P9-5033

И.А. Шелаев, С.И. Козлов, Б.А. Кленин,

ПАРАМЕТРЫ ОРБИТ ДВУХМЕТРОВОГО ИЗОХРОННОГО ЦИКЛОТРОНА ОИЯИ

Р9-5033

И.А. Шелаев, С.И. Козлов, Б.А. Кленин,

ПАРАМЕТРЫ ОРБИТ ДВУХМЕТРОВОГО ИЗОХРОННОГО ЦИКЛОТРОНА ОИЯИ

Устойчивое изохронное ускорение ионов в секторно- фокусирующем циклотроне обеспечивается при выполнении определенных требований к форме магнитного поля. Формирование поля двухметрового изохронного циклотрона [1,2] осуществлялось с помощью железных шимм и потребовало значительного объема магнитных измерений. Для создания магнитного поля, отличающегося от изохронного в пределах ± 30 э в основном диапазоне радиусов, потребовалось вести измерения в 400.000 точек. Для этого необходимо было быстро и точно измерять поле в данной точке и иметь достаточно эффективную программу математической обработки результатов измерения.

В настоящей работе приводятся результаты расчетов движения ионов в двухметровом изохронном циклотроне.

Обработка данных магнитных измерений

Разработанная в Лаборатории методика измерения магнитного поля[3] позволяла измерять топографию поля с высокой точностью (± 1 э); время измерения одной точки составляло в среднем 2,5 сек. Данные измерений значений э.д.с. Холла выводились на перфоленту с помощью телеграфного аппарата СТА-2М.

Датчик Холла, используемый для измерений поля, калибровался на стенде с помощью датчика ядерного магнитного резонанса. Экспериментальная зависимость $H = f(E_x)$ представлялась в виде полинома степени n

$$H_j = \sum_{i=0}^{n} a_i E_{x_j}^{i}, \tag{1}$$

коэффициенты которого a_i определялись методом наименьших квадратов из условий:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} \left(H_j - \sum_{i=0}^{n} a_i E_{x_j}^{i}\right)^2}{m} = \min, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{j=1}^{m} \left(H_j - \sum_{i=0}^{n} a_i E_{x_j}^{i}\right)^2 = 0. \tag{3}$$

Оптимальная степень полинома n, при которой средняя квадратичная ошибка σ^2 минимальна и составляет $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ кэ^2, равна 6 (см. таблицу 1, представляющую результат численного решения системы (3)).

Таблица 1

n	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma^2 \cdot 10^{-5}$	8,588	3,352	3,032	3,001	2,722	2,751	2,766

Значения э.д.с. Холла с перфоленты вводились в ЭВМ "Минск-22", где по формуле (1) вычислялось значение магнитного поля $H(r,\theta)$ и определялось среднее магнитное поле $H(r)$ и флаттер $F(r)$:

$$H(r) = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} H(r,\theta)\, d\theta, \tag{4}$$

$$F(r) = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{[H(r,\theta) - H(r)]^2}{H^2(r)}\, d\theta. \tag{5}$$

Информация с перфоленты накапливалась на магнитной ленте "Минск-22" и передавалась для последующей обработки на ЭВМ "БЭСМ-4", где она также записывалась на МЛ.

Дальнейшие расчеты по данным измерений проводились на машине "БЭСМ-4" по программе, блок-схема которой приведена на рис. 1. Эта программа переписывает информацию с МЛ в оперативную память машины, вычисляет $H(r,\theta)$, $H(r)$ и $F(r)$ и определяет гармоники $A_{Nn}(r)$ и их фазы $\Psi_{Nn}(r)$ фурье-разложения магнитного поля $H(r,\theta)$ по азимуту θ:

$$H(r,\theta) = H(r)\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_{Nn}(r)\cos Nn\theta + b_{Nn}(r)\sin Nn\theta]\}, \tag{6}$$

где $A_{Nn} = \sqrt{a_{Nn}^2 + b_{Nn}^2}$; $\mathrm{tg}(Nn\Psi_{Nn}) = b_{Nn}/a_{Nn}$;

$$a_{Nn} = A_{Nn}\cos Nn\Psi_{Nn}\ ;\ b_{Nn} = A_{Nn}\sin Nn\Psi_{Nn},$$

N - число элементов периодичности магнитной структуры циклотрона.

Фазовое движение

Затем для иона с заданным отношением A/Z вычислялось изохронное поле:

$$H_{из}(r) = H_0 \frac{1+\sigma(r)}{\sqrt{1-\{\frac{\omega_0}{c} r[1+\sigma(r)]\}^2}}. \tag{7}$$

Здесь H_0 - магнитное поле в центре циклотрона, ω_0 - угловая частота обращения иона,

$$\omega_0 = \frac{ZeH_0}{Amc}, \tag{8}$$

где c - скорость света, а

$$\sigma(r) \approx \frac{1}{(1-K)(N^2-1)}\left(F(r) + \frac{r}{2}\frac{dF}{dr}\right),$$
$$K(r) = \frac{r}{H(r)}\cdot\frac{dH(r)}{dr}. \tag{9}$$

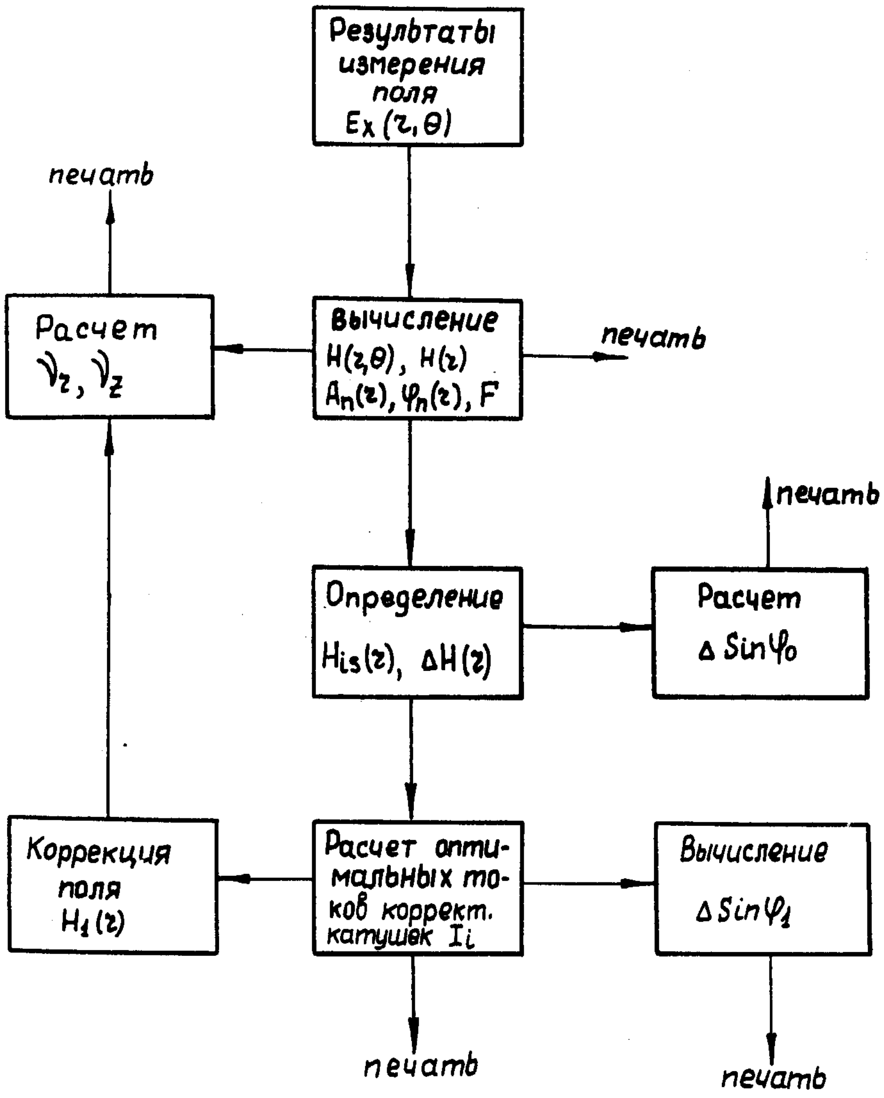

Рис.1. Блок-схема программы обработки данных магнитных измерений.

Отклонение реального среднего магнитного поля от изохронного $\Delta H(r) = H(r) - H_{из}(r)$ приводит к смещению начальной фазы иона, определяемому выражением /4/:

$$\Delta \sin\phi(r) = \sin[n\phi(r)] - \sin[n\phi(0)] =$$

$$= -\frac{2\pi n}{\epsilon_0}\int_0^r \Delta b(\rho)[1+\sigma+\rho\sigma']\rho\, d\rho, \qquad (10)$$

где $\epsilon_0 = \dfrac{\Delta E}{A m_0 c}$, ϕ_0 – начальная фаза.

Если при расчете фазового движения выполнялось условие $|\Delta \sin\phi(r)| + a > 1$, где a – заранее выбранное число меньшее 1, то значение уровня поля в центре изменялось на некоторую величину δH и снова вычислялись $H(r)$, $\Delta H(r)$, $\Delta \sin\phi(r)$ и т.д.

После ряда подобных итераций определялись поле в центре H_0 и частота ω_0, удовлетворяющие указанным выше условиям ($a = 0{,}5$; $\delta H = 5$ э), а также разность между реальным и изохронным полями $\Delta H(r)$.

Расчеты фазового движения ионов в двухметровом изохронном циклотроне показали /2/, что магнитная структура циклотрона обеспечивает изохронное ускорение ионов в диапазоне отношений $A/Z = 2{,}8 \div 4$.

Далее в ЭВМ вводится массив экспериментально определенных распределений среднего магнитного поля $\phi_i(r)$ в (э/а) от каждой i-ой кольцевой корректирующей катушки. Значения токов в катушках I_i, при которых $\Delta H(r)$ компенсируется до минимальной величины, определялись м.н.к. в предположении, что $\phi_i(r)$ не зависит от величин I_i и $H(r)$ и вновь вычислялся $\Delta \sin\phi(r)$.

Расчет частот бетатронных колебаний

Частоты радиальных ν_r и вертикальных ν_z колебаний вычислялись по аналитическим выражениям /5,6/. Ввиду громоздкости этих выражений здесь приводятся только их функциональные зависимости:

Таблица 2

R [см]	I0	20	30	40	50	60	70	80	90
A_4 [кэ]	4,932	6,633	6,709	6,640	6,474	6,293	6,I22	5,930	5,674
A_8	I,256	I,87I	I,806	I,478	I,093	0,743	0,590	0,723	0,406
A_{12}	0,227	0,896	I,342	I,688	I,950	2,I09	2,I88	2,I89	2,230
A_{16}	0,033	0,858	I,II5	I,094	0,943	0,708	0,628	0,766	0,423
A_{20}	0,080	0,409	0,224	0,520	0,796	I,055	I,I52	I,I75	I,288
A_{24}	0,042	0,327	0,590	0,686	0,705	0,558	0,540	0,687	0,38I
A_{28}	0,038	0,I24	0,097	0,II9	0,500	0,588	0,667	0,679	0,82I
A_{32}	0,040	0,090	0,090	0,095	0,I09	0,444	0,432	0,4I8	0,323

$$\nu_r^2 = f_1(K, K', K'', A_{Nn}, A'_{Nn}, A''_{Nn});$$

$$\nu_z^2 = f_2(K, K', K'', A_{Nn}, A'_{Nn}, A''_{Nn}); \qquad (11)$$

где

$$K' = \frac{R^2}{H(r)} \cdot \frac{d^2 H(r)}{dr^2}\Big|_{r=R}; \quad K'' = \frac{R^3}{H(r)} \cdot \frac{d^3 H(r)}{dr^3}\Big|_{r=R};$$

$$A'_{Nn} = R\,\frac{dA_{Nn}}{dr}; \quad A''_{Nn} = R^2\,\frac{d^2 A_{Nn}}{dr^2}.$$

Точность определения значений ν_r и ν_z существенно зависит от числа используемых гармоник фурье-разложения и производных среднего магнитного поля по радиусу.

В таблице 2 приведены величины амплитуд гармоник $A_{Nn}(R)$ для одного из вариантов магнитного поля. Из таблицы видно, что значения $A_{Nn}(R)$ относительно медленно уменьшаются с увеличением их номера.

Расчет значений ν_r и ν_z проводился по формулам:

1) $\nu_r^2 = 1 + K$; $\nu_z^2 = -K + F$; (12)

(так называемое "гладкое" приближение);

2) (11) с учетом трех гармоник и первой производной среднего магнитного поля;

3) (11) с учетом трех гармоник и первых трех производных среднего магнитного поля и двух производных гармоник;

4) (11) с использованием пяти гармоник и тех же производных.

Результаты расчетов ν_r и ν_z приведены в таблице 3.

Таблица 3

	R (см)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
I	ν_r	I,00453	0,99949	I,00000	I,00025	I,00500	I,00449	I,00698	I,00993	0,98637
	ν_z	0,I5978	0,25008	0,25390	0,24859	0,2254I	0,22056	0,20248	0,I79I9	0,27505
2	ν_r	I,00770	I,00857	I,00767	I,00747	I,0I220	I,0I095	I,0I299	I,0I624	0,725I8
	ν_z	0,I7377	0,25554	0,25803	0,25206	0,22873	0,22466	0,20668	0,I7942	0,724I8
3	ν_r	I,00740	I,00830	I,00740	I,00860	I,0II90	I,0I080	I,0I978	I,0I623	0,85I58
	ν_z	0,I7580	0,2565I	0,25980	0,25583	0,23II9	0,22483	0,22420	0,I8230	0,72676
4	ν_r	I,00738	I,0083I	I,00738	I,00863	I,0II95	I,0I087	I,0I975	I,0I630	0,85I4I
	ν_z	0,I76I0	0,25828	0,26304	0,25965	0,23537	0,22543	0,229I4	0,I886I	0,72830

Интегрирование уравнений движения

Полученные по аналитическим выражениям /5,6/ параметры равновесной орбиты (р.о.) и частоты бетатронных колебаний сравнивались затем с результатами численного интегрирования /7,8/.

Радиус $r(\theta)$ траектории иона и угол $a(\theta)$ между касательными к траектории и окружности того же радиуса находились интегрированием уравнений движений /7/ методом Рунге-Кутта с шагом по θ, равным $1{,}875^\circ$. В первом приближении начальное значение $r(0)$ вычислялось по аналитической формуле /6/, а $a(0)$ принималось равным нулю. Если после интегрирования на элементе периодичности магнитной структуры удовлетворялись условия:

$$|r(\tfrac{\pi}{2})-r(0)|\le\delta_r\ ,\quad |a(\tfrac{\pi}{2})-a(0)|\le\delta_a\ ,$$

где значение $\delta=\delta_r=\delta_a$ принималось равным 10^{-8}, то р.о. считалось найденной. В противном случае начальные значения $r(0)$ и $a(0)$ корректировались по алгоритму /8/ и процесс интегрирования повторялся.

Результаты этих расчетов в зависимости от номера приближения N для R = 54,84 см приведены в таблице 4. На рисунке 2 представлена р.о. (для R = 68 см), полученная численным интегрированием и по аналитической формуле (для 3 гармоник Фурье-разложения).

Частоты ν_r и ν_z определялись интегрированием уравнений /7/, содержащих радиус $r(\theta)$ и угол $a(\theta)$ р.о. в качестве параметров.

Численные значения частот, полученные интегрированием и по аналитическим формулам (3 гармоники разложения), приводятся в таблице 5. Из таблицы видно, что аналитические формулы дают достаточно точные значения частот при сравнительно небольшом числе гармоник.

Исследование устойчивости движения ионов с помощью фазовых графиков

Для расчета фазовых графиков /9/ использовались те же самые уравнения и процесс интегрирования, что и для р.о. Положение частицы

Таблица 4

R[см]	N	r(0) [см]	$r(\frac{\pi}{2})$ [см]	δ_r [см]	$\alpha(0)$ [рад]	$\alpha(\frac{\pi}{2})$ [рад]	δ_α [рад]	Время счета t /сек/
54	I	54,960038	54,929372	$3,07\cdot 10^{-2}$	0	$-,17359172\cdot 10^{-2}$	$1,7\cdot 10^{-3}$	I0
	2	54,894193	54,886741	$7,40\cdot 10^{-3}$	$-,60522613\cdot 10^{-3}$	$-,82962338\cdot 10^{-3}$	$2,2\cdot 10^{-4}$	40
	3	54,883950	54,883825	$2,50\cdot 10^{-5}$	$-,65501645\cdot 10^{-3}$	$-,65653141\cdot 10^{-3}$	$1,5\cdot 10^{-6}$	40
	4	54,883844	54,883844	$\leq 10^{-7}$	$-,65472639\cdot 10^{-3}$	$-,6547469\cdot 10^{-3}$	$2,0\cdot 10^{-9}$	40
	5	54,883844	54,883844	$\leq 10^{-8}$	$-,65472543\cdot 10^{-3}$	$-,65472538\cdot 10^{-3}$	$5,0\cdot 10^{-11}$	40
84	I	85,449292	85,650126	$2,0\cdot 10^{-1}$	0	$-,28616877\cdot 10^{-2}$	$2,9\cdot 10^{-3}$	I0
	2	85,436772	85,433637	$3,0\cdot 10^{-3}$	$-,25319768\cdot 10^{-2}$	$-,25412858\cdot 10^{-2}$	$9,0\cdot 10^{-6}$	40
	3	85,434785	85,434780	$5,0\cdot 10^{-6}$	$-,25193481\cdot 10^{-2}$	$-,25192944\cdot 10^{-2}$	$5,0\cdot 10^{-2}$	40
	4	85,434785	85,434785	$\leq 10^{-8}$	$-,25192954\cdot 10^{-2}$	$-,25192955\cdot 10^{-2}$	$1,0\cdot 10^{-10}$	40

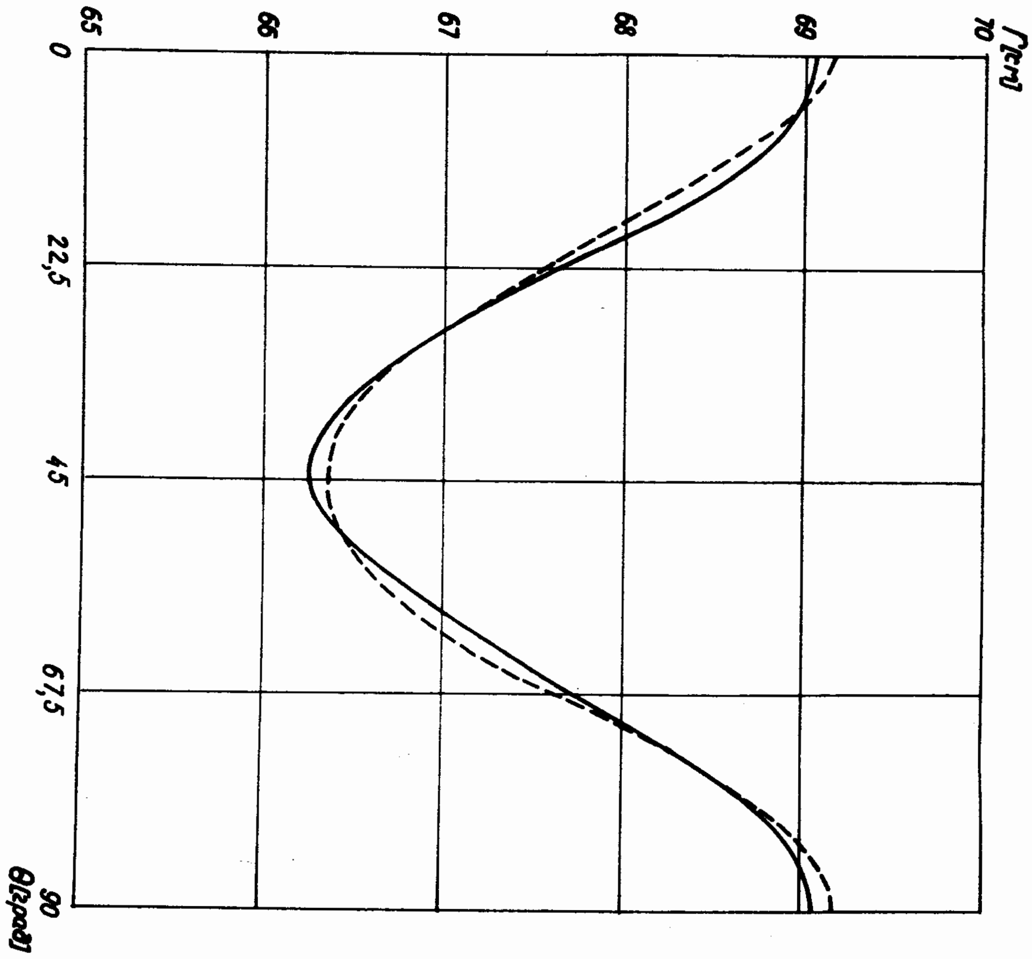

Рис.2. Равновесная орбита иона O^{+5}_{16} с энергией E = 138 Мэв. ——— - результаты численного интегрирования, - - - - - результаты расчета по аналитической формуле.

Таблица 5

	R [см]	6	8	I0	20	30	40	50	60	70	80	90
I	ν_r	0,99766	I,00344	I,0069	I,0083	I,0062	I,0I0I	I,0I09	I,0I08	I,02I0	I,0I62	0,7I43
	ν_z	0,II735	0,I3635	0,I8025	0,25I98	0,26453	0,24997	0,23II9	0,22483	0,I8045	0,I823	0,63929
2	ν_r	0,996I7	I,00494	I,0I203	I,0I02	I,007I	I,0096	I,0075	I,0096	I,0I8I8	I,0I86	0,8I3637
	ν_z	0,I4393	0,I7205	0,I8542	0,2523	0,2665	0,2507	0,2549I	0,23923	0,I8643	0,2I50	0,630I8

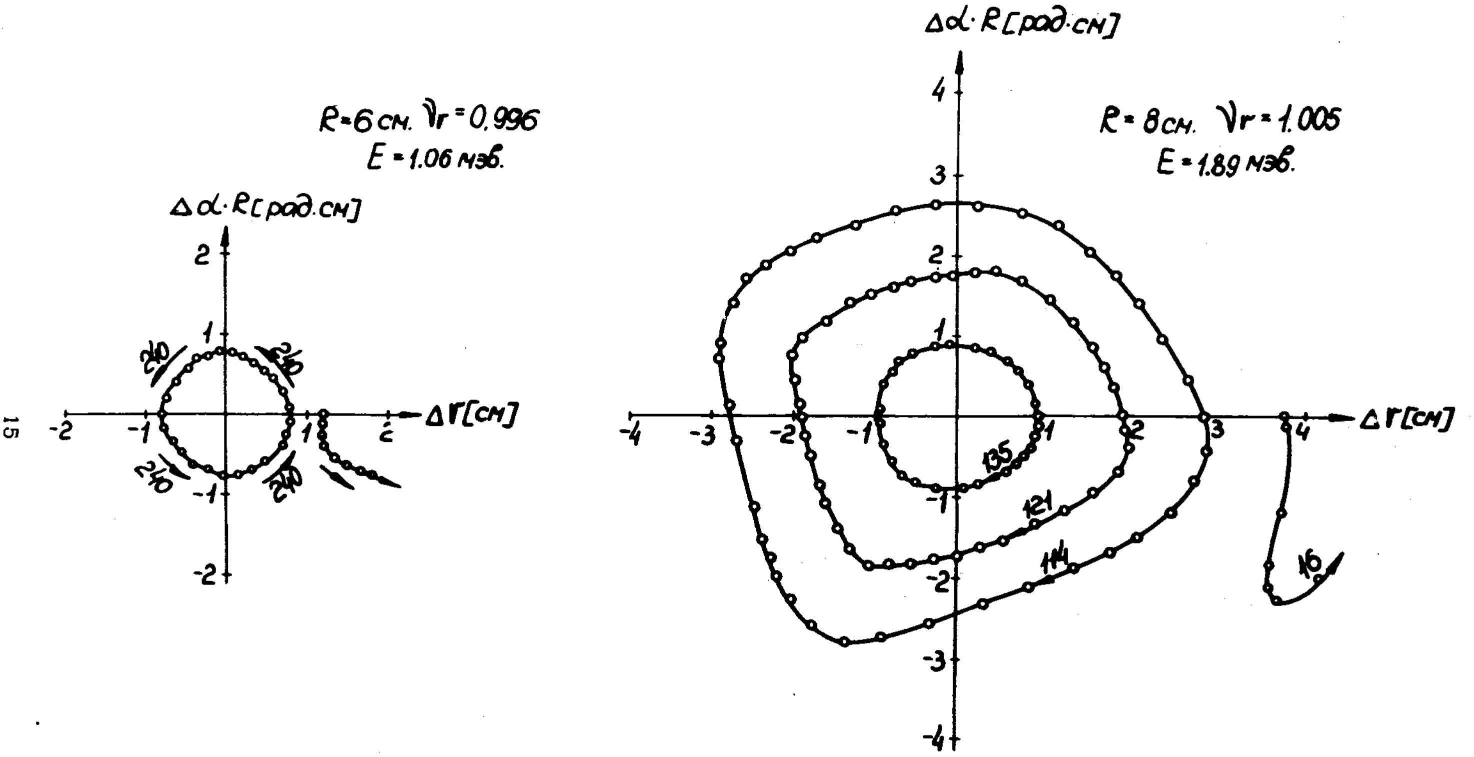

Рис.3. Фазовые графики для иона O^{+5}_{16} с энергией E = 1,06; 1,89 Мэв. Точки на графиках – координаты орбиты иона при равных числах оборотов, стрелки – направление движения иона, цифры – числа оборотов иона по кривой.

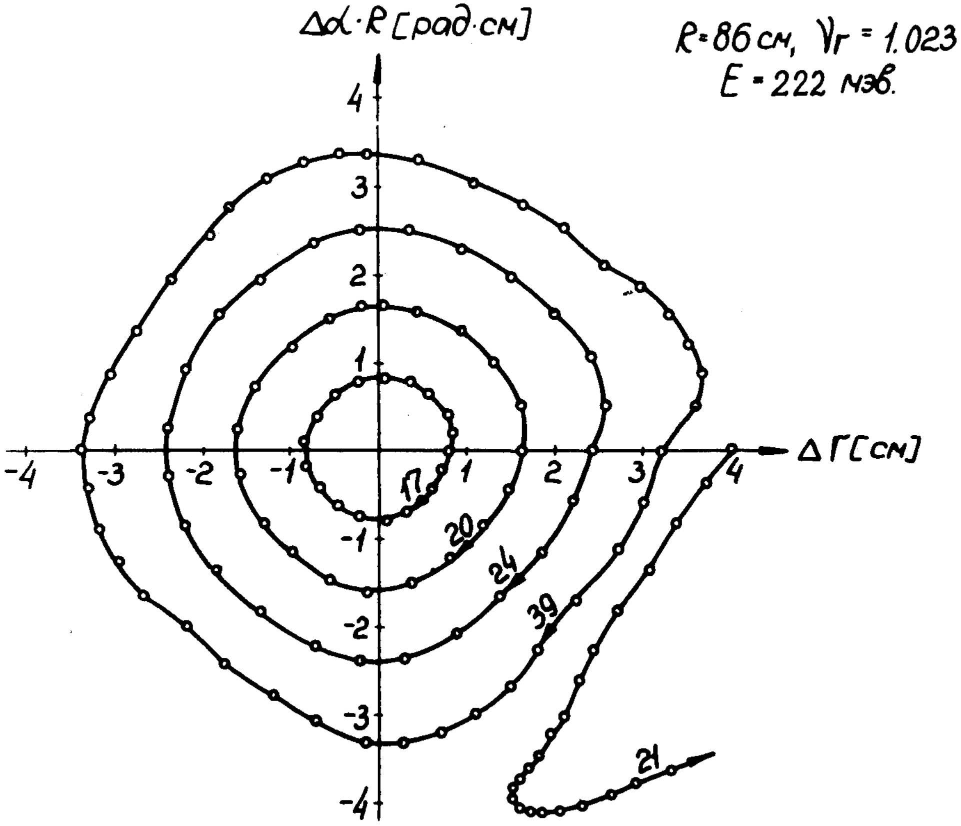

Рис.4. Фазовый график для E = 222 Мэв. Величина предельной стабильной амплитуды радиальных колебаний для E = 2÷220 Мэв составляет 4÷5 см.

определяется в фазовой плоскости, где по осям абсцисс и ординат откладываются соответственно отклонения от р.о. Δr и $R \cdot \Delta a$, а р.о. изображается точкой в начале координат. Начальные отклонения $\Delta r(0)$ задавались произвольно при $\Delta a(0)$, равном нулю.

На рисунках 3,4 представлен ряд фазовых графиков для различных радиусов R; скорость счета графиков на ЭВМ БЭСМ-4 составляла 10 об/мин.

Характерным свойством фазовых графиков является их разделение на две области. Имеется центральная область стабильности, в которой орбиты частиц находятся вблизи р.о. Кроме того существуют внешние области нестабильности, где частицы смещаются относительно р.о. в направлении одного из четырех секторов. Из графиков для R = 6 и 8 см видно, что при переходе через резонанс ($\nu_r = 1$) изменяется направление движения частиц. Это свидетельствует о том, что орбиты меняют направление своего смещения относительно центра циклотрона. Из этих графиков можно оценить максимальную амплитуду стабильных радиальных колебаний при различных энергиях.

Проведенный численный анализ параметров равновесных орбит и фазового движения показывает, что сформированное магнитное поле циклотрона У-200 обеспечивает устойчивое и изохронное ускорение заданного набора ионов.

Литература

1. *И.А. Шелаев и др. Препринт ОИЯИ 9-3988, Дубна, 1968.*
2. *И.А. Шелаев и др. Препринт ОИЯИ 9-4233, Дубна 1968.*
3. *Э.Г. Имаев и др. Препринт ОИЯИ 9-3713, Дубна 1968.*
4. *A.A. Garren. Nucl. Instr. and Meth. 18, 19, 309 (1 962).*
5. *O. Smith, A.A. Garren. Report UCRL-8598, 1959.*
6. *Ю.Г. Басаргин, В.П. Белов. Сб. "Электрофизическая аппаратура", вып. 3, М., Атомиздат, 1965, стр. 3.*
7. *Ю.Г. Басаргин, Р.Н. Литуновский. Сб. "Электрофизическая аппаратура", вып. 5, М., Атомиздат, 1966, стр. 135.*

8. T.A.Welton. Sector-Focused cyclotron.
Proceeding of Conference at Sea Istand, 1959, p. 48.
9. D.J.Clark et al. Nucl. Instr. and Meth., 18, 19, 1 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 апреля 1970 года.