

5013

Экз. ЧИТ. 3.

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 5013



С.Б. Ворожцов, Л.Т. Закамская, Н.Л. Заплатин

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕРЕГУЛЯРНОЙ  
ТРЕУГОЛЬНОЙ КООРДИНАТНОЙ СЕТКИ .

1970

P9 - 5013

С.Б. Ворожцов, Л.Т. Закамская, Н.Л. Заплатин

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕРЕГУЛЯРНОЙ  
ТРЕУГОЛЬНОЙ КООРДИНАТНОЙ СЕТКИ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

## В в е д е н и е

При создании магнитных полей ускорителей и элементов ионооптических систем приходится рассчитывать магнитные поля ферромагнитных элементов сложной конфигурации. В последнее время достигнут значительных прогресс в методах расчёта распределений магнитных полей, зависящих от двух пространственных переменных. Опубликованы работы по описанию ряда программ для ЭВМ, применяемых при численных расчётах полей методом конечных разностей/1-4, 11-16/. Отличительными чертами этих программ являются:

- а) использование при вычислениях реальной характеристики ферромагнетика  $\mu(B)$  ( $\mu$  - проницаемость,  $B$  - индукция магнитного поля);
- б) возможность наложения различного типа координатных сеток на область поля;
- в) применение релаксационного метода при получении конечноразностного решения в узлах сеток.

Выбранный тип сетки в значительной степени определяет методику вычислений и класс решаемых задач.

Наилучшие результаты дают **SIBYL** и **TRIM** - методы, названные в соответствии с программами для ЭВМ. В программах типа **SIBYL** используется прямоугольная или квадратная регулярные сетки, причем линии внутренних или внешних границ задачи могут не совпадать с линиями сетки. Такие программы характеризуются тем, что решение в ли-

нейной ( $\mu = \text{const}$ ) и нелинейной ( $\mu = \mu(B)$ ) областях находятся отдельно, а затем удовлетворяются условия сопряжения на внутренних границах. Для наилучшей аппроксимации условий сопряжения на внутренних границах в линейной области рассматривается уравнение относительно модифицированного скалярного потенциала. Перечисленные особенности программ определяют ограничения на геометрию рассчитываемых полей. Например, для программы SIBYL имеются следующие ограничения/1/:

- 1) расчёт возможен только для С и Н магнитов;
- 2) допускается наличие лишь двух областей (линейной и нелинейной);
- 3) число прямоугольных областей с током не больше 40;
- 4) полюсный наконечник должен иметь выпуклую форму;
- 5) внешняя граница - обязательно прямоугольник;
- 6) обязательно наличие симметрии относительно медианной плоскости.

Отмечается, что SIBYL - длинная программа со сложной системой кодировки информации и множеством формул для особых точек. Игнорирование особенностей программы приводит к получению неверных результатов.

Программа TRIM /2,3,4/ является более общей, чем SIBYL, и решает такие задачи, для которых SIBYL не может быть использована. В программах типа TRIM используются нерегулярные сетки, причем внутренние и внешние границы области лежат на линиях сетки. Этим сразу облегчается аппроксимация условий сопряжения на внутренних границах. В программах типа TRIM используется только векторный потенциал, и задача может решаться как для всей области поля, так и ее частей.

Особенности программы TRIM следующие:

- 1) нет никаких ограничений на форму магнита, катушек и т.д.;
- 2) допускается наличие нескольких областей тока, железа, воздуха;
- 3) внутри железа могут быть области с различными магнитными характеристиками  $\mu(B)$ , в том числе пустоты и токи;

4) плотность тока может иметь любое пространственное распределение;

5) поле может иметь как несимметричную, так и симметричную геометрию с одной или двумя плоскостями симметрии;

6) программа может использоваться для расчёта полей с аксиальной симметрией.

При работе TRIM требуется большой объем оперативной памяти ЭВМ, т.к. программа использует нерегулярную сетку и является более универсальной, чем SIBYL. Поэтому допустимое число узлов в программе при той же оперативной памяти меньше, чем у программ типа SIBYL. Вследствие этого программа обладает меньшей разрешающей способностью для расчёта магнитных элементов тонкой структуры. Однако этот недостаток в некоторой степени компенсируется тем, что в области, представляющей наибольший интерес, можно располагать относительно большое число узлов благодаря нерегулярности сетки.

Программа применяется для расчёта квадрупольных, секступольных магнитов, а также магнитов для пузырьковых камер.

В тех случаях, когда рассчитанная нерегулярная треугольная сетка не удовлетворяет некоторым необходимым условиям, возможны значительные погрешности в дальнейшем решении задачи. Поэтому возникает необходимость в повторном расчёте координат сетки. Процесс многократного генерирования сетки упрощается благодаря применению специальных подпрограмм и осциллографа со световым карандашом/5/.

При составлении программы расчёта магнитных полей нами было отдано предпочтение TRIM -методу. К началу работы над программой было известно, что программа TRIM написана на языке FAP для IBM 7094/6/. (Позднее стало известно, что существует вариант FRIM на FORTRAN IV для CDC-6600/3/). Поэтому возникла необходимость написать программу для ЭВМ ОИЯИ. В настоящее время составлены программы на Алголе для ЭВМ СЭС-1604А и на Фортране для ЭВМ БЭСМ-6.

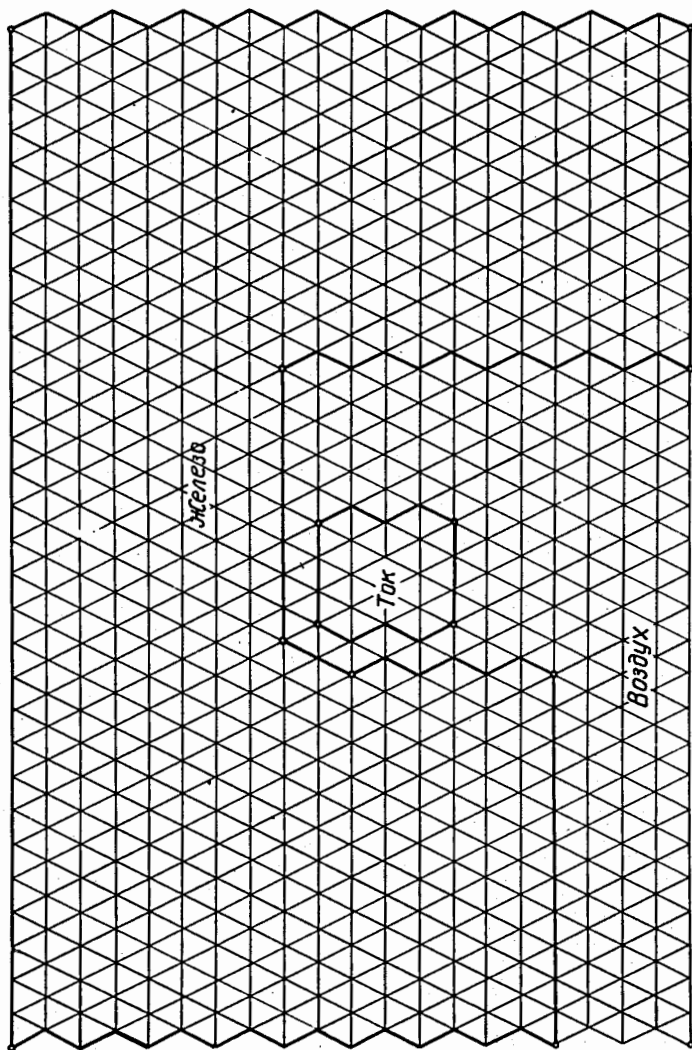


Рис. 1 Логическая диаграмма СП-57

## Постановка задачи

Задача сводится к решению нелинейного эллиптического уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -0,4 \pi j(x, y), \quad (1)$$

где  $u - z$  - компонента векторного потенциала магнитного поля,  $x, y, z$  - декартовы координаты (см);  $j$  - плотность тока, протекающего в  $z$  - направлении ( $\text{а/см}^2$ );  $\mu = \mu(|\text{grad}(u)|)$  - магнитная проницаемость ферромагнитной среды.

Уравнение (1) решается при краевых условиях:

а)  $u = 0$  на внешней границе, (2)

б)  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$  на медианной плоскости поля, где  $\vec{n}$  - вектор нормали.

На внутренних границах должны быть выполнены условия сопряжения:

а)  $(\vec{i} \cdot \text{grad}(u))$  - непрерывно,

б)  $\frac{1}{\mu} \cdot (\vec{n} \cdot \text{grad}(u))$  - непрерывно. (3)

Для случая аксиально-симметричного поля уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial(ru)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\mu r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right] = -0,4 \pi j(r, z), \quad (4)$$

где  $u$  и  $j - \phi$  - компоненты потенциала и плотности тока соответственно.

Граничные условия в этом случае следующие:

а)  $ru \approx ar^2$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $a = \text{const}(r)$ ,

б)  $ru = 0$  на внешних границах, (5)

в)  $\frac{\partial(ru)}{\partial \vec{n}} = 0$  на медианной плоскости.

Условия сопряжения:

а)  $(\vec{i} \cdot \text{grad}(ru))$  - непрерывно,

б)  $\frac{1}{\mu r} (\vec{n} \cdot \text{grad}(ru))$  - непрерывно. (6)



## Генератор сетки

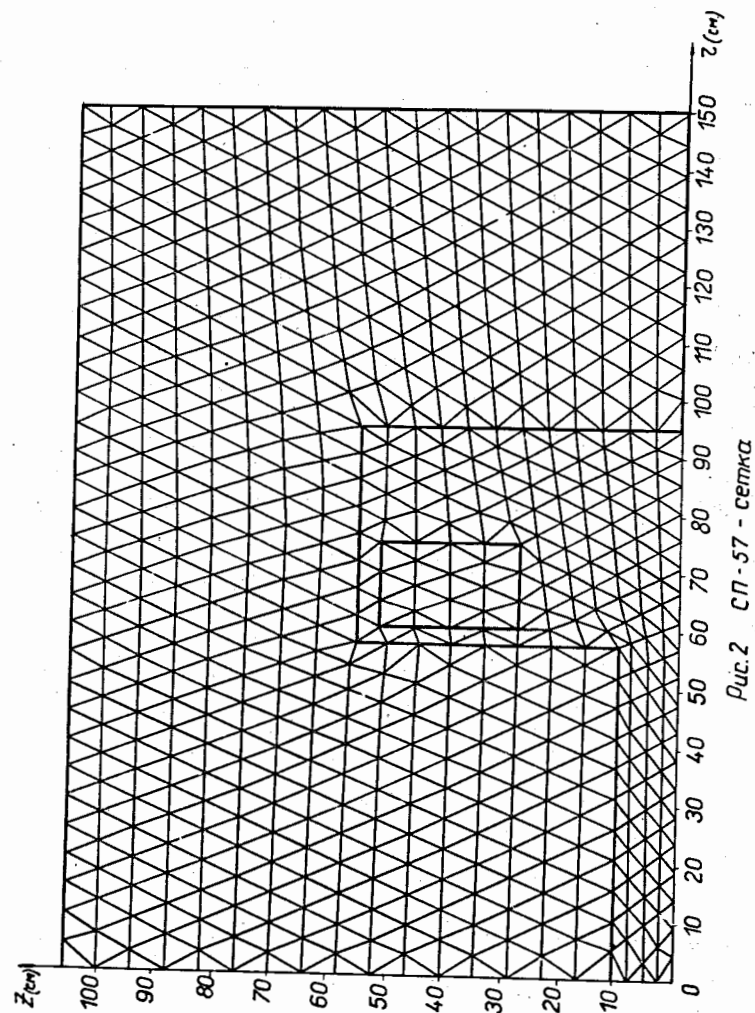
Для решения (1) в конечно-разностном виде необходимо построение такой нерегулярной треугольной сетки, чтобы внутренние и внешние границы лежали на ее координатных линиях. Пример такой сетки приведен на рис. 2, где изображен 1-й квадрант конфигурации магнита СП-57/7/. Построение сетки, т.е. нахождение координат узлов  $(r, z)$ , выполняется по алгоритму А.М. Winslow /2/ следующим образом.

Составляется логическая диаграмма задачи (рис. 1), которая представляет собой квазипрямоугольник регулярной треугольной сетки (число узлов на каждой горизонтальной линии одинаково). В пределах логической диаграммы с помощью горизонтальных, наклонных и зигзагообразных линий выделяются одна или несколько следующих областей: тока, железа, воздуха и область с повышенной плотностью узлов. Таким образом, определяется желательное количество узлов в каждой из областей.

Выделение областей осуществляется заданием целочисленных координат опорных узлов с указанием типа соединения между ними. Кроме того, опорным узлам приписываются координаты тех точек реальной конфигурации (рис. 2), в которые должны перейти данные узлы при взаимнооднозначном преобразовании пространства логической диаграммы (рис. 1) в пространство реальной геометрии (рис. 2). В реальной геометрии последовательные опорные узлы всегда соединяются отрезками прямых. На основании этой информации с помощью линейной интерполяции задаются граничные значения на внутренних и внешних границах для функций  $r, z$  (рис. 2) и решается задача Дирихле сначала для приближенного линейного уравнения Лапласа, а затем для точного нелинейного уравнения методом оптимальной верхней релаксации/8/.

Помимо построения сетки первая часть программы - "генератор сетки" - накапливает относительно каждого треугольника разбиения следующую информацию:

- а) значение  $\mu(r, z)$ ,
- б) значение  $j(r, z)$ .



Эти значения вычисляются на основании отнесения всех узлов к той или иной области. Граничные узлы областей известны из исходных данных задачи.

Для выделения внутренних точек данной области путем присвоения им определенных значений условных чисел применяется процедура, описанная в работе/8/. Она заключается в следующем. Задаются координаты "стартовой" точки, наверняка являющейся внутренней по отношению к данной области. Точка помечается условным числом и осуществляется переход в непомеченную соседнюю и т.д. Процесс заканчивается, когда все соседи данной точки - либо помеченные, либо граничные узлы. Так определяются все внутренние точки.

После работы "генератора сетки" печатаются координаты узлов разбиения, начальные значения  $u$  и  $\mu$  в треугольниках, а также информация о плотности тока, приписанной каждому треугольнику. Полученная сетка представляется в графической форме на графопостроителе фирмы 'CALCOMP' ЭВМ БЭСМ-6. Числовая информация для работы 2-й части программы запоминается на магнитной ленте.

### Релаксационная программа

После аппроксимации уравнения (1) конечно-разностными уравнениями возникает необходимость вычислять в каждой точке сетки значение потенциала по следующему выражению (см. рис. 3):

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\omega^n}{\sum_{i=1}^6 w_i^n} \left[ \sum_{i=1}^6 w_i^n (u_i^{n,n+1} - u^n) + S \right], \quad (7)$$

где  $n$  - номер итерации,  $\omega^n$  - фактор верхней релаксации на  $n$ -ной итерации,  $S$  - функция источников,

$$S = \frac{4}{3} \pi \sum_{i=1}^6 j_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} q_{i+\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

где  $j_{i+\frac{1}{2}}$  - плотность тока в  $i$ -том треугольнике,  $q_{i+\frac{1}{2}}$  - площадь треугольника,  $w_i$  - коэффициент связи (рис. 4),

$$w_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \operatorname{ctg} \theta_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\mu_{i-\frac{1}{2}}} \operatorname{ctg} \theta_{i-\frac{1}{2}} \right). \quad (9)$$

Для точек, расположенных на медианной плоскости (рис. 5), происходит вычисление по (7), (8), (9) при условии, что

$$\mu_{4+\frac{1}{2}} = \mu_{5+\frac{1}{2}} = \mu_{6+\frac{1}{2}} = \infty.$$

Если заранее неизвестен оптимальный фактор релаксации  $\omega_{\text{opt}}$ , то приближение к нему для линейной области происходит следующим образом:

$$\omega^1 = 1,375.$$

Через каждые 10 итераций вычисляются:

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^a |u_i^n - u_i^{n-1}|,$$

$$\Delta_{n+1} = \sum_{i=1}^a |u_i^{n+1} - u_i^n|,$$

$$\eta^n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n},$$

(10)

где  $a$  - число узлов задачи.

$$\text{При } |\eta^n| < 1 \text{ имеем: } \lambda^n = \frac{\omega^n + \eta^n - 1}{\omega^n \sqrt{\eta^n}},$$

$$\omega_{\text{opt}}^n = \frac{2}{1 + [1 - (\lambda^n)^2]^{1/2}} - 0,01,$$

$$\omega^{n+1} = 0,05 \cdot \omega_{\text{opt}}^n + 0,95 \omega^n.$$

Иначе -  $\omega^{n+1} = \omega^n$ .

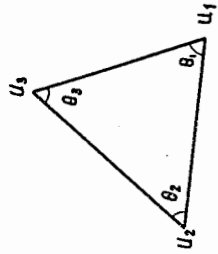


Рис. 5

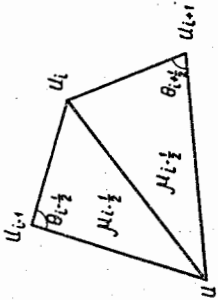


Рис. 4

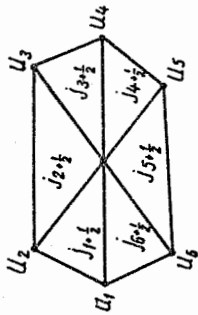


Рис. 3

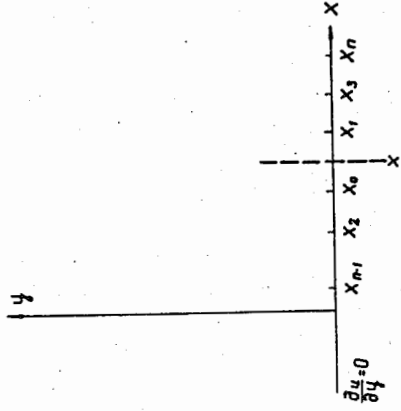


Рис. 7

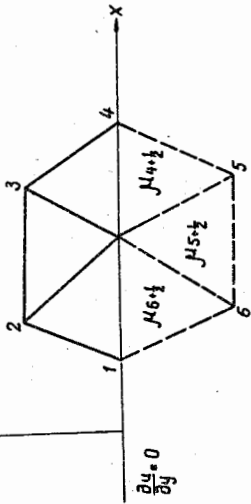


Рис. 6

Показатель сходимости процесса вычисляется из следующего выражения:

$$e^{n+1} = \frac{\Delta_{n+1}}{\sum_{i=1}^n |u_i^{n+1}|} \quad (11)$$

При  $e^{n+1} \leq \epsilon_0 = 10^{-6} \div 10^{-7}$  считается, что расчёт закончен.

Кривые изменения величины  $\omega = \omega(n)$  и  $e = e(n)$  для расчёта геометрии поля магнита, показанной на рис. 2, приведены на рис. 15. Наблюдается быстрое уменьшение величины  $e$  при достижении оптимального фактора релаксации, равного в данном случае  $\omega_{opt} = 1,98$ .

Для стабилизации процесса вычислений принимается, что в нелинейной области  $\omega^n = const (n) = 1,2$ . После проведения очередной итерации пересчитываются значения проницаемости во всех треугольниках, принадлежащих нелинейной области, по следующей формуле:

$$\frac{1}{\mu^{n+1}} = \frac{1}{\mu^n} + 0,1 \left( \frac{1}{\mu^{нов.}} - \frac{1}{\mu^n} \right), \quad (12)$$

где  $\mu^{нов.} = f(|\nabla u|)$  определяется по  $|\nabla u|$  из таблицы для данного ферромагнетика. Вычисление  $|\nabla u|$  для треугольника (рис. 5) ведётся по формуле:

$$(\nabla u)^2 = \frac{1}{4q^2} \sum_{i=1}^3 u_i^2 S_i^2 - \frac{1}{q} (u_1 u_2 \text{ctg} \theta_3 + u_2 u_3 \text{ctg} \theta_1 + u_3 u_1 \text{ctg} \theta_2), \quad (13)$$

где  $q$  - площадь треугольника,  $S_i$  - длины его сторон,  $\theta_i$  - углы, противолежащие соответствующим сторонам,  $u_i$  - значения потенциала в вершинах.

Вычисление индукции магнитного поля на медианной плоскости выполняется по следующим формулам [9]:

$$B_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=0}^n u(x_k) \omega'_k(x), \quad (14)$$



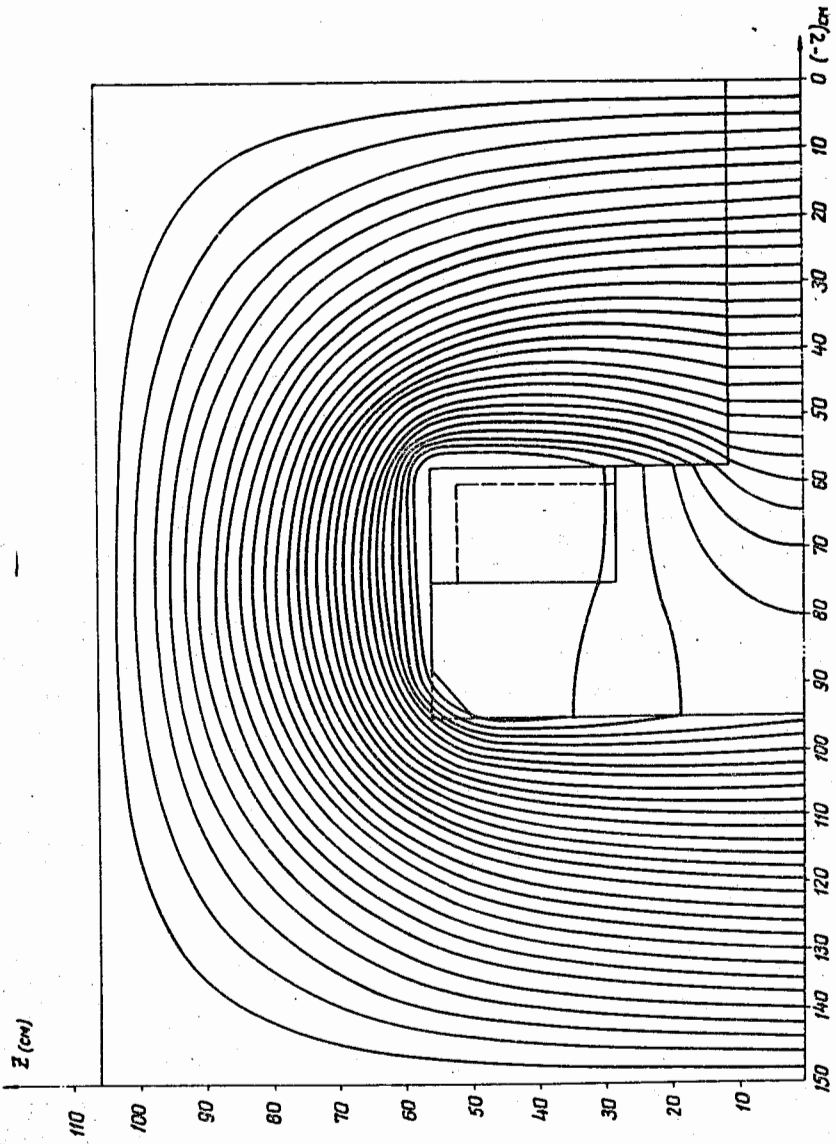


Рис. 8 Расчет СП-57  $ЭМ = 4,9 \cdot 10^4 \text{ аб}$

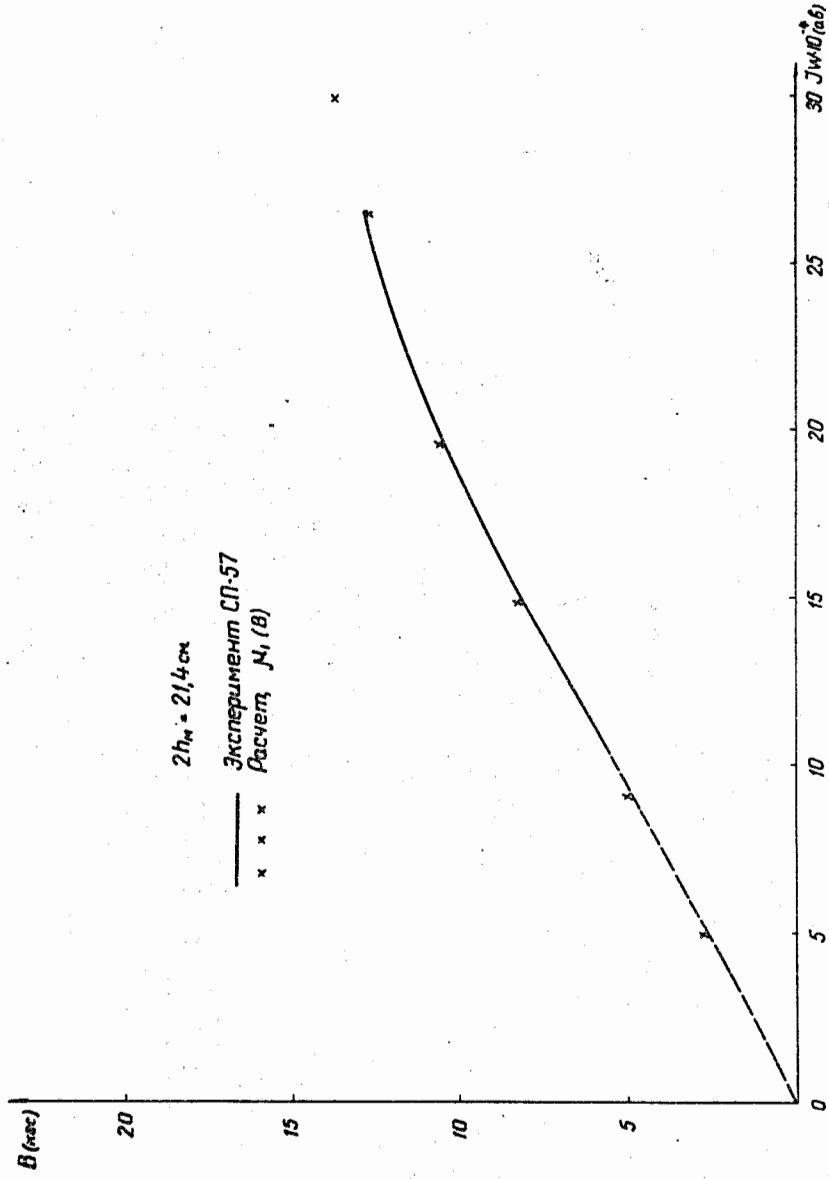


Рис. 9

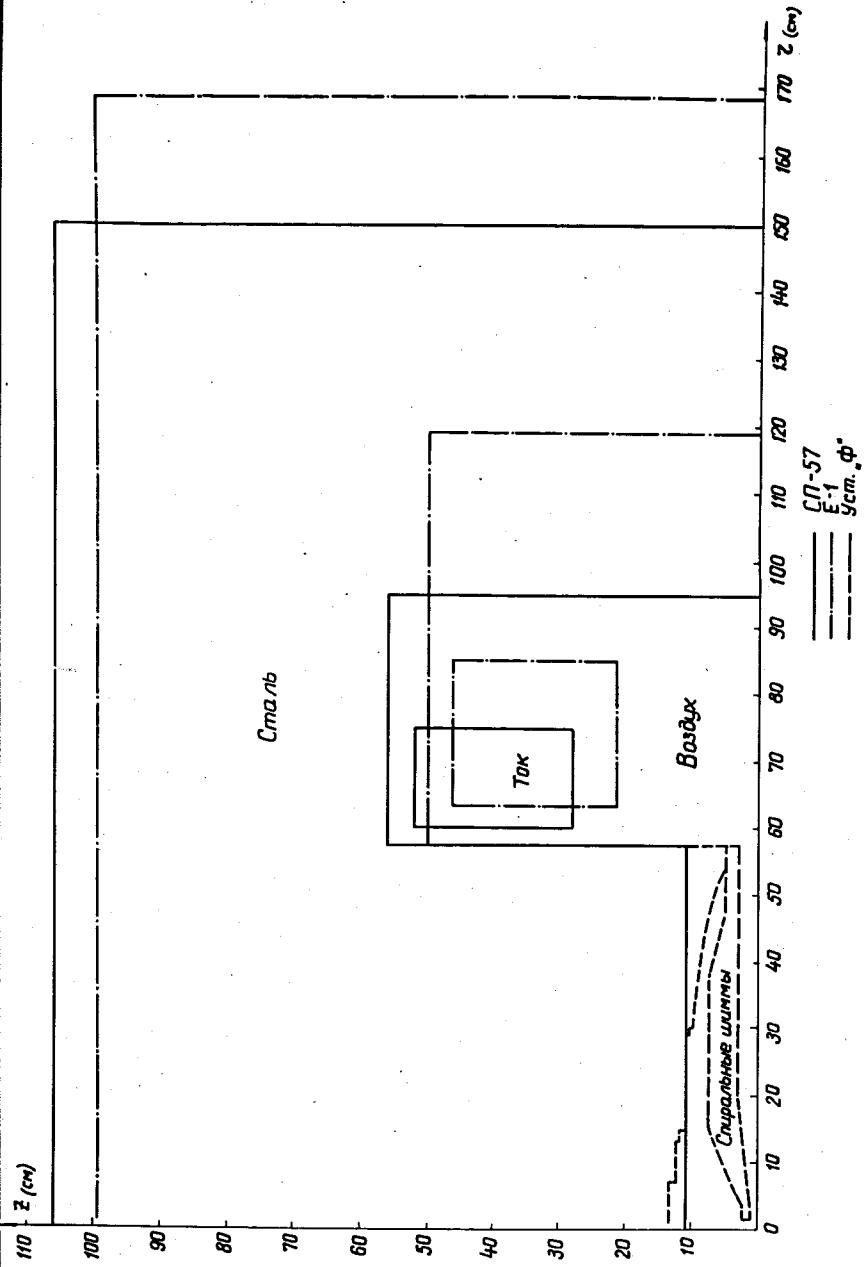


Рис. 10 1<sup>й</sup> квадрант магнита.

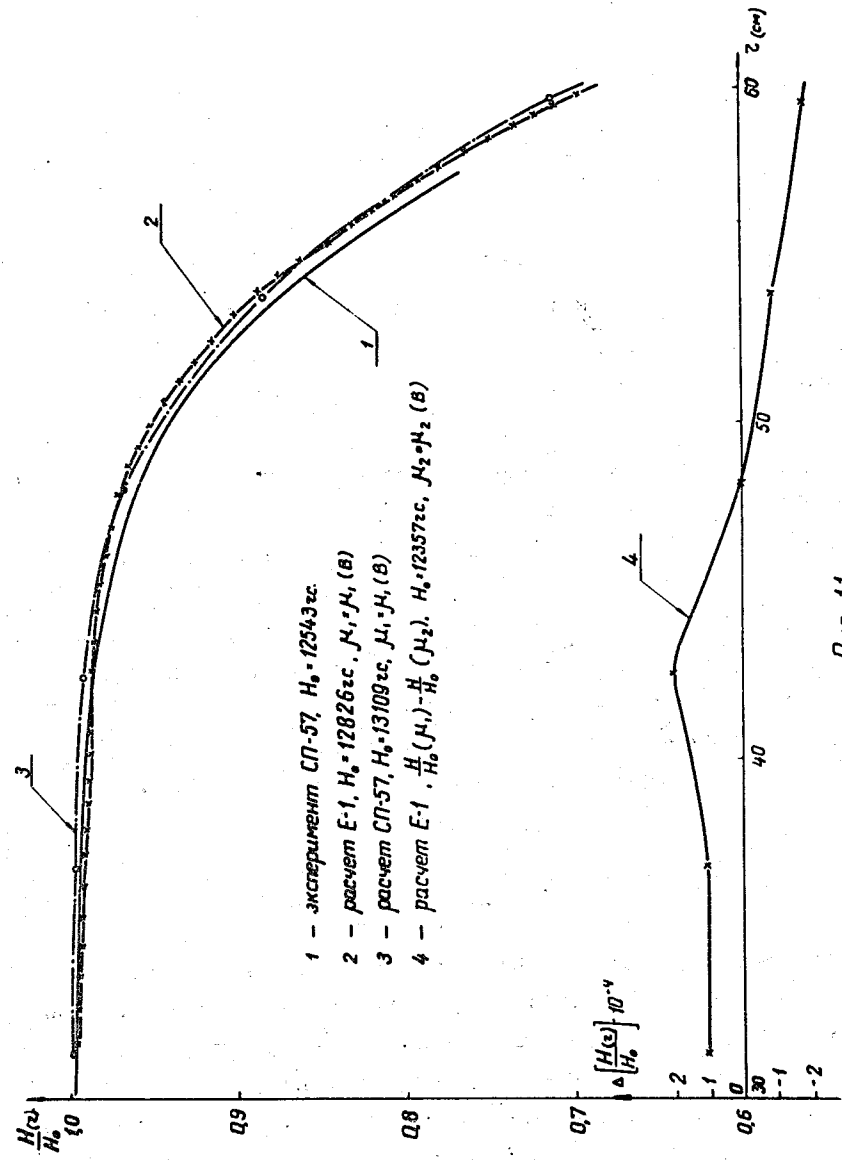


Рис. 11

где 
$$\omega'_k(x) = \omega_k \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x-x_j}, \quad x=x_j, \quad j=1,2,\dots, n,$$

(см. рис. 7)

$$\omega_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}$$

При выборе  $x_j$  таким образом, как указано на рис. 7, и  $x = \frac{x_0+x_1}{2}$ , получается наилучшее численное вычисление производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Обычно принимается  $n = 4$ .

Кроме  $V_y$  программа вычисляет координаты силовых линий с заданным шагом по значению потенциала.

Написана программа, управляющая построением распределения силовых линий задачи с помощью "CALCOMP"-графопостроителя.

Результаты вычислений накапливаются на магнитной ленте для продолжения счёта.

В программе имеется возможность рассчитывать аксиально-симметричные поля, но в расчётах были замечены ошибки типа "стоячей волны" вблизи оси поля, что было также отмечено N.J. Diserens /3/. При учёте рекомендации в /3/ по исправлению ошибок ожидается хорошая работа программы и в случае аксиально-симметричного поля.

### Результаты расчётов

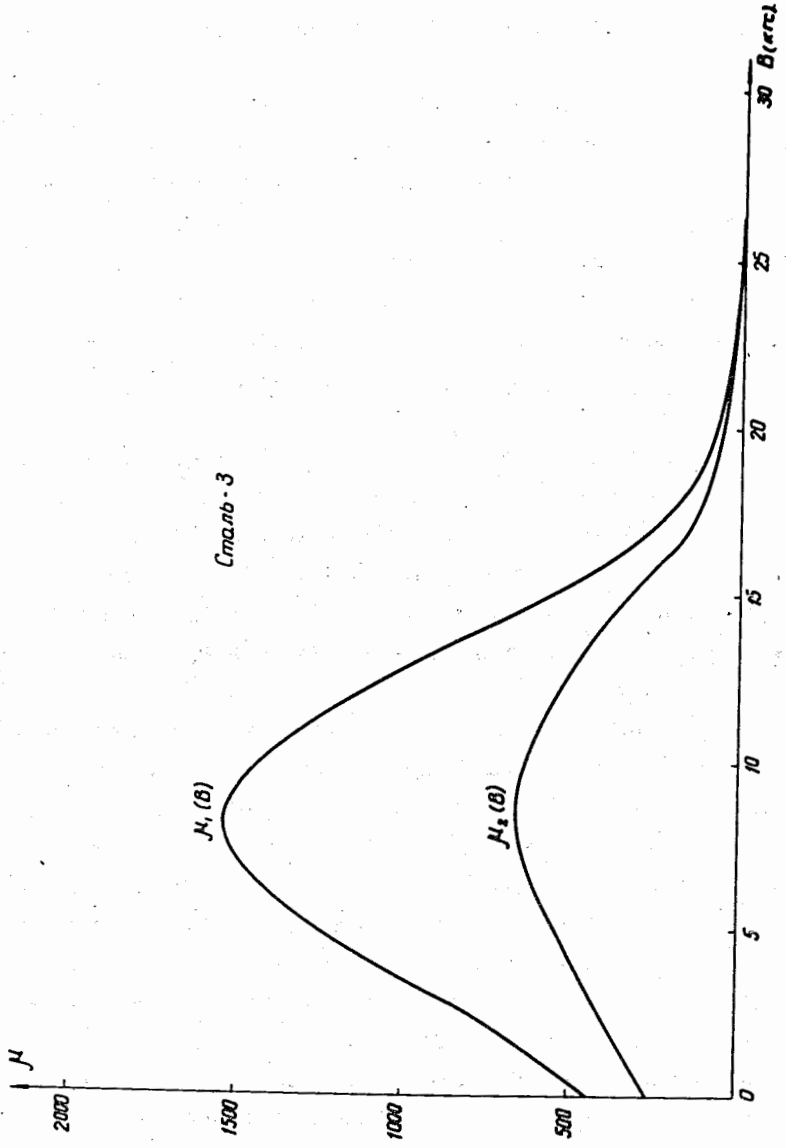
Написанная программа была использована для выполнения ряда практических расчётов. В частности, рассчитывалась кривая намагничивания магнита СП-57 (рис. 8) в предположении двумерности конфигурации магнита в декартовых координатах. В действительности, магнит СП-57 имеет цилиндрический полюс и прямоугольные ярма. На рис. 8 представлен 2-й квадрант магнита с изображением силовых линий. Пунктирной линией показаны контуры фактической геометрии магнита, если они отличались от принятых в расчёте. На рис. 9 приведены для сравнения расчётная и эк-

спериментальная кривые намагничивания магнита. Расхождение результатов составляет  $\approx 4\%$  и, в основном, связано с отличием геометрии магнита от двумерной, неточностью ( $\approx 1\%$ ) определения тока и упрощениями геометрии поля, принятой в расчёте.

Второй расчёт был произведен с целью определения погрешностей, вносимых из-за неточности моделирования ( $K = 1 : 5,22$ ) размеров ярма и положения катушек на модели магнитной системы установки "Ф"/10/. На рис. 10 приведены 1-е квадранты конфигурации магнита СП-57, используемого для моделирования магнитной системы установки "Ф", и магнита Е-1, рассматриваемого в проекте установки "Ф".

Пунктирной линией показаны профиль полюсного наконечника и спиральные шиммы. Ввиду уже упоминавшейся недостаточной разрешающей способности программ типа TRIM было невозможно учесть тонкую структуру системы, поэтому в расчёте принят плоский полюсный наконечник. Рассмотрение по-прежнему велось в декартовых координатах. Результаты расчётов этих магнитов наряду с экспериментальными данными для СП-57 приведены на рис. 11. Расчёт выполнен при величинах полей в зазоре порядка величины поля в установке "Ф"/10/. Сравнение относительных кривых показывает совпадение расчётной и экспериментальной кривой с точностью до  $\approx 1\%$ , тогда как расчётные кривые для Е-1 и СП-57 совпадают с точностью до  $\approx 0,5\%$  в рабочем диапазоне радиусов/10/.

Однако в случае расчёта Е-1 происходит уменьшение уровня поля по сравнению со случаем СП-57, что, вероятно, произошло из-за большей длины средней линии магнитопровода Е-1. Сравнение расчётов для Е-1 при различных характеристиках материала ферромагнетика (рис. 11,12) показало отсутствие различия относительных кривых и увеличение уровня поля для материала с более высокой магнитной проницаемостью. Из расчётов был сделан вывод, что магнитопровод для рассматриваемых конфигураций магнитов не оказывает влияния на распределение поля в зазоре магнита и может быть хорошо описан моделью одномерной проводящей линии, при изменении параметров которой меняется лишь уровень поля в зазоре.



См. таб. 3

Рис. 12

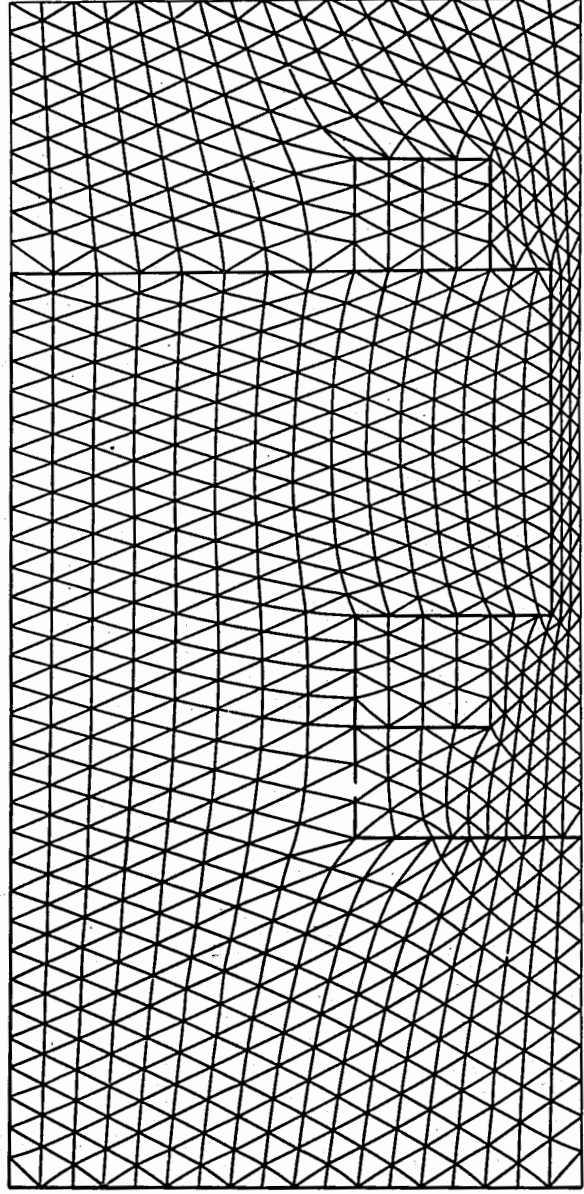


Рис. 13

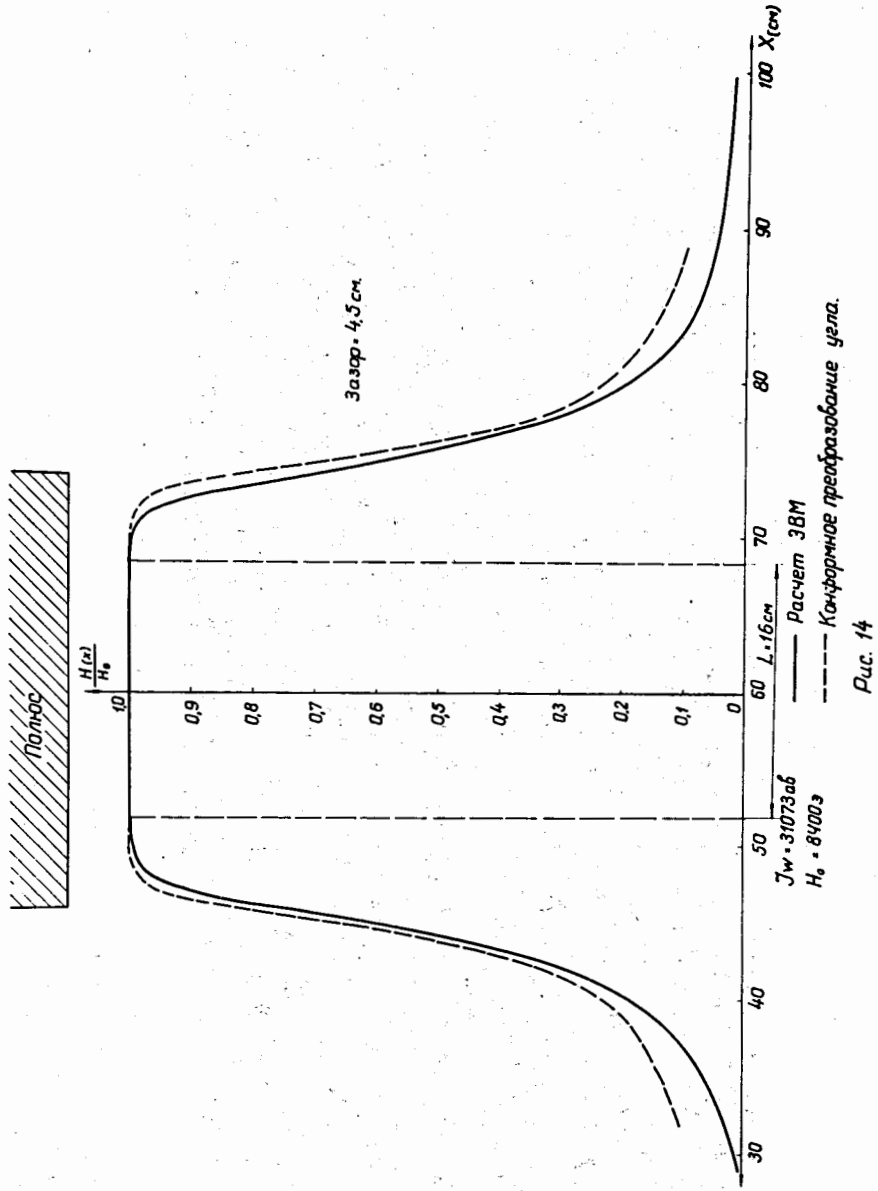


Рис. 14

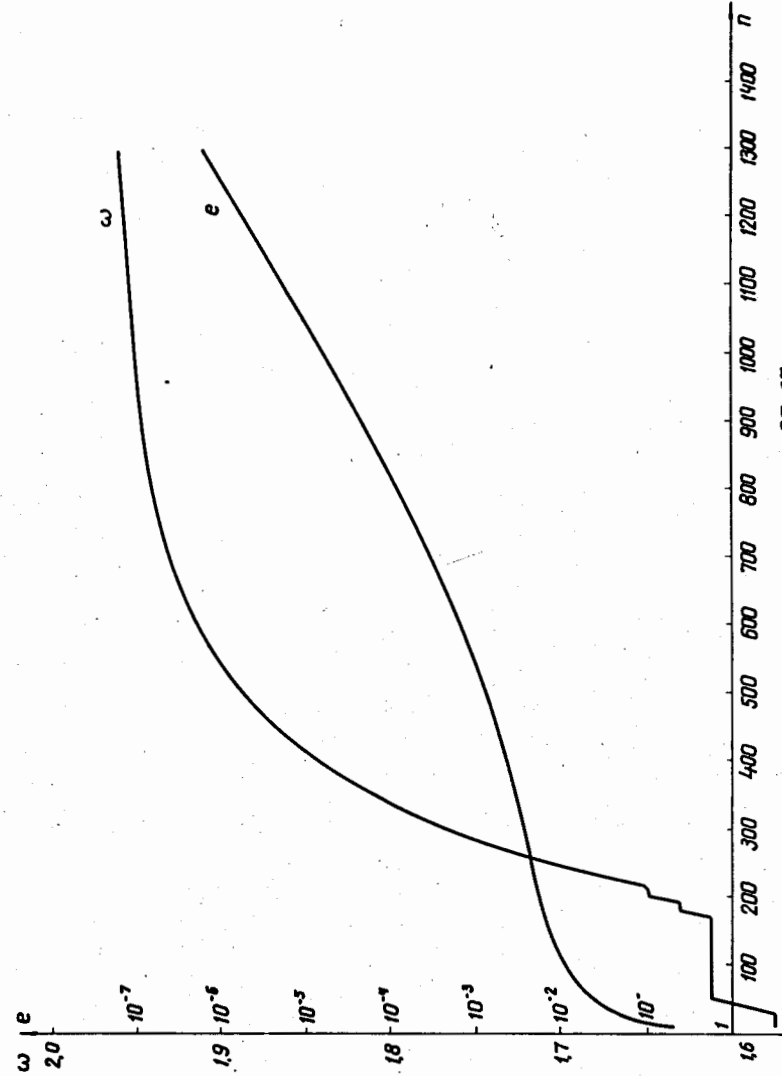


Рис. 15  
СП-57 - расчет.

Третий расчёт был выполнен для С-образного анализирующего магнита с целью определения размеров рабочей области зазора. Геометрия верхней половины магнита с нанесенной сеткой и значениями проницаемости в треугольниках приведена на рис. 13.

Результаты расчёта приведены на рис. 14 вместе с кривой, полученной при конформном преобразовании прямого угла с бесконечными сторонами. Рабочая область, где изменение поля не превышает  $4 \cdot 10^{-3}$  от уровня поля определена равной  $L = 16$  см при ширине полюса 30 см.

### З а к л ю ч е н и е

Используемая методика расчёта полей расширяет возможности проектирования различных магнитных систем.

На основании выполненных расчётов:

1. Оценена ошибка из-за неточного моделирования магнитной системы фазотрона с пространственной вариацией поля ЛЯП ОИЯИ на электромагните СП-57.

2. Показано, что выбор конфигурации магнитопровода и полюсных наконечников систем, близких к двумерным, типа анализирующего магнита может быть сделан расчётным способом без моделирования. Это справедливо и для области насыщения железа.

3. Определены ограничения, связанные с тонкой структурой геометрии поля магнитных систем. В частности, размер минимального изменения формы полюсного наконечника должен быть не меньше шага сетки.

4. Выяснены пути дальнейшей работы над программой для сокращения времени расчёта и увеличения числа узлов сетки.

Авторы благодарят Г.Н. Сайфулину за помощь при проведении расчётов.

1. J.H. Dorst. UCID-10022 (1965).
2. A.M. Winslow. Journ. of Comp. Phys., V. 1, N2 (1966).
3. N.J. Diserens. RHEL/R 171.
4. A.M. Winslow. Proc. of Intern. Symp. on Mag. Tech. p.170 (1965).
5. J.S. Colonias. Proc. of Inter. Symp. on Mag. Tech. P. 79 (1967).
6. J.S. Colonias. UCRL-16959 (1965).
7. Электрофизическая аппаратура промышленного изготовления. Справочник. Госатомиздат, 1963 г.
8. В. Вазов, Дж. Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Изд. ин. лит. 1963.
9. И.П. Мысовских. Лекции по методам вычислений. Гос. Изд. Физ., Мат. лит. 1962.
10. С.Б. Ворожцов, Н.И. Дьяков, Н.Л. Заплатин. Сообщение ОИЯИ 9-4517, Дубна, 1969.
11. R. Perin and S. Van der Meer. CERN 67-7 (1967).
12. E.A. Burnfine, L.R. Anderson, H. Brechna. SLAC-56 (1966).
13. E.A. Taylor. Proc. of Inter. Symp. on Mag. Tech. p.208 (1965).
14. Н.И. Дойников, С.Н. Комарова, А.С. Симаков. Препринт ОИЯИ, P13-4134, Дубна 1968.
15. H. Braun. Computer Programme zur Berechnung von 2-dim Magnetfeldern ZYKLOTRON PLANUNG ETH (1968).
16. M.H. Foss. Proc. of Inter. Symp. on Mag. Tech. p.103 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел

13 апреля 1970 года.