ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 4652

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

Э.Н.Криворуцкий, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович

НЕЛИНЕЙНО-ДРЕЙФОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

1969

Р9 - 4652

Э.Н.Криворуцкий, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович

НЕЛИНЕЙНО-ДРЕЙФОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Направлено в ЖТФ

Криворуцкий Э.Н., Маханьков В.Г., Цытович В.Н. P9-4652

Нелинейно-дрейфовые неустойчивости в турбулентной плазме

Показано, что высокочастотная турбулентность плазмы оказывает существенное влияние на спектр и раскачку (затухание) дрейфовых колебаний. Стабилизация дрейфовой неустойчивости возможна при больших градиентах температуры.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1969

Krivorutsky E.N., Makhan'kov V.G., Tsytovich V.N. P9-4652

Non-Linear-Drift Instabilities in Turbulent Plasma

It has been shown that h.f. plasma turbulence effects essentially the spectrum and excitement (attenuation) of drift oscillations. It is possible to stabilize the drift instability at large temperature gradients.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1969

1. Обычно теория дрейфовых неустойчивостей [1,2] не учитывает влияния высокочастотных пульсаций на спектр и раскачку дрейфовых колебаний. Вместе с тем в экспериментальных условиях плазма часто является турбулентной и в ней возбуждены различные колебания. Цель настоящей работы – обратить внимание на то, что даже при малой амплитуде высокочастотных пульсаций $\frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$ [x/] возможно коренное изменение спектра дрейфовых колебаний. Ограничимся важным для приложений случаем, когда электроны плазмы замагничены и описываются дрейфовым приближением [3]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{m} E_z \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{c}{H_0} E_y \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \qquad (1)$$

Считаем высокочастотные и низкочастотные колебания потенциальными. Рассмотрим влияние развитой турбулентности на частотах $\omega_{0e} + \frac{3k_1^2 v_{Te}^2}{2\omega_{0e}}$ (z – направление H_0) $\omega_{He} \gg \omega_{0e}$ на спектр дрейфовых колебаний. Будем считать отсутствующими частицы,

x/ W – энергия, заключенная в высокочастотных колебаниях, $n_0 T_e$ – тепловая энергия частицы плазмы.

резонансные с высокочастотной турбулентностью[x]. Тогда в квазилинейном приближении в однородной плазме частицы не взаимодействуют с высокочастотной турбулентностью. Это является, однако, лишь следствием обращения в нуль "интеграла соударений" частиц и турбулентных пульсаций. Наличие указанных эффективных соударений частиц и пульсаций ν_{ef} может проявиться в распространении низкочастотных возмущений в плазме. Если частота возмущений много меньше ν_{ef}, то дисперсионные свойства плазмы могут коренным образом изменяться. Это важно для проблем удержания плазмы, т.к. согласно существующим представлениям именно развитию низкочастотных колебаний приписываются наблюдаемые экспериментально эффекты аномальной диффузии плазмы /1/. С другой стороны, известно /4/, что эффективные частоты соударений частиц и турбулентных пульсаций при развитой высокочастотной турбулентности могут быть весьма высокими (приближающимися к ω_{0e} при $W \to n_0 T_e$). Таким образом, оказывается возможным изменение дисперсионных свойств плазмы в широком диапазоне частот[xx].

2. В рамках сделанных допущений теория может быть построена в общем виде /8/. Поле E и функцию распределения f разложим на турбулентные (T) и регулярные (R) составляющие, определив первые равенством $\langle E^T \rangle = 0$, $\langle f^T \rangle = 0$, где $\langle\ \rangle$ – означает усреднение по статическому ансамблю.

[x] Учёт экспоненциально малого числа частиц, резонансных с высокочастотной турбулентностью, не изменяет получаемых ниже выводов, относящихся к основной массе частиц.

[xx] Следует отметить, что высокочастотная турбулентность, например, вызванная пучковой /5,6/ или конусной /7/ неустойчивостями в реальных экспериментальных условиях, развивается за времена, много меньшие характерных времен развития дрейфовых неустойчивостей. Поэтому низкочастотные дрейфовые колебания такой плазмы должны описываться с учётом эффектов, рассматриваемых в настоящей работе.

Рассмотрим возмущения, раскладывая все величины по E^R. Возмущению будут подвержены также турбулентные пульсации, которые станут под действием возмущения неоднородными и нестационарными. Эти эффекты легко могут быть учтены точно без каких-либо дополнительных предположений об отношении частот и длин волн возмущений к частотам и длинам волн турбулентных пульсаций. Эффекты неоднородности плазмы рассматриваются в рамках локального подхода[x/]. Уравнение для линейной по полю возмущения поправки δf^R к регулярной части f_0^R функции распределения может быть получено в общем виде как при $\omega \gg \nu_{ef}$, так и при $\omega \ll \nu_{ef}$. Для дальнейшего достаточно использовать приближенное уравнение для δf^R

$$-i(\omega - k_z v_z)\delta f_k^R + \frac{eE_k}{mk}\left(k_z \frac{\partial f_0^R}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_H}\frac{\partial f_0^R}{\partial x}\right) = \tag{2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v_z}(\omega - k_z v_z)(-i\delta n_k D)\frac{\partial f_0^R}{\partial v_z}; \quad \delta n_k = \int \delta f_k^R d\vec{v}.$$

Уравнение (2) получено из точного интегрального уравнения для δf_k путем разложения по $\frac{\omega}{\omega_{0e}}$, $\frac{k}{k_1}$, $\frac{W}{n_0 T_e}$ (k – волновое число высокочастотных пульсаций, $W = \int W_{k_1} dk_1$). Кроме того в (2), простоты ради, турбулентность считается одномерной.

Вычисление интеграла соударений частиц и турбулентных пульсаций проводится ниже двумя методами /9/.

---

x/ Т.е. предполагается, что длины волн дрейфовых колебаний много меньше характерного размера неоднородности плазмы и возмущения распространяются за время их нарастания или затухания на расстояния меньше размера неоднородности плазмы.

Первый из используемых методов основан на разложении ядер уравнений, описывающих отклонение от основного турбулентного состояния по степеням турбулентного поля исходного турбулентного состояния. Так как при этом берется лишь первый член разложения, то учитываются турбулентные столкновения с максимальным ν_{ef} и, следовательно, могут рассматриваться низкочастотные возмущения с частотами $\omega \ll \nu_{ef\,max}$, но большими, чем следующая, неучтенная частота турбулентных столкновений. Критерии применимости данного подхода оказываются /9/ тесно связанными с эффектами нелинейного изменения свойств высокочастотных пульсаций.

Если эффекты нелинейного сдвига высокой частоты порядка низкой частоты исследуемого возмущения, то следует учитывать этот нелинейный сдвиг. В /9/ показано, что это приводит к перенормировке функции Грина (в.ч.) плазмонов и заряда частиц. Там же развита методика, позволяющая учесть эту перенормировку путем составления интегрального уравнения для ядер интегралов соударений частиц и турбулентных пульсаций. Использование диэлектрической проницаемости, найденной путем суммирования рядов теории возмущений по энергии турбулентности в ядрах интеграла соударений частиц и турбулентных пульсаций, позволяет исследовать низкочастотные колебания в области, где нелинейные эффекты сдвига высокой частоты делают первый метод неприменимым. Оба метода дополняют друг друга, т.к. решения интегрального уравнения могут быть легко найдены лишь в области, в которой первый метод не пригоден.

Приведем вначале результаты, полученные при разложении ядра интегралов соударений по невозмущенному турбулентному полю. Уравнение (2) удобно при этом записать в виде:

$$-i(\omega - k_z v_z)\delta f_k^R + \frac{e}{m}\frac{E_k^R}{k}\left(k_z \frac{\partial f_0^R}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_H}\frac{\partial f_0^R}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial v_z}(\omega - k_z v_z)\left(-ig\frac{\delta n_k}{n_0}k_z v_{Te}^2\right)\frac{\partial f_0^R}{\partial v_z},$$

где g выражается через энергию турбулентных пульсаций.

$$g = -\frac{\pi e^2 k_z}{v_{Te}^2 m_e^2 \omega_{0e}} \int \frac{dk_1}{\omega - k_z v_g} \frac{\partial}{\partial k_1} W_{k_1}; \; v_g = \frac{3 k_1 v_{Te}^2}{\omega_{0e}} . \qquad (4)$$

Из (2) легко получить выражение для диэлектрической проницаемости

$$\epsilon \approx \epsilon_k^{(e)} + \epsilon_k^{(i)} - 1; \quad \epsilon_k^{(i)} = 1 + \frac{4\pi e^2}{m_i k^2} \int \frac{dv_z}{\omega - k_z v_z} \left(k_z \frac{\partial f_0^{R(i)}}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{Hi}} \frac{\partial f_0^{R(i)}}{\partial x}\right)$$

(5)

$$\epsilon_k^{(e)} = 1 + \left[1 + \frac{v_{Te}^2 g k_z}{n_0} \int \frac{dv_z}{\omega - k_z v_z} \frac{\partial f_0^{R(e)}}{\partial v_z}\right] \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \int \frac{dv_z}{\omega - k_z v_z} \left(k_z \frac{\partial f_0^{R(e)}}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\omega_{He}} \frac{\partial f_0^{R(e)}}{dx}\right).$$

3. При $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ имеем

$$\epsilon_k^{(e)} = 1 + \frac{\left[1 + \frac{i}{k_z v_{Te}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\omega - \omega_* + \omega_* \frac{\eta}{2}\right)\right] \omega_{0e}^2}{\left[1 + g\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k_z v_{Te}}\right)\right] k^2 v_{Te}^2},$$

$$\omega_* = -\frac{T_e k_y}{m_i \omega_{Hi}} \frac{\partial \ln n_0}{dx} .$$

Отсюда при $g \gg 1$ имеем

$$\operatorname{Im} \epsilon_k^{(e)} = \frac{\omega_{0e}^2}{g k^2 v_{Te}^2} i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*}{k_z v_{Te}} \left(\frac{\eta}{2} - 1\right). \qquad (6)$$

Таким образом, плазма становится устойчивой относительно раскачки быстрой дрейфовой волны при $\eta > 2$. Если $\omega \ll k_z v_y$, то

$$g \gg 1\ ;\quad g = \frac{1}{12}\ \frac{\omega_{0e}^2}{v_{Te}^2 n_0 T_e} \int W_{k_1} \frac{dk_1}{k_1^2}$$

при

$$\frac{1}{3}\ \frac{k^2}{k_1^2} \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg 12\ \frac{v_{Te}^2}{v_{ph}^2}\ ;$$

что при больших $v_{ph} = \omega_{0e}/k_1$ заведомо может выполняться при $\frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$ x/. Ограничение на $\frac{W}{n_0 T_e}$ сверху связано с нелинейным сдвигом высокой частоты, на который накладывается требование /9/

$$\frac{k}{k_1}\ \max(\omega\ ,\ k v_g) \gg |\,\omega_1 - \omega_{k_1}\,|\ , \qquad (7)$$

где $|\omega_1 - \omega_{k_1}|$ – нелинейная поправка к в.ч. – полю. Множитель k/k_1 возникает в связи с частичной компенсацией положительно и отрицательно частотных частей в (4). В условиях $g \gg 1$ изменяется и спектр колебаний $\omega = \frac{\omega_*}{2} g + \sqrt{\frac{1}{4} g^2\omega_*^2 + k_z^2 v_s^2 g}$. Для быстрой ветви имеем $\omega \approx \omega_* g$ при $k_z v_s \ll \sqrt{g}\,\omega_*$, т.е. $\omega \gg k_z v_{Ti}$ при $\frac{W}{n_0 T_e} \gg$ $\gg 12\ \frac{\omega_*}{k_z v_{Ti}}\ \frac{v_{Te}^2}{v_{ph}^2}$. Для медленной $\omega = -\frac{k_z^2 v_s^2}{\omega_*}$, при $\eta > 2$ эта волна раскачивается. Из $\omega = g\,\omega_* \ll k_z v_g \ll \frac{\sqrt{g}\,\omega_*}{v_s} v_g$ имеем $1 \ll g \ll \frac{v_g^2}{v_s^2}$, т.е. $v_g \gg v_s$ или $v_{ph}/v_{Te} \ll 3(m_i/m_e)^{1/2}$. Это означает, что $\frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{m_e}{m_i}$. В условиях, когда v_g мало или

x/ Условие $k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_g$ означает $v_g > v_{Ti}$, т.е. $3v_{Te}^2 \gg v_{ph} v_{Ti}$. Последняя величина, однако, также может быть весьма малой.

$\omega \gg k_z v_g$, появляются новые гидродинамические нелинейно-дрейфовые неустойчивости. В этом случае $g = \frac{3}{4}\,\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\,\frac{W}{n_0 T_e}$ и при $\omega \gg k_z v_s$ и $g \gg 1$ получим

$$\omega = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\, k_z v_{Te} \left(\frac{3\,\omega_*}{4\,k_z v_{Te}}\right)^{1/3} \left(\frac{W}{n_0 T_e}\right)^{1/3}. \tag{8}$$

Однако из $g \gg 1$ следует $\frac{W}{n_0 T_e} \gg \left(\frac{\omega_*}{k_z v_{Te}}\right)^2$, что при $\frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$ требует весьма малых значений $\frac{\omega_*}{k_z v_{Te}}$, т.е. неустойчивость может развиваться на весьма малых длинах волн, тем меньших, чем больше неоднородность плазмы. Совместное выполнение неравенств $k_z v_s$, $k_z v_g \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ и (7) приводит к

$$\frac{k_z v_{Te}}{\omega_*}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2} \ll \frac{W}{n_0 T_e} \ll \left[\frac{k^6}{k_i^6}\,\frac{\omega_*}{k_z v_{Te}}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)\left(\frac{v_{Te}}{v_{ph}}\right)^9 18^3\right]^{1/2} \text{при } v_{Te}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} \ll v_{ph} \ll 3\frac{v_{Te}^2}{v_{Ti}}$$

$$\left(\frac{k}{k_i}\right)^{3/2} \frac{k_z v_{Te}\sqrt{\omega_*}}{100\,\omega_{0e}^{3/2}}\left(\frac{v_{ph}}{v_{Te}}\right)^3 \ll \frac{W}{n_0 T_e} \ll \frac{k_z v_{Te}}{\omega_*}\left(\frac{3 v_{Te}}{v_{ph}}\right)^3 \text{ при } v_{ph} \ll v_{Te}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4},$$

что указывает на невозможность раскачки очень малых длин волн, которые могут быть неопасными в проблеме удержания плазмы. В том случае, когда разложение интеграла соударений частиц и пульсаций в ряд по турбулентному полю невозмущенного состояния невозможно, $v_{ph} \gg 3 v_{Te}^2 / v_{Ti}$, используя простое обобщение методики /9/ на случай неоднородной плазмы, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\epsilon_k^{(i)} + \frac{\epsilon_k^{(i)} - 1}{1 + d\int \frac{d v_z}{\omega - k_z v_z}\, k_z \frac{\partial f_0^{(e)R}}{\partial v_z}} \qquad d = \frac{d_i}{1 + \frac{m_e n_0}{T_e + T_i} d_i}, \tag{10}$$

$$\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{n_0^2 m_e \omega^2} W; \quad \omega \gg k_z v_g .$$

$\omega \ll k_z v_{Te}$, $\omega \gg k_z v_g$ имеем:

$$[-\frac{\omega_*}{\omega} + \frac{(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega-\omega_*(1-\eta_e/2)}{k_z v_{Te}})(1+\frac{3}{4}\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\frac{T_e}{T_0+T_i}\frac{W}{n_0 T_e}}{(1+\frac{2T_e+T_i}{T_e+T_i}+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{k_z v_{Te}})\frac{3}{4}\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\frac{W}{n_0 T_e}}] = 0 .$$

нии учтен конечный ларморовский радиус ионов, к как в-ч – поле не меняет линейной части $\epsilon_k^{(1)}$. $\overline{\ \ }_{Te}^{2}$. При этом возникают ионно-звуковые колеба-

$$+ \frac{k_z^2 v_s^2 + \frac{3}{4} k_z^2 v_{Te}^2 \frac{T_e}{T_e+T_i}\frac{W}{+n_0 T_e}}{\omega_*} \qquad (12)$$

$$\frac{k_z^2 v_s^2 + \frac{3}{4} k_z^2 v_{Te}^2 \frac{T_e}{T_e+T_i}\frac{W}{n_0 T_e}}{\omega} .$$

и

$$\frac{T_e}{2T_e+T_i} k_z v$$

то возникают волны со с

$$\omega_1 = \frac{}{\frac{T_e}{2T_e+T_i}}$$

Наличие турбулентн как в первом, так и во в области

$$\omega \gg k$$

Дисперсионное уравнение

$$\frac{k_\perp^2 \omega_{0i}^2}{k_z^2 \omega_{Hi}^2}(1 + \frac{\omega}{}$$

$$\frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}(1 - \frac{\omega_*^{(e)}(1+\eta_e)}{}$$

и

$$\frac{T_e}{2T_e+T_i}\, k_z v_{Ti} \ll \omega_* \ll k_z v_{Te}\, \frac{T_e}{2T_e+T_i},$$

то возникают волны со спектром

$$\omega_1 = \frac{\omega_*}{\dfrac{T_e}{2T_e+T_i} + \dfrac{k_\perp^2 v_s^2}{\omega_{Hi}^2}} + \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega_*}, \tag{14}$$

$$\omega_2 = -\frac{k_z^2 v_s^2}{\omega_*}.$$

Наличие турбулентности не влияет на условия раскачки колебаний как в первом, так и во втором случае. Рассмотрим дрейфовые колебания в области

$$\omega \gg k_z v_{Te}, \quad \omega \gg k_z v_g.$$

Дисперсионное уравнение в этой области можно записать в виде

$$\frac{k_\perp^2 \omega_{0i}^2}{k_z^2 \omega_{Hi}^2}\left(1 + \frac{\omega_*^{(i)}(1+\eta_i)}{\omega}\right) - \frac{\omega_{0i}^2}{k_z^2 v_{Ti}^2}\,\frac{\omega_*^{(i)}}{\omega} -$$

$$- \frac{\dfrac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}\left(1 - \dfrac{\omega_*^{(e)}(1+\eta_e)}{\omega} - \dfrac{\omega^2}{k_z^2 v_{Te}^2}\,\dfrac{\omega_*^{(e)}}{\omega}\right)}{1 + \dfrac{n_0 d_1}{v_{Te}^2}\,\dfrac{T_e}{T_e+T_i} - \dfrac{k_z^2 n_0 d_1}{\omega^2}}\left(1 + \frac{n_0 d_1}{v_{Te}^2}\,\frac{T_e}{T_e+T_i}\right) = 0. \tag{15}$$

Существенное изменение спектра под влиянием турбулентности происходит, если эффекты, связанные с в-ч - полем, доминируют над эффектами, связанными с конечным ларморовским радиусом ионов

$$(1 + \frac{3}{4} \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \frac{T_e}{T_e + T_i} \frac{W}{n_0 T_e}) -$$

$$ \qquad (16)$$

$$\frac{{}_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \frac{\omega_*^{(1)}}{\omega} \frac{W}{n_0 T_e} = 0$$

$$< (\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega_*^2}) \frac{W}{n_0 T_e} .$$

юказывает, что наличие турбулентности приводит
периодических неустойчивостей.
ваний, приведенных в этой работе, показывают,
область цараметров, в которой дрейфовые
ьно, и турбулентная диффузия плазмы коренным
присутствия турбулентности или внешних сто-
тельно малой интенсивности.

Литература

ы теории плазмы, том 4, Атомиздат, 1964 г.

8. В.Н.Цытович. ДАН

9. В.Н.Цытович. ЖЭТФ

8. В.Н.Цытович. ДАН СССР, 180, 1968 г.

9. В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 57, 141, 1969 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 августа 1969 года.