac{c}{\omega_{pe}}, \tag{33}$$

а максимальное поле есть

$$E_{max} = H \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\gamma}{v_{Ae}} \cdot \frac{c^2}{v_{Ae}^2}. \tag{34}$$

Если, например, $\gamma \approx 10\, v_{Ae}$, $v_{Ae} \approx 3c$, то $E_{max} \approx \frac{1}{2} H$ и при $H \approx 2 \cdot 10^5$ эрстед

$$E_{max} = 3 \cdot 10^7 \ \frac{\text{в}}{\text{см}} = 3 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Мв}}{\text{м}}.$$

Причем размер сгустка $x_0 \approx 0{,}1$ см при $n \approx 2 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$.

Возможны и низкочастотные релятивистские солитоны, которые требуют значительно больших H и имеют большие размеры. По-видимому, на них развивается низкочастотная неустойчивость так же, как и в ударных бесстолкновительных волнах.

Представляет интерес рассмотреть детально задачи о движении отдельных ускоряемых частиц в полях, создаваемых такими солитонами. Для солитонов, распространяющихся поперек магнитного поля, это не столь тривиально, так как, помимо электрического поля, перпендикулярно внешнему магнитному полю возникает магнитная компонента и частицы, попадающие в поле солитона, совершают сложные движения.

По-видимому, возможно столкновение солитонов и коллективное ускорение частиц, аналогичное ударному /1/. Есть основания полагать, что электрические поля нарастают в момент столкновения солитонов (эффект коммуляции).

Автор приносит глубокую признательность М.С. Рабиновичу, В.П. Саранцеву и С.Б. Рубину за обсуждение результатов.

Литература

1. *В.И. Векслер. Труды конференции по ускорителям. Женева, 1956, т. 1, стр. 80. Атомная энергия, 2, 427 (1957).*
2. *W.H. Benett. Phys.Rev., 98, 1954 (1955).*
3. *Г.И. Будкер. Труды конференции по ускорителям. Женева, 1956, т. 1, стр. 68. Атомная энергия, 1, 9 (1956).*
4. *В.И. Векслер, В.П. Саранцев и др. Доклад на IV международной конференции по ускорителям. Кембридж, 1967.*
   Р9-3440-2, Дубна, 1967. Препринт ОИЯИ, Р9-3440-2, Дубна, 1967.
5. *Я.Б. Файнберг. Труды конференции по ускорителям. Женева, 1956, т. 1, стр. 84.*
6. *В.Н. Цытович. ДАН СССР, 142, №63 (1962).*
7. *D. Keef, C.R. Lambertson, L.J. Laslett, A.M. Sessler et al. Phys. Rev.Lett., 22, 558 (1969).*
8. *В.Н. Цытович. ЖТФ, 34, 3 (1964).*

9. *В.Н. Цытович. ЖЭТФ, 35, 1405 (1958).*
10. *С.Б. Рубин, В.Н. Цытович. ЖТФ, 34, 3 (1964).*

Рукопись поступила в издательский отдел
4 мая 1970 года.