ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

Р9 - 4909

А.Б. Кузнецов, С.Б. Рубин

К ЗАДАЧЕ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО СГУСТКА ЭЛЕКТРОНОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Дубна 1970

8249/2 up

P9 - 4909

А.Б. Кузнецов, С.Б. Рубин

К ЗАДАЧЕ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО СГУСТКА ЭЛЕКТРОНОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

I.

В настоящее время представляет значительный теоретический и практический интерес (см., например, [1]) вопрос о потерях энергии релятивистским сгустком с большим суммарным зарядом, пролетающим через различные структуры из проводящих тел.

В числе работ, посвященных этой тематике, имеются работы [2,3], в которых в качестве "структуры" выбран цилиндрический резонатор, вернее его модель в виде замкнутого цилиндрического объема с идеально проводящими стенками без входного и выходного отверстий (влияние отверстий учитывалось феноменологически).

Для точечного сгустка в приближении заданного движения (v сгустка $= \beta c = \mathrm{const}$) методом разложения полей по собственным функциям резонатора в [2] было получено следующее выражение для энергии, оставленной сгустком в объеме резонатора после вылета:

$$\Delta U = \frac{16 Q^2 \beta^2}{h} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \nu_\ell^2}{J_1^2(\nu_\ell)\left[\nu_\ell^2 + \left(\frac{m\pi a}{h\gamma}\right)^2\right]^2} \begin{cases} \sin^2\left[\frac{h}{2\beta}\sqrt{\left(\frac{\nu_\ell}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}\,\right], & m \text{ - четное} \\ \cos^2\left[\frac{h}{2\beta}\sqrt{\left(\frac{\nu_\ell}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}\,\right]. & m \text{ - нечетное} \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь a – радиус, h – длина резонатора, Q – полный заряд сгустка, ν_ℓ – ℓ-й корень уравнения $J_0(x)=0$; $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$,

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0. \end{cases}$$

Выражение (1), вообще говоря, является логарифмически расходящимся. Однако, учитывая феноменологически влияние отверстий в резонаторе, можно предположить, как это сделано в /2/, что излучаются только волны, которые возмущаются при пролете сгустка через отверстия. Отсюда следует, что в (1) для оценок можно ограничиться членами, которые соответствуют волнам с пространственной неоднородностью полей на длине порядка диаметра отверстий. Далее в /2/ для ΔU проведены оценки, показывающие, что в случае $a \gg h$ и для умеренных значений начальной энергии влетающего сгустка (γ не сильно отличается от единицы) основные энергетические потери на излучение происходят за счет возбуждения "радиальных гармоник", для которых поле однородно вдоль оси резонатора. Этим гармоникам в (1) соответствуют члены двойной суммы, для которых $m = 0$.

Результирующая оценка для указанной области значений оказывается зависящей только от β, а не от γ. Необходимо, однако, отметить, что представляющий большой интерес случай $\beta \approx 1$ нуждается в более подробном рассмотрении. В этом случае изменение величины ΔU за счет множителя β уже практически не происходит. В то же время, как показывают грубые верхние оценки, а также имеющиеся литературные данные для сходных задач, с увеличением γ вклад m -гармоник в общие потери энергии возрастает. Например, решение, полученное Днестровским и Костомаровым /4/ для задачи о потерях энергии сгустком, пролетающим через круглое отверстие в экране, оказывается линейно растущим вместе с γ.

Увеличение влияния m -гармоник с ростом γ следует, как будто, и из более подробного рассмотрения вопроса о влиянии отверстий в резонаторе /3/. Для того чтобы избежать расходящихся выражений типа (1) в /3/, был рассмотрен сгусток с зарядом, распределенным в виде бесконечно тонкого диска радиуса R . Для этого случая возбуждаемые при пролете сгустка гармоники токов, текущих в стенках резонатора в окрестности отверстий (а, следовательно, и дифракционного поля), оказываются пропорциональными величине

$$\exp\left\{ -\frac{(r-R)}{\beta\gamma} \sqrt{\left(\frac{\nu}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}\ \right\}, \tag{2}$$

где в качестве r надо взять величину порядка радиуса отверстий. Как видно из (2), обрезающее действие этого фактора с увеличением γ падает.

Учитывая сказанное, имеет смысл более точно исследовать выражение для ΔU . Мы будем при этом пользоваться выражением для ΔU, приведенным в /3/ для дискообразного сгустка:

$$\Delta U=\frac{64 Q^2\beta^2 a^2}{R^2 h}\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\epsilon_m J_1^2\left(\nu_\ell \frac{R_0}{a}\right)}{J_1^2(\nu_\ell)\left[\nu_\ell^2+\left(\frac{m\pi a}{h\gamma}\right)^2\right]^2}\begin{cases}\cos^2\frac{h}{2\beta}\kappa_{\ell m}, & m - \text{нечетное}\\ \sin^2\frac{h}{2\beta}\kappa_{\ell m}, & m - \text{четное}\end{cases} \tag{3}$$

$$\kappa_{\ell m}=\sqrt{\left(\frac{\nu_\ell}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}\ . \tag{4}$$

В отличие от (1) величина (3) является ограниченной.

Из рассмотрения (3) сам собой напрашивается следующий вывод оценки ее асимптотических свойств при больших γ . Поскольку все члены двойной суммы в (3) положительны и величины $\cos^2\left(\frac{h}{2\beta}\kappa_{\ell m}\right)$, $\sin^2\left(\frac{h}{2\beta}\kappa_{\ell m}\right)$ быстро изменяются в пределах нуль-единица, то естественно заменить эти функции какой-нибудь средней величиной, например $\frac{\sqrt{2}}{2}$, или просто единицей (см., например, /2/, где такой вывод применен для переходного случая к результату Днестровского и Костомарова). Тогда единственным, зависящим от m множителем в членах суммы является величина $[(\frac{\nu_\ell}{a})^2+(\frac{m\pi}{h})^2]^{-2}$. При больших γ для значений $m = 1,2,\ldots, m_0$, где $m_0 \approx \gamma$, этот множитель практически не зависит от m, а далее начинает быстро уменьшаться как $\frac{1}{m^4}$. Таким образом, в сумме по индексу m в (3) первые m_0 членов оказываются примерно одинаковыми, т.е. вместо суммирования можно взять произведение одного члена на m_0. Пренебрегая всеми остальными членами ряда и учитывая, что $m_0 \approx \gamma$, получаем результат, показывающий, что полные потери энергии сгустком растут пропорционально величине γ.

Более точная оценка, приведенная в /3/, показывает, однако, что увеличение общих потерь с ростом γ происходит не быстрее, чем $\ln\gamma$ [x/]. В /3/ не был вычислен коэффициент при $\ln\gamma$. Как показывает анализ, приводимый ниже, при определенных условиях этот коэффициент на самом деле оказывается нулем. Таким образом, общие потери в релятивистской области практически не зависят от γ.

II.

Проведем более детальный анализ выражения (3). Это выражение удобно записать в виде:

$$\Delta U = \frac{8\pi^2 Q^2}{a}\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\epsilon_m x_\ell^3}{[\sqrt{x_\ell^2+m^2}+\beta m]^2}\cdot\frac{J_1^2(x_\ell\frac{\pi R}{h})}{(x_\ell\frac{\pi R}{h})^2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{2\beta}(\sqrt{x_\ell^2+m^2}-\beta m)}{[\frac{\pi}{2\beta}(\sqrt{x_\ell^2+m^2}-\beta m)]^2}. \quad (5)$$

Здесь использованы соотношения

x/ Заметим, что выше и далее рассматривается полное выражение для потерь, без выполнения "феноменологического обрезания" за счет учета влияния отверстий. Очевидно, что без введения этого обрезания результат все равно оказывается завышенным по сравнению с реальным случаем.

$$\sin^2\frac{\pi}{2\beta}\left(\sqrt{x_\ell^2+m^2}-\beta\, m\right)=\begin{cases}\sin^2\left(\frac{\pi}{2\beta}\sqrt{x_\ell^2+m^2}\right), & m \text{ – четное}\\ \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2\beta}\sqrt{x_\ell^2+m^2}\right), & m \text{ – нечетное}\end{cases} \tag{6}$$

$J^2(\nu_\ell)\approx\frac{2}{\pi\,\nu_\ell}$ и введено обозначение $x_\ell=\frac{\nu_\ell h}{\pi a}$.

Область суммирования разобьем на ряд подобластей, в которых выражение, стоящее под знаком суммы, будем аппроксимировать по-разному.

При

$$\frac{\pi}{2\beta}\left(\sqrt{x_\ell^2+m^2}-\beta\, m\right)\leq 1 \tag{7}$$

будем считать

$$\frac{\sin^2\frac{\pi}{2\beta}\left(\sqrt{x_\ell^2+m^2}-\beta\, m\right)}{\left[\frac{\pi}{2\beta}\left(\sqrt{x_\ell^2+m^2}-\beta\, m\right)\right]^2}\approx 1\,. \tag{8}$$

Равенство (7) есть уравнение эллипса, которое удобно записать в виде

$$\left(\frac{x_\ell}{\frac{2}{\pi}\beta\gamma}\right)^2+\left(\frac{m-\frac{2}{\pi}\beta^2\gamma^2}{\frac{2}{\pi}\beta\gamma^2}\right)^2=1\,. \tag{9}$$

Из (9) видно, что с ростом γ область величин x_ℓ и m, где удовлетворяется неравенство (7) и, следовательно, справедлива аппроксимация (8), по x_ℓ растет пропорционально γ, а по m – пропорционально γ^2.

Вне области, определяемой неравенством (7), примем аппроксимацию

$$\sin^2 \frac{\pi}{2\beta} (\sqrt{x_\ell^2 + m^2} - \beta m) \approx 1 , \qquad (10)$$

которая, как указывалось выше, использовалась ранее некоторыми авторами во всей области изменения величин x_ℓ.

Далее при

$$x_\ell \pi \frac{R_0}{h} \leq \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}} \qquad (11)$$

полагаем

$$\frac{J^2 (x_\ell \pi \frac{R}{h})}{(x_\ell \pi \frac{R}{h})^2} \approx \frac{1}{4} , \qquad (12)$$

а вне области, определяемой неравенством (11),

$$J^2 (x_\ell \pi \frac{R}{h}) \approx \frac{2}{\pi^2 x_\ell \frac{R}{h}} . \qquad (13)$$

Таким образом, для оценки суммы в (5) область изменения переменных x_ℓ и m разбивается на 4 подобласти, как показано на рис. 1.

В каждой из областей выражения, стоящие под знаками суммирования в (5) $F(\ell, m)$, представляются в виде $x_2 = \frac{2}{\pi \sqrt[3]{\pi}} \frac{h}{R}, \Delta = \frac{2\beta}{\pi}$ (см. рис. 1):

1-ая область

$$F_1 = \frac{\epsilon_m x_\ell^3}{4 [\sqrt{x_\ell^2 + m^2} + \beta m]^2} ; \qquad (14)$$

2-ая область

$$F_2 = \frac{2 \epsilon_m h^3}{\pi^4 R^3} \frac{1}{[\sqrt{x_\ell^2 + m^2} + \beta m]} = \frac{1}{4} \epsilon_m x_2^3 \frac{1}{[\sqrt{x_\ell^2 + m^2} + \beta m]^2} ; \qquad (15)$$

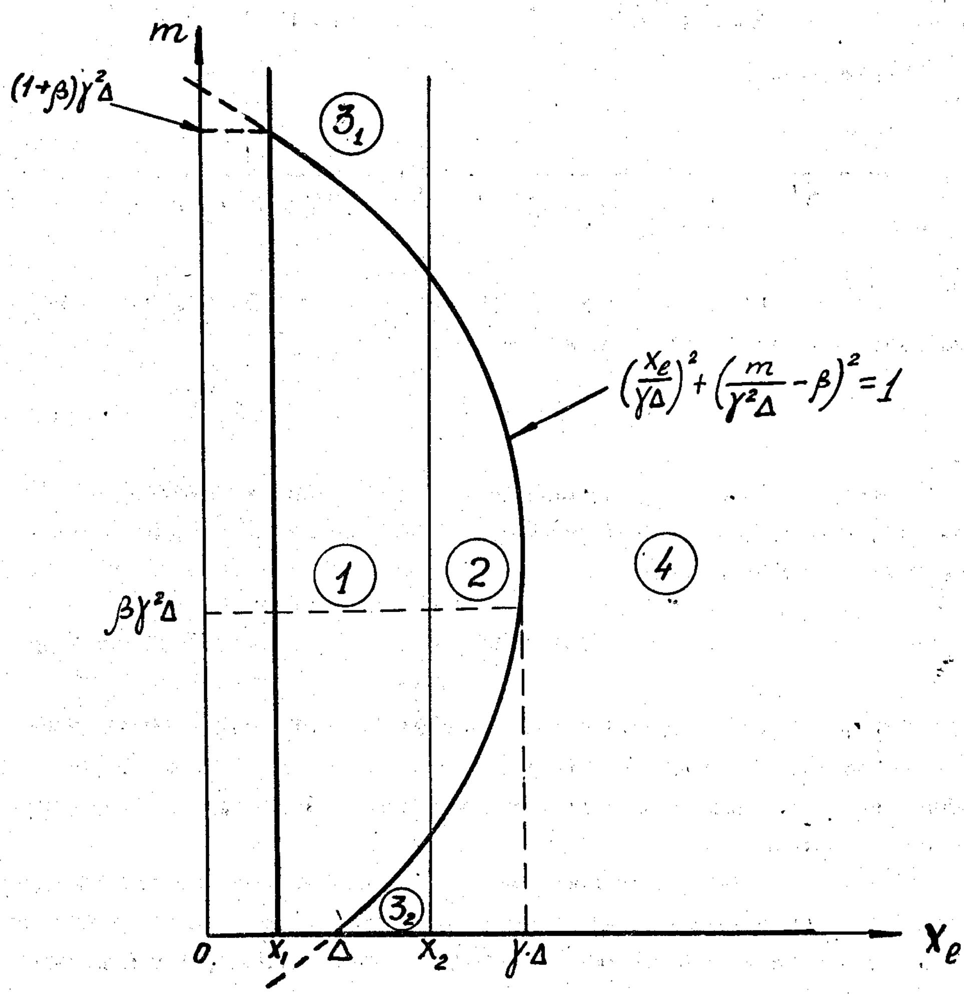
m
$(1+\beta)\gamma^2\Delta$
3_1
$\left(\frac{x_e}{\gamma\Delta}\right)^2+\left(\frac{m}{\gamma^2\Delta}-\beta\right)^2=1$
1
2
4
$\beta\gamma^2\Delta$
3_2
0
x_1
Δ
x_2
$\gamma\cdot\Delta$
x_e

Рис 1.

3-ая область

$$F_3 = \frac{\epsilon_m \beta_0^2}{\pi^2} \frac{x^3}{[\,x_\ell^2 + m^2(1-\beta^2)]^2} = \frac{\epsilon_m \Delta^2}{4} \frac{x^3}{[\,x_\ell^2 + m^2(1-\beta^2)\,]^2} \;; \qquad (16)$$

4-я область

$$F_4 = \frac{8\epsilon_m \beta^2 h^3}{\pi^6 R^3} \frac{1}{[x_\ell^2 + m^2(1-\beta^2)]^2} = \frac{1}{4}\epsilon_m \Delta^2 x_2^3 \frac{1}{[x_\ell^2 + m^2(1-\beta^2)\,]^2} . \qquad (17)$$

Оценивая эти суммы путем перехода от сумм к интегралам и рассматривая их при $\gamma^2 \gg 1$, получим

$$\sum_{i=1}^{4} F_i \approx \frac{1}{2} \frac{a}{h} x_2^2 . \qquad (18)$$

Таким образом, мы получили, что потери энергии сгустком в рассматриваемой задаче в ультрарелятивистском случае не зависят от энергии сгустка. Окончательно

$$\Delta U < 8\, Q^2 \frac{h}{R^2} . \qquad (19)$$

Очевидно, что полученная оценка (19), проведенная с целью показать независимость общих потерь энергии сгустком от роста γ в ультрарелятивистской области, в отношении числового значения коэффициента является грубой.

Кроме того, как отмечалось выше, в оценке не было учтено влияние отверстий в резонаторе. Феноменологический учёт этих отверстий должен привести к обрезанию спектра и, следовательно, к уменьшению общего результата.

В заключение отметим, что настоящая работа выполнена в 1968 году и соответствующий результат упомянут в /6/. Уже после выполнения работы авторам стала известна статья А.К. Орлова и А.В. Рябцова /6/ на аналогичную тему, в которой рассмотрена энергия излучения, возбужденная в резонаторе точечным сгустком. Для того чтобы исключить расходимость из выражения типа (1) и учесть феноменологически влияние входного и выходного отверстий, авторы /5/ сделали частичные обрезания по спектру радиальных гармоник. В этих условиях (подсчет выполнялся несколько другим способом) показана независимость общих потерь от γ. Получившийся коэффициент примерно в 16 раз меньше, чем в формуле (19).

В настоящее время вопросы о возбуждении структур, в частности резонаторов, сгустками больших энергий привлекают все большее внимание. Поэтому авторы, учитывая некоторую специфику полученного результата, решили опубликовать данную работу.

Литература

1. *Б.М. Болотовский, Г.В. Воскресенский. УФН т.88, №2 (1966).*
2. *О.А. Колпаков, В.И. Котов. ЖТФ, т.34, стр. 1387 (1964).*
3. *С.Б. Рубин, В.Н. Мамонов. Препринт ОИЯИ 9-3346-2 (1967).*
4. *Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров. ДАН СССР, 124, 1026 (1959).*
5. *А.К. Орлов, А.В. Рябцов. Сборник "Электрофизическая аппаратура", Атомиздат, Москва, 1967.*
6. *А.Г.Бонч-Осмоловский и др. Препринт ОИЯИ Р9-4171, Дубна 1968.*

Рукопись поступила в издательский отдел

3 февраля 1970 года.