ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

Р9-4728

А.Б.Кузнецов, С.Б.Рубин

# О КОГЕРЕНТНЫХ ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКИМ СГУСТКОМ В ЛИНЕЙНЫХ УСКОРЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

Дубна 1969

P9-4728

А.Б.Кузнецов, С.Б.Рубин



# О КОГЕРЕНТНЫХ ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКИМ СГУСТКОМ В ЛИНЕЙНЫХ УСКОРЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

В настоящее время представляет интерес вопрос о потерях энергии пролетающим через различные структуры релятивистским сгустком с большим зарядом. Особенно важным является изучение зависимости потерь энергии от релятивистского фактора $\gamma = (1 - \frac{u_0^2}{c^2})^{-1/2}$ при движении сгустка в линейном ускорительном тракте, имеющем обычно периодическую структуру.

Уже давно (см./1/) было выяснено, что потери энергии в этом случае носят резонансный характер. Однако в дальнейших работах до сих пор не удалось выяснить с достаточной полнотой асимптотическую зависимость потерь от $\gamma$ (см./2-5/). Исключение представляет, насколько нам известно, лишь случай возбуждения „гребенки" из полуплоскостей, для которого Болотовским и Воскресенским было получено точное решение и обнаружена в некоторых приближениях обратная зависимость потерь от $\gamma$. Является ли эта закономерность универсальной, не ясно.

Трудность решений задач подобного рода заключается в необходимости учёта всего частотного диапазона, в котором возбуждается излучение. Для рассмотренных ниже трех периодических систем (одна из которых – " гребенка" Болотовского-Воскресенского, которая приведена для сравнения) удается развить подход, дающий возможность оценить асимптотическую зависимость потерь при больших $\gamma$.

Структура систем представлена на рис. 1. Возбуждаются они точечным зарядом (случаи I, II ) и заряженной нитью (случай III ). Скорость источников $v_0 = \mathrm{const}$. Из условий задач следует функциональная связь между значениями плотности токов на произвольном $m$ -ом и нулевом элементах структуры:

$$j^m_z\left(\xi + mD, t + \frac{Dm}{v_0}\right) = j^0_z(\xi, t), \quad 0 \le \xi \le d \qquad \text{в случае I,}$$

$$j^m_r\left(r, t + \frac{Dm}{v_0}\right) = j^0_r(r, t); \quad j^m_y\left(y, t + \frac{Dm}{v_0}\right) = j^0_y(y, t) \qquad \text{в случаях II,III.}$$

Компоненты фурье-векторов Герца, созданных этими токами вторичных полей, можно представить в виде:

$$\Pi^{I}_{z\omega} = -\frac{\pi a e^{-i\omega t}}{D\omega}\int_0^d j^0_{z\omega}(\xi)\,d\xi \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{i(z-\xi)w_s} \begin{cases} J_0(\chi_s r)H_0^{(1)}(\chi_s a), & r<a; \\ J_0(\chi_s a)H_0^{(1)}(\chi_s r), & r>a; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\Pi^{II}_{r\omega} = -\frac{\pi e^{-i\omega t}}{D\omega}\int_a^\infty j^0_{r\omega}(r')\,r'dr' \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{izw_s} \begin{cases} J_1(\chi_s r)H_1^{(1)}(\chi_s r'), & r<r'; \\ J_1(\chi_s r')H_1^{(1)}(\chi_s r), & r>r'. \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\Pi^{III}_{y\omega} = -\frac{e^{-i\omega t}}{D\omega}\int_0^\infty j^0_{y\omega}(y')\,dy' \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{izw_s}\frac{e^{i\chi_s|y-y'|}}{\chi_s} . \tag{1.3}$$

Здесь $w_s = \frac{\omega}{v_0} - \frac{2\pi s}{D}$ , $\chi_s = \sqrt{k^2 - w_s^2}$ , $k = |\frac{\omega}{c}|$ .

Работа, совершаемая $\omega$ - компонентой вторичного поля над источником на периоде, будет находиться по формуле

$$W_\omega = -q\int_0^{D/v_0} \mathrm{Re}\{E_{z\omega}\big|_{z=v_0 t}\}\,v_0\,dt . \tag{2}$$

При вычислении соответствующих выражений оказывается, что все члены с $s \neq 0$ , т.е. волны с фазовыми скоростями, отличными от $v_0$ , обращаются в нуль и только поверхностная волна, распространяющаяся с фазовой скоростью источника, дает конечный результат. Выражения для $W_\omega$ для всех трех случаев будут иметь вид

$$W^I_\omega = -\frac{2qa}{c}\,\frac{k}{\gamma^2\beta^2}\,K_0\left(\frac{ka}{\gamma\beta}\right)\mathrm{Jm}\left\{\int_0^d j^0_{z\omega}(\xi)\,e^{-i\xi\frac{\omega}{v_0}}\,d\xi\right\}, \tag{3.1}$$

$$W^{II}_\omega = \frac{2qk}{c\gamma\beta^2}\,\mathrm{Re}\left\{\int_a^\infty j^0_{r\omega}(r)\,K_1\left(\frac{kr}{\gamma\beta}\right) r\,dr\right\}, \tag{3.2}$$

$$W^{III}_\omega = \frac{\kappa}{c\beta}\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty j^0_{y\omega}(y)\,e^{-\frac{k}{\gamma\beta}(y+a)}\,dy\right\}. \tag{3.3}$$

Формулы (3) являются основными. Оценки для $W_\omega$ получаются из соответствующих оценок амплитуд токов. Последние находятся из интегральных уравнений, как обычно, получаемых из граничных условий на экранах. Ниже ради краткости изложение ведется на примере задачи II , для остальных - приводятся только результаты.

Сумму в (1.2) при $z = 0$ можно представить интегралом по контуру $\mathfrak{L}$ , показанному на рис. 2[x/].

$$M = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\begin{cases} J_1(\chi_s r)H_1^{(1)}(\chi_s r') \\ J_1(\chi_s r')H_1^{(1)}(\chi_s r) \end{cases} = \frac{D}{4\pi i}\oint_{\mathfrak{L}}\begin{cases} J_1\left(r\sqrt{k^2-(\frac{\omega}{v_0}-\nu)^2}\right) H_1^{(1)}\left(r'\sqrt{k^2-(\frac{\omega}{v_0}-\nu)^2}\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\nu D}{2}\right)d\nu \\ J_1\left(r'\sqrt{k^2-(\frac{\omega}{v_0}-\nu)^2}\right) H_1^{(1)}\left(r\sqrt{k^2-(\frac{\omega}{v_0}-\nu)^2}\right) \end{cases} . \tag{4}$$

---

x/ Как обычно, считаем, что $k$ имеет малую положительную мнимую добавку.

Деформируя контур $\mathfrak{L}$ в контур $(\mathfrak{L}^{I}+\mathfrak{L}^{II})$ (принимая для корня справа от разрезов положительный знак) и полагая далее $\nu=\frac{k}{\beta}(1+\beta+i\beta v)$ на $\mathfrak{L}^{I}$ и $\nu=\frac{k}{\beta}(1-\beta-i\beta v)$ на $\mathfrak{L}^{II}$, получим:

$$M=\frac{-kD}{2\pi}\int_0^\infty J_1\left(kr\sqrt{v^2-2iv}\right)J_1\left(kr'\sqrt{v^2-2iv}\right)\left[\operatorname{ctg}\frac{kD}{2\beta}(1+\beta+i\beta v)+\operatorname{ctg}\frac{kD}{2\beta}(1-\beta-i\beta v)\right]dv. \quad (5)$$

Легко видеть, что функция под интегралом в (5) при $v\to\infty$ экспоненциально стремится к нулю. После подстановки (5) в (1.2) результат преобразуется далее путем интегрирования по частям по $r'$ с учётом краевого условия для тока

$$j^0_{r\omega}(r)\Big|_{r=a}=0. \quad (6)$$

Интегральное уравнение для $j^0_{r\omega}$ запишется в виде

$$-E^0_{r\omega}=\frac{k}{2c}\int_a^\infty\frac{d(r'j^0_\omega)}{dr'}\,dr'\int_0^\infty G(v)\,\frac{1-v^2+2iv}{\sqrt{v^2-2iv}}\,J_1\left(kr\sqrt{v^2-2iv}\right)J_0\left(kr'\sqrt{v^2-2iv}\right)dv, \quad (7)$$

где $E^0$ – внешнее поле[x/], $G(v)=\operatorname{ctg}\frac{kD}{2\beta}(1+\beta+iv\beta)+\operatorname{ctg}\frac{kD}{2\beta}(1-\beta-i\beta v)$. (7) удобно далее продифференцировать еще раз по $r$ и ввести замену $v=\frac{\gamma^2x^2}{\sqrt{1+\gamma^2x^2}}$. В такой форме, учитывая, что главный вклад в интеграл дает область значений $r\approx r'$ (в этом можно убедиться, используя асимптотические выражения для бесселевых функций и учитывая наличие большого параметра $\gamma$), применим к двойному интегралу метод стационарной фазы/7/. В результате получим, ограничиваясь основными членами,

[x/] Компоненты Фурье, на которые раскладываются вектора Герца внешнего поля, несомого источниками, приведены на рис. 1 ( $\kappa$ – заряд на единицу длины нити.)



$$-\frac{dE^0_{r\omega}}{dr}=\frac{2(1+i)}{kcD}\,\frac{\gamma^2}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\,j^0_{r\omega}\right). \quad (8)$$

Отсюда с учётом (6) находим оценку для тока. Наконец, после подстановки в (3.2) и интегрирования по частотам получается оценка для полной энергии, теряемой зарядом на одном периоде структуры:

$$W^{II}=\frac{5}{24\pi}\,\frac{q^2D}{a^2}. \quad (9)$$

Аналогичная процедура, проведенная для гребенки, дает

$$W^{III}=\frac{\kappa^2D}{16a}. \quad (10)$$

Наконец, для задачи I приведем только грубую верхнюю оценку, которая может быть получена с помощью (3.1) следующим образом. Предположим, что $j^0_{z\omega}$ просто пропорциональна амплитуде "падающего" поля $E^0_{z\omega}$, которая вошла бы в соответствующее интегральное уравнение. Этим мы влияние периодичности учитываем лишь частично, поскольку формула (3.1) является точной и выведена с учётом периодичности структуры, а в выражении для $j^0_{z\omega}$ на выделенном элементе структуры мы пренебрегаем экранировкой заряда соседними элементами, т.е. в какой-то мере выбираем худший случай. В результате получается выражение для полных потерь:

$$W^{I}\approx A\,\frac{q^2d}{a^2\gamma}, \quad (11)$$

где A – числовой коэффициент, который при данном подходе остается неизвестным.

В заключение можно отметить: полученные оценки показывают, что потери в ультрарелятивистском пределе стремятся по крайней мере к постоянному пределу при неограниченном увеличении $\gamma$. Различие результата для системы полуплоскостей от результата Болотовского и Воскресенского, которые для потерь приводят формулу (см. /3/)

$$W = \frac{2\kappa^2 D}{a}\,\frac{\beta}{\gamma}, \tag{12}$$

можно объяснить тем, что в асимптотической формуле (12) учтена лишь область частот $ka \geq \gamma$, в то время как в (10) $ka \gtrsim 1$. Приведенные в /3/ численные результаты, вычисленные по точной формуле, трудно сопоставить с (10), т.к. соответствующие точки на рассчитанной кривой лежат слишком близко к нулю.

Наконец, приведем формулу потерь для случая 2, когда система возбуждается бесконечно тонким заряженным кольцом радиуса $b$ (при $\frac{a-b}{a} \ll 1$):

$$W^{II} = 10^{-2}\,\frac{q^2 D}{a(a-b)}. \tag{13}$$

## Литература

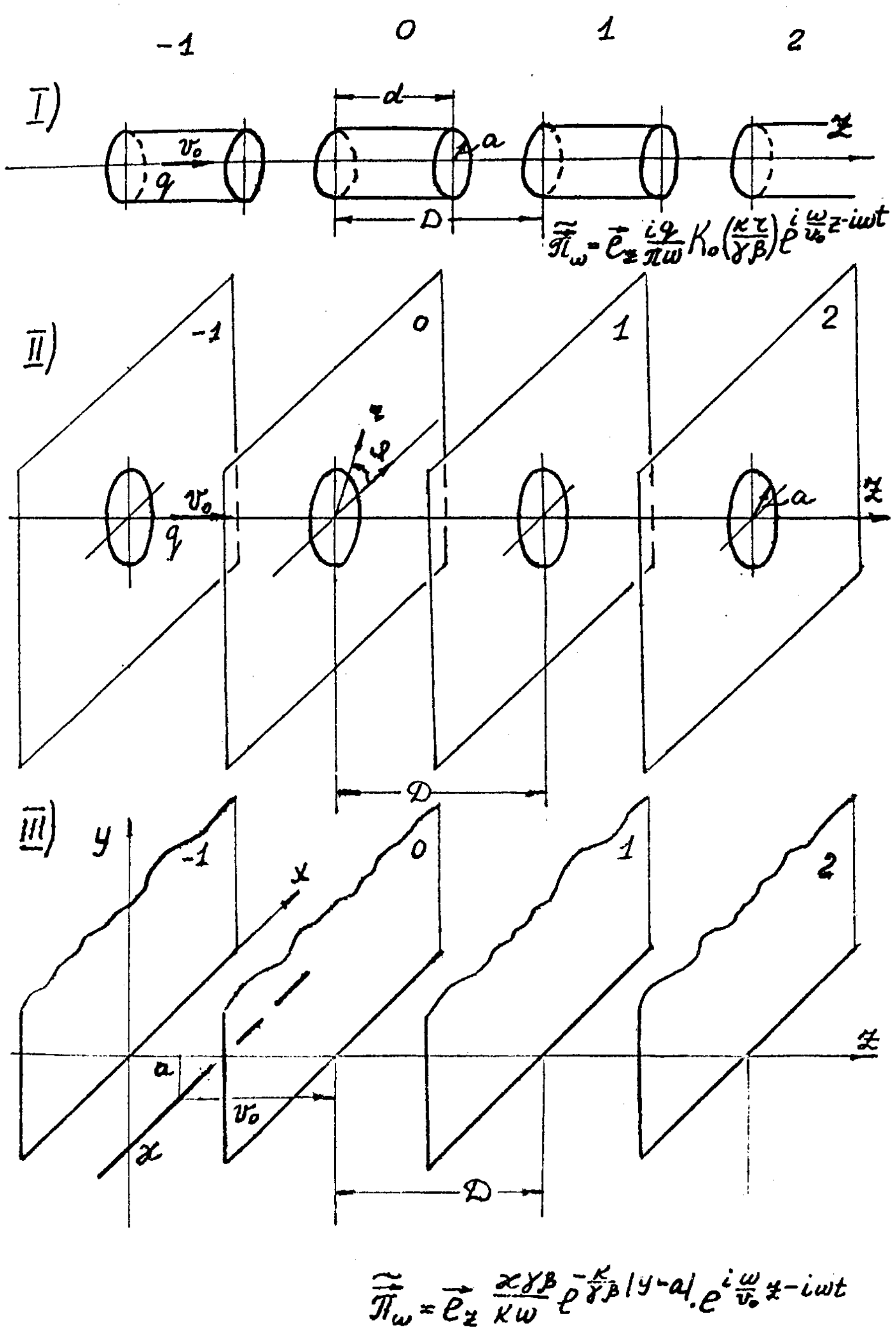

1. А.И.Ахиезер, Г.Я.Люборский, Я.Б.Файнберг. ЖТФ, 25, 2526 (1955).
2. О.А.Колпаков, В.И.Котов, Ом Сан Ха. ЖТФ, 35, 26 (1965).
3. Б.М.Болотовский, Г.В.Воскресенский. УФН, 94, 377 (1968).
4. А.Г.Бонч-Осмоловский, Г.В.Долбилов, О.А.Колпаков, А.Б.Кузнецов, В.Н.Мамонов, К.А.Решетникова, Н.Б.Рубин, С.Б.Рубин, В.П.Саранцев. Препринт ОИЯИ, Р9-4171, Дубна, 1968.
5. A.M.Sessler. Beam Loading in the Accelerating Column of an Electron Ring Accelerator. LRL, Berkeley, 1968.





6. М.В.Федорюк. Журн. вычислит. матем. и мат. физики., 2, 145 (1962).

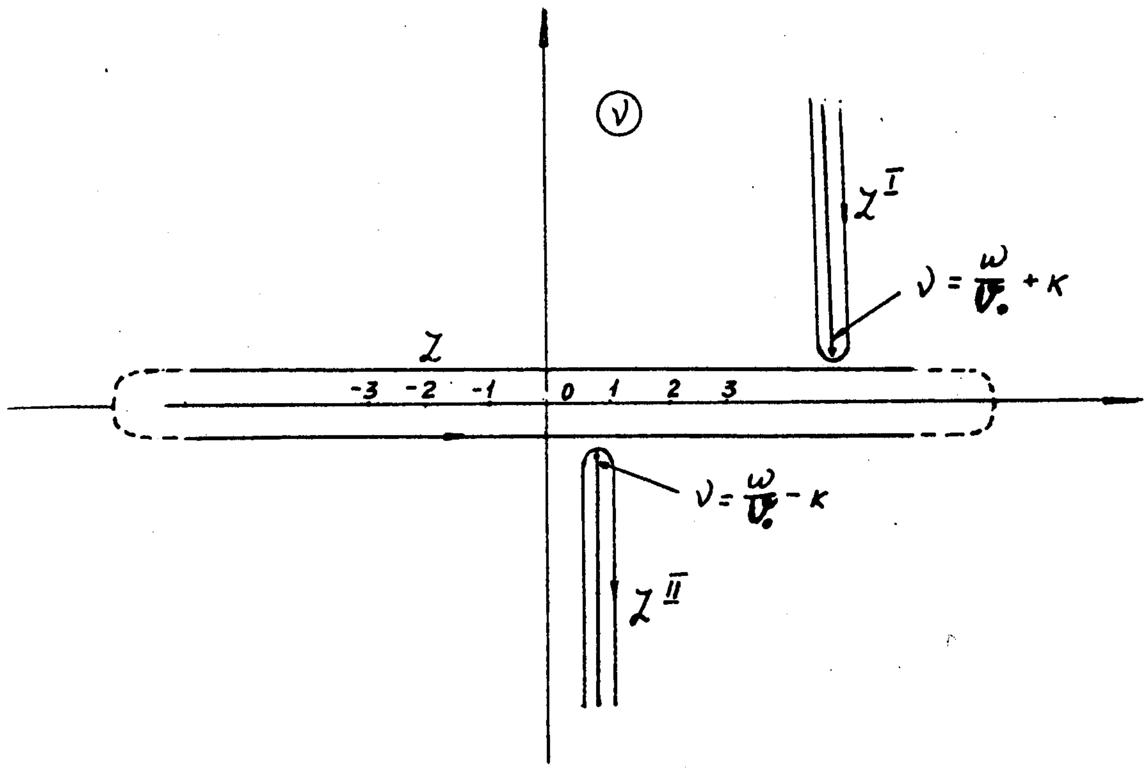

Рукопись поступила в издательский отдел
9 октября 1969 года.



I)
II)
III)
-1
0
1
2
$\vec{\tilde{\Pi}}_\omega = \vec{e}_z \frac{iq}{\pi\omega} K_0\left(\frac{\kappa r}{\gamma\beta}\right) e^{i\frac{\omega}{v_0}z - i\omega t}$
$\vec{\tilde{\Pi}}_\omega = \vec{e}_z \frac{\varkappa\gamma\beta}{\kappa\omega} e^{-\frac{\kappa}{\gamma\beta}|y-a|} \cdot e^{i\frac{\omega}{v_0}z - i\omega t}$


Рис. 1





$\nu = \frac{\omega}{v_0} + \kappa$
$\nu = \frac{\omega}{v_0} - \kappa$


Рис. 2