

С 345 л 1

К-891

20/11-70

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 5087



А.Б. Кузнецов, С.Б. Рубин

О ВОЗБУЖДЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ
ЗАРЯЖЕННОЙ НИТЬЮ, ПРОЛЕТАЮЩЕЙ МИМО
ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ
С ВЫСТУПОМ В ВИДЕ ПОЛУЦИЛИНДРА

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1970

P9 - 5087

А.Б. Кузнецов, С.Б. Рубин

О ВОЗБУЖДЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ
ЗАРЯЖЕННОЙ НИТЬЮ, ПРОЛЕТАЮЩЕЙ МИМО
ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТИ
С ВЫСТУПОМ В ВИДЕ ПОЛУЦИЛИНДРА

8386/2 48

СОВЕТСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ФИЗИКИ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ
БИБЛИОТЕКА

Из рассмотрения целого ряда работ, посвященных оценке потерь энергии на возбуждение излучения заряженным ультрарелятивистским сгустком, пролетающим около одиночной пространственной неоднородности, можно сделать вывод о линейной зависимости величины потерь от начальной энергии сгустка $\epsilon_0 = Mc^2\gamma$. Известно, что спектральная плотность излучения имеет максимум в определенной области частот; положение этого максимума и ширина также зависят от фактора γ .

Из имеющихся данных (см., например, /1/) трудно, однако, сделать определенное заключение о том, насколько существенно величина излучения и его частотный спектр зависят от наличия у неоднородности острых кромок. Поэтому желательно рассмотреть простой случай, поддающийся точному решению, в котором кривизна препятствия имела бы конечную величину. Ниже рассмотрено препятствие в виде полуцилиндра, лежащего на плоскости. Нить, параллельная образующей цилиндра, движется с постоянной скоростью v параллельно плоскости. Расположение относительно осей координат и размеры указаны на рис. 1.

Можно показать, что эта задача эквивалентна задаче о пролете двух противоположно заряженных нитей, симметричных относительно плоскости $x=0$ и пролетающих мимо цилиндра (см. рис. 2).

Таким образом, основой всего решения служит рассмотрение задачи о пролете нити около цилиндра.

1. Плотность заряда нити и создаваемый ею ток определяются формулами:

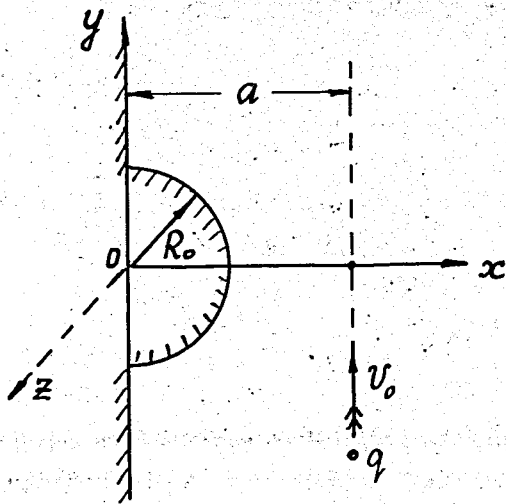


Рис. 1.

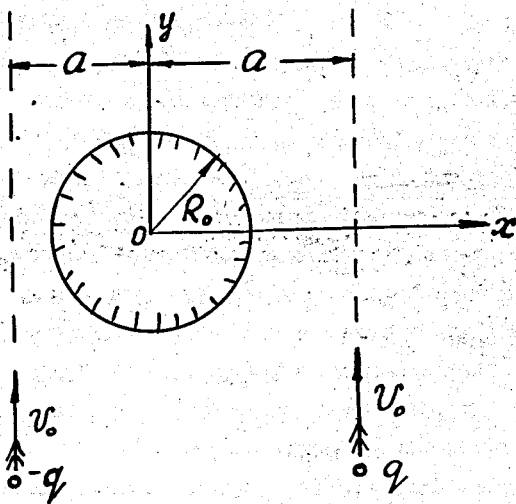


Рис. 2.

$$\rho = q \delta(x-a) \delta(y-vt),$$

(1)

$$\bar{j} = \bar{e}_y q v \delta(x-a) \delta(y-vt).$$

Поле нити можно определить с помощью вектора Герца, имеющего только одну составляющую $\pi_y^0(x, y, t)$. Фурье-компоненты от π_y^0 представляются формулой (см./1/)

$$\pi_{\omega y}^{(0)} = \frac{iq}{k\omega\Gamma} e^{-k\Gamma|x-a|} e^{i(\frac{\omega}{v}y - \omega t)} \quad (2)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{\beta\gamma}, \quad k = \frac{|\omega|}{c}.$$

В окрестности цилиндрической поверхности $|x| < a$, переходя к цилиндрическим координатам r, ϕ, z и используя разложения

$$e^{i\frac{\omega}{v}r \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{\omega}{v}r\right) e^{in\phi},$$

$$e^{-k\Gamma|x-a|} = e^{-k\Gamma a + k\Gamma r \cos \phi} = e^{-k\Gamma a + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_m(k\Gamma r) e^{im\phi}}$$

получим для касательной компоненты $E_{\phi\omega}^0$ падающего на цилиндр внешнего поля* выражение:

$$E_{\phi\omega}^{(0)} = -\frac{iq}{\omega} e^{-k\Gamma a} \left(\frac{i\omega}{v} \sin \phi + k\Gamma \cos \phi \right) \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{\omega}{v}r\right) I_m(k\Gamma r) e^{i\phi(m+n)} \quad (3)$$

Для определения вторичного поля \bar{E}_{ω} можно решать векторное уравнение $\nabla^2 \bar{E}_{\omega} + k^2 \bar{E}_{\omega} = 0$. Решения этого уравнения запишутся в виде (см., например, /2/) ($E_z = 0, H_r = H_{\phi} = 0$)

$$E_{\omega\phi} = i \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_s \frac{dH_s^{(1)}(kr)}{d(kr)} e^{is\phi} \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_{\omega r} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_s \frac{H_s^{(1)}(kr)}{kr} e^{is\phi} \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_{\omega z} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_s H_s^{(1)}(kr) e^{is\phi} \quad (6)$$

B_s - неопределенные коэффициенты, для определения которых используется граничное условие

$$[\mathbf{E}_{\phi\omega} + \mathbf{E}_{\phi\omega}^0]_{r=R_0} = 0. \quad (7)$$

Отсюда имеем:

$$B_s = -\frac{q e^{-k\Gamma a}}{2\omega} \left[\frac{dH_s^{(1)}(kR_0)}{d(kR_0)} \right]^{-1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{\omega}{v} R_0\right) [I_{s-n-1}(k\Gamma R_0) \left(\frac{\omega}{v} + k\Gamma\right) - I_{s-n+1}(k\Gamma R_0) \left(\frac{\omega}{v} - k\Gamma\right)] \right\}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь средний поток энергии вторичного поля, проходящий через цилиндрическую поверхность Σ радиуса $R > R_0$ и приходящийся на единицу длины по оси oz на частоте ω .

$$\bar{P}_{\omega} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Sigma} [\bar{\mathbf{E}}_{\omega}, \bar{\mathbf{H}}_{\omega}^*] d\sigma \right\} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \int_{-1/2}^{1/2} dz \int_0^{2\pi} R d\phi [\bar{\mathbf{E}}_{\omega}, \bar{\mathbf{H}}_{\omega}^*] \quad (9)$$

$$(\bar{P}_{\omega})_r = -\frac{cR}{2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |B_s|^2 \operatorname{Re} \left\{ i \frac{dH_s^{(1)}(kR)}{d(kR)} H_s^{(2)}(kR) \right\} = \frac{c}{\pi k} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |B_s|^2. \quad (10)$$

Преобразуем сумму, входящую в (8), с помощью выражения (см. приложение)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k) I_{q-n}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \theta + y \cos \theta - iq\theta} d\theta,$$

где q - целое. Тогда получим:

$$|B_s| = \frac{q^2 e^{-2k\Gamma} dH_s^{(1)}(kR_0)}{4\omega^2 d(kR_0)} \left\{ \frac{\omega}{\pi v} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-is\theta + i\frac{\omega}{v}R_0 \sin \theta + k\Gamma R_0 \cos \theta} i \sin \theta d\theta + \right. \\ \left. + \frac{k\Gamma}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-is\theta + i\frac{\omega}{v}R_0 \sin \theta + k\Gamma R_0 \cos \theta} \cos \theta d\theta \right\}^2. \quad (11)$$

Полный поток энергии через Σ , получаемый после интегрирования по частотам, будет

$$P = 2 \int_0^{\infty} P_{\omega r} d\omega. \quad (12)$$

Задачей является получение асимптотической зависимости $P(\gamma)$, когда γ принимает большие значения или (после выражения через параметр Γ) получение асимптотики $P(\Gamma)$ при $\Gamma \rightarrow 0$.

Можно сначала, рассматривая предельный случай, когда $\Gamma = 0$, выяснить, какова область значений переменных ω и s , которая дает главный вклад в величину P . Из (10) и (8) при $\Gamma = 0$ получится

$$P_{\omega r} |_{\Gamma=0} = \frac{c q^2 k^2}{4\pi k \omega^2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{[J_{s-1}(kR_0) - J_{s+1}(kR_0)]^2}{|H_{s-1}^{(1)}(kR_0) - H_{s+1}^{(1)}(kR_0)|^2}. \quad (13)$$

Выражение (13) чётно по s и поэтому, обозначая $P_0 = P |_{\Gamma=0}$, можно записать

$$P_0 = \frac{q^2}{4\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \frac{dk}{k} \sum_{s=0}^{\infty} \epsilon_s \frac{[J_{s-1}(kR_0) - J_{s+1}(kR_0)]^2}{|H_{s-1}^{(1)}(kR_0) - H_{s+1}^{(1)}(kR_0)|^2} \quad (14)$$

($\epsilon_s = 1$, при $s = 0$, $\epsilon_s = 2$, при $s \neq 0$). При $k \approx 0$ порядок членов суммы в (14) будет k^{4s-1} , если $s \neq 0$ и $-k^3$, если $s = 0$. Поэтому суммирование и интегрирование в конечной области значений s , k , например, $0 < s \leq s_0$, $0 < k \leq k_0$ дает конечный вклад в (14). Для оценки остальной части выражения (14), пользуясь тем, что каждый член суммы положительный, произведем разбиение оставшейся области изменения переменных s, k на несколько частей, в каждой из которых допустимо более элементарное представление выражения (14). Можно выбрать s_0 достаточно большим, чтобы использовать асимптотические представления цилиндрических уравнений с большим индексом. Тогда разбиение представится так, как показано на рис. 3, где введена безразмерная величина $\kappa = kR_0$.

В области II, ограниченной снизу кривой C_2 , уравнение которой $s = \kappa - \kappa^{1/3}$, имеют место асимптотические выражения

$$\frac{dH_s^{(1)}(\kappa)}{d\kappa} \approx i \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sqrt{\text{sh } \rho \cdot \text{ch } \rho} e^{s(\rho - \text{th } \rho)} \quad (15)$$

$$\frac{dJ_s(\kappa)}{d\kappa} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \sqrt{\text{sh } \rho \cdot \text{ch } \rho} e^{-s(\rho - \text{th } \rho)} \quad (16)$$

где ρ определено соотношением $\text{ch } \rho = \frac{s}{\kappa}$ и изменяется в пределах $0 < \rho < \infty$.

В области IV, ограниченной сверху кривой C_1 , уравнение которой $s = \kappa + \kappa^{1/3}$, асимптотические формулы будут

$$\frac{dH_s^{(1)}(\kappa)}{d\kappa} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sqrt{\sin \rho \cos \rho} e^{-is(\rho - \text{tg } \rho) + \frac{i\pi}{4}} \quad (17)$$

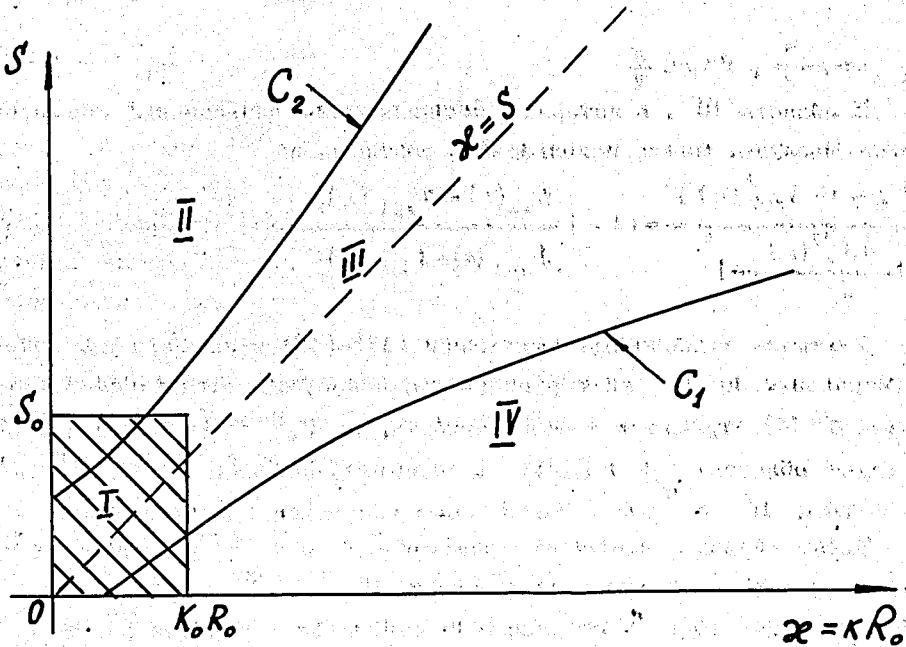


Рис. 3.

$$\frac{dJ_s(\kappa)}{d\kappa} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \sqrt{\sin \rho \cos \rho \sin [s(\operatorname{tg} \rho - \rho) - \frac{\pi}{4}]}, \quad (18)$$

где $\cos \rho = \frac{s}{\kappa}$, $0 < \rho \leq \frac{\pi}{2}$.

В области III, в которой несправедливы приведенные асимптотические формулы, можно использовать соотношение

$$\frac{[J_{s-1}(\kappa) - J_{s+1}(\kappa)]^2}{\left| \frac{dH_s^{(1)}(\kappa)}{d\kappa} \right|^2} = \left\{ 1 + \left[\frac{N_{s-1}(\kappa) - N_{s+1}(\kappa)}{J_{s-1}(\kappa) - J_{s+1}(\kappa)} \right]^2 \right\}^{-1} \leq 1. \quad (19)$$

Учитывая выписанные выражения (15)–(19) и заменяя для оценки суммирование по s интегрированием, обнаружим, что когда верхний предел в (14) стремится к бесконечности, то P_0^{II} (т.е. вклад в (14), даваемый областью II) имеет расходимость порядка $\kappa^{1/3}$, $P_0^{\text{III}} \lesssim \kappa^{1/3}$, и в области IV $P^{\text{IV}} \approx \kappa$ (размерные константы здесь опущены).

Таким образом, предельное значение P при $\Gamma = 0$ является расходящимся и главный вклад дает область IV.

Для того чтобы более подробно исследовать порядок роста P при $\Gamma \rightarrow 0$, нужно обратиться к полному выражению (11). В виду его сложности ограничимся далее рассмотрением главной области IV, в которой можно получить асимптотические выражения входящих в (11) интегралов:

$$U_1 = \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-is\theta + ik' s \ln \theta + k' \beta \Gamma \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (20)$$

$$U_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-is\theta + ik' s \ln \theta + k' \beta \Gamma \cos \theta} \cos \theta d\theta, \quad (21)$$

где

$$\kappa' = \frac{\kappa}{\beta}.$$

Применение метода перевала для $\kappa' = \frac{s}{\cos \rho'} \gg 1$, $\frac{\pi}{2} > \rho' > \rho'(s)$ (верхняя граничная кривая области определяется уравнением $s = \kappa' - \kappa'^{1/3}$), дает

$$U_1 \approx 2e^{-\beta\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi s \operatorname{tg} \rho'}} \sin \rho' \cdot \sin \left[s (\operatorname{tg} \rho' - \rho') - \frac{\pi}{4} \right], \quad (22)$$

$$U_2 \approx 2e^{-\beta\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi s \operatorname{tg} \rho'}} \cos \rho' \cdot \cos \left[s (\operatorname{tg} \rho' - \rho') - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (23)$$

Таким образом, поведение функций (20), (21) отличается лишь в фазовом отношении, однако U_2 входит в (11) с малым множителем Γ , поэтому основной вклад дает член с U_1 . Получается

$$P_{\omega r}^{IV} \approx \frac{q^2 R_0 e^{-2\kappa\Gamma} \frac{1}{R_0}}{4\pi \beta_0^2 \epsilon \kappa} \sum_s^{(IV)} \frac{U_1^2}{\left| \frac{dH_s^{(1)}(\kappa)}{d\kappa} \right|^2}. \quad (24)$$

В (24) индекс IV показывает, что сумма распространена на область IV. Используя асимптотические представления (17) и (22), имеем

$$\frac{U_1^2}{\left| \frac{dH_s^{(1)}(\kappa)}{d\kappa} \right|^2} \approx 4e^{-2s\beta\Gamma} \sin^2 \left[s (\operatorname{tg} \rho - \rho) - \frac{\pi}{4} \right] \approx 4e^{-2s\beta\Gamma}. \quad (25)$$

В (25), так как $\beta = 1$, пренебрегается различием между ρ и ρ' (где по определению $\cos \rho = \frac{s}{\kappa}$, $\cos \rho' = \frac{s\beta}{\kappa}$).

Заменяя снова суммирование по s интегрированием, с учётом (25) получим:

$$P_{\omega r}^{IV} \approx \frac{2q^2}{\pi \beta^2} \int_{\kappa_0}^{\infty} d\kappa \kappa^{-\kappa} \int_0^{\kappa} \frac{1}{\kappa} e^{-2\kappa\Gamma} \frac{1}{R_0} + 2\beta\Gamma s \, ds. \quad (26)$$

Если заменить $e^{-2\kappa\Gamma\frac{a}{R_0} + 2\beta\Gamma s} = e^{-2\kappa\Gamma\frac{a}{R_0} + 2\beta_0\Gamma\kappa\cos\rho'} \leq e^{-2\Gamma\kappa(\frac{a}{R_0} - 1)}$

(согласно рис. 2, $a > R_0$), то получаем оценку

$$P_{\approx}^{IV} < \frac{2q^2}{\pi\beta^2} \int_{\kappa_0}^{\infty} d\kappa (1 - \kappa^{-2/3}) e^{-2\Gamma(\frac{a}{R_0} - 1)\kappa} \approx \frac{q^2 \cdot e^{-2\Gamma(\frac{a}{R_0} - 1)\kappa_0}}{\pi\beta^2 \Gamma(\frac{a}{R_0} - 1)}, \quad (27)$$

$$P_{\approx}^{IV} < \frac{\gamma q^2 R_0 e^{-2(a-R_0)\frac{k\beta^2_0}{\beta\gamma}}}{\pi\beta(a-R_0)}. \quad (28)$$

Таким образом, имеет место асимптотическое увеличение потерь на излучение, пропорциональное γ . В соответствии с (28), при конечном значении γ основной вклад создают волны, более длинные, чем $\lambda \approx \frac{2\pi(a-R_0)}{\gamma}$.

II. Как было сказано ранее, для решения задачи, в которой пространственной неоднородностью является выступ на плоскости в виде полуцилиндра, достаточно добавить к полученному полю (4)-(8) поле, возбужденное симметричной противоположно заряженной нитью (рис. 2).

Обозначая соответствующие добавочные величины "падающего поля" знаком \approx с учётом граничного условия

$$[E_{\phi\omega}]_{r=R_0} = -[E_{\phi\omega}^{(0)} + E_{\phi\omega}^{(0)}]_{r=R_0}, \quad (29)$$

где $E_{\phi\omega}$ - вторичное поле, возбуждаемое обоими источниками (q и $-q$), получаем к величинам V , определенным формулой (8), добавки \tilde{V}_s , где

$$\tilde{V}_s = -\frac{qe^{-k\Gamma a}}{2\omega} \left[\frac{dH_s^{(1)}(kR_0)}{d(kR_0)} \right]^{-1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{\omega}{v}R_0\right) [I_{s-n-1}(k\Gamma R_0)(-1)^{s-n-1} \left(\frac{\omega}{v} - k\Gamma\right) - I_{s-n+1}(k\Gamma R_0)(-1)^{s-n+1} \left(\frac{\omega}{v} + k\Gamma\right)] \right\}, \quad (30)$$

откуда

$$E_{\phi\omega} = i \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (B_s + \tilde{B}_s) \frac{dH_s^{(1)}(kr)}{d(kr)} e^{is\phi} \quad (31)$$

$E_{r\omega}$ и $H_z\omega$ определяются аналогично.

Можно проверить, что при $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$, т.е. на самой плоскости, как "падающее поле" $E_{r\omega}^{(0)} + E_{r\omega}^{(0)}$, так и вторичное поле $E_{r\omega}$ тождественно обращаются в нуль при $r \geq R_0$.

Для суммарного поля, аналогично (10), имеет место

$$P_{\omega r} = \frac{c}{\pi k} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |B_s + \tilde{B}_s|^2 \quad (32)$$

Как видно из (8) и (30), в предельном случае $\gamma \rightarrow \infty$ $\tilde{B}_s = B_s$ и суммарный результат для P оказывается расходящимся с тем же порядком расходимости, что и в (28), т.е. пропорционально γ .

Окончательным выводом из приведенного расчёта является то, что при движении мимо одиночного препятствия ультрарелятивистский сгусток возбуждает излучение, интенсивность которого, вообще говоря, может расти вместе с начальной энергией самого сгустка и в том случае, когда препятствие не имеет острой кромки или ребра.

Приложение

Заменяя $J_n(x)$, $I_{q-n}(y)$ интегральными представлениями, получим (q - целое):

$$A \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) I_{q-n}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\theta + ix \sin \theta} d\theta \right) \left(\frac{e^{-i \frac{\pi}{2}(q-n)}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-l(q-n)\theta' - y \sin \theta'} d\theta' \right) \quad (1)$$

После перемены в (1) знаков суммирования и интегрирования имеем:

$$A = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}q}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' e^{ix \sin \theta - iy \sin \theta' - iq\theta'} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta + in\theta' + in\frac{\pi}{2}} \right). \quad (2)$$

Так как имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in[\theta - (\theta' + \frac{\pi}{2})]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[\theta' - (\theta - \frac{\pi}{2}) - 2\pi n], \quad (3)$$

то после интегрирования (2) по θ' с учётом того, что $-\pi \leq \theta \leq \pi$ и вклад в интеграл дадут только два члена суммы (3) (при $n = 0$ и при $n = -1$), получим:

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ix \sin \theta + y \cos \theta - iq\theta} \quad (4)$$

Л и т е р а т у р а

1. Б.М. Болотовский, Г.В. Воскресенский. УФН, 88, вып. 2, стр. 209 (1966).
2. А.И. Потехин. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. Изд. "Советское Радио", Москва, 1948 г.

Рукопись поступила в издательский отдел

29 апреля 1970 года.