

5530
№ - 696

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

Р9 - 4464

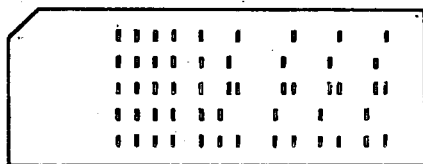


ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Е.П.Жидков, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович,
Чой Зай Хен

РАСЧЕТ СПЕКТРОВ
СТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

1969



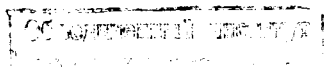
Объединенный институт
ядерных исследований
ЛВТА

P9 - 4464

Е.П.Жидков, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович,
Чой Зай Хен

РАСЧЕТ СПЕКТРОВ
СТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

Направлено в "Plasma Physics"



7805/12 49.

§ I. Постановка проблемы стационарной турбулентности
плазмы

В настоящее время нелинейная теория взаимодействия турбулентных пульсаций плазмы хорошо разработана /1/, что позволяет ставить и решать важные для практических приложений вопросы динамики нелинейного развития неустойчивостей, изменения во времени спектра турбулентных пульсаций. Согласно современным воззрениям, нелинейные эффекты играют важную роль в проблемах магнитного удержания плазмы, аномального сопротивления, аномальной теплопроводности и т.п. /2/, т.е. определяют наиболее важные макроскопические характеристики неустойчивой плазмы. К сожалению, однако, чаще всего при попытке приложения теории к объяснению наблюдений приходится ограничиваться грубыми оценками порядков величин для этих характеристик, т.к. точное аналитическое решение нелинейных интегральных уравнений часто является затруднительным.

Одной из важных проблем теории является расчет спектров стационарной турбулентности плазмы. В работе /3/ (см. также /10/) такой спектр для ленгмювских пульсаций удалось рассчитать аналитически в асимптотической области. Для того, чтобы дать представление о структуре спектра и определить асимптотическую область, следует коротко остановиться на физических процессах, приводящих в турбулентной плазме к установлению стационарного спектра. Общая картина установления спектра согласно /3/ аналогична той, которая имеет место в турбулентной жидкости. Пусть W_k - энергия турбулентных пульсаций в I см³ в интервале k до $k + dk$, а

$$\int W_k dk = W, \quad (I.I)$$

где W - полная энергия турбулентных пульсаций в I см³,

K - волновое число пульсаций, $\ell = \frac{2\pi}{K}$ - их характерный размер. Для установления стационарной турбулентности необходимо наличие такой области K , в которой генерируются пульсации; области, в которой энергия трансформируется вдоль спектра, и области, в которой энергия пульсаций диссипирует. Для ленгмюровских пульсаций генерация происходит обычно при достаточно больших K (но при этом $K < K_0 = \frac{\omega_{pe}}{V_{Te}}$, $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}}$ - плазменная частота, V_{Te} - средняя тепловая скорость электронов). Энергия трансформируется из-за нелинейных взаимодействий в область меньших K . Темп такой трансформации уменьшается с уменьшением K , и при некоторых $K \sim K_0$ эффект трансформации сравнивается с эффектом поглощения. Здесь энергия останавливается, накапливается и поглощается. Таким образом, физические соображения указывают на то, что характерный спектр должен иметь вид, примерно изображенный на рис. 1. Обозначим через K_0 значение волнового числа в максимуме этого спектра.

$$K_0 = \frac{2\pi}{L} \quad (I.2)$$

L - основной масштаб турбулентности (по аналогии с жидкостями ^{/4/}). Асимптотической областью (так же, как в жидкостях) является область

$$K \gg K_0. \quad (I.3)$$

В этой области удалось найти аналитическое выражение для спектра

$$W_K = \frac{\text{const}}{K^\nu}, \quad (I.4)$$

где ν - величина, стремящаяся при увеличении интенсивности турбулентных пульсаций к постоянной 2,84 (в жидкости $\nu = \frac{5}{2}$).

Такой вид спектра имеет место, если $K_0 \ll K \ll K_*$, где

$$K_* = \omega_{pe} \frac{V_{Ti}}{3V_{Te}}, \quad V_{Ti} - \text{средняя тепловая скорость ионов.}$$

В общем случае, в ^{/3/} для величины ν получено уравнение,

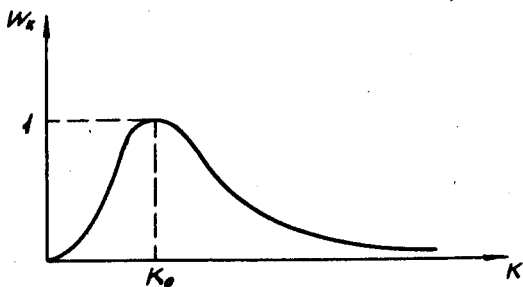


Рис. 1 . Примерный вид спектра стационарной лентмгировской турбулентности.

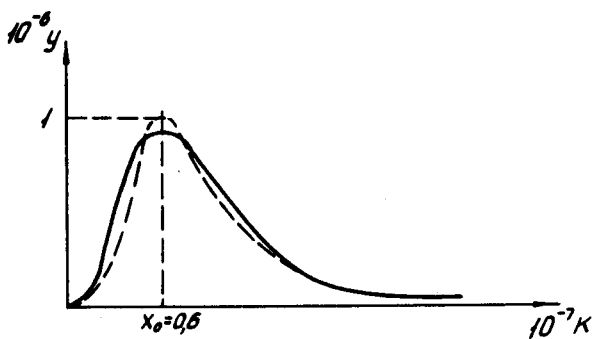


Рис. 2 . Сплошная кривая соответствует спектру, рассчитанному на ЭВМ. Пунктиром нанесено начальное приближение.



Рис. 3 .

позволяющее рассчитывать численно ν как функцию ряда параметров плазмы (эффективной частоты кулоновских соударений, поглощения на быстрых частицах, ускоряемых турбулентностью /5/.

При малой энергии турбулентности возникает слабая зависимость ν от K , т.е. спектр (IA) будет лишь приближенно степенным. При $K \gg K_*$ спектр становится почти постоянным /6/. Характерным следствием этого анализа является результат, согласно которому K_* , т.е. основной масштаб турбулентности, является функцией энергии турбулентности или, что то же самое, мощности генерации турбулентности при больших K . Этот факт (наряду с обращением направления трансформации энергии) является одним из самых характерных отличий ленгмюровской турбулентности плазмы от турбулентности жидкостей (где K_* соответствует области генерации). Для получения полного спектра турбулентности во всех областях K использование аналитических методов оказывается невозможным.

Цель настоящей работы состоит в нахождении спектра турбулентности во всей области наиболее существенных K , включая область $K \sim K_*$ и область $K < K_*$ и апробации результатов приближенных аналитических решений в асимптотической области. Исследование проводится с помощью численных методов, основанных на введении непрерывного параметра.

Одной из важных проблем, которую трудно проанализировать аналитически, является проблема устойчивости находимых стационарных решений. При численном решении, которое используется здесь, получена быстрая сходимость, указывающая, по-видимому, на устойчивость решений вблизи тех параметров, которые использовались для численного счета.

Основные уравнения, использованные для расчета спектров, те же, что и в /3/. Спектр предполагается трехмерным изотроп-

ными и, следовательно, зависящим лишь от модуля K . Заметим, что предположение об изотропии хорошо оправдано, т.к. изотропизация пульсаций является одним из наиболее быстрых нелинейных процессов $^1/1$. Учитываются эффекты 4-плазменного взаимодействия (рассеяние плазмонов на плазмонах), индуцированного рассеяния плазмонов на ионах и поглощения плазмонов из-за кулоновских соударений. Уравнения справедливы при $K \ll K_*$. Считается, что источники, генерирующие турбулентность, находятся вне этой области $K > K_*$. Наличие их учитывается предположением о стационарном уровне турбулентности при непрерывной диссипации из-за парных соударений и ускорения частиц; т.е. при $K \sim K_*$ имеется непрерывный поток энергии, восполняющий энергию, диссипируемую в исследуемой области спектра. При сделанных предположениях нелинейное уравнение, описывающее спектр ленгмювских пульсаций, имеет вид $^1/1$:

$$0 = \frac{dW_k}{dt} = -\nu_e W_k - \gamma_k W_k + W_k \left[\int_0^k Q(k, k_1) W_{k_1} dk_1 - \int_0^k Q(k_1, k) W_{k_1} dk_1 \right] + \int dk_1 dk_2 dk_3 R(k, k_1, k_2, k_3) (k^2 W_k W_{k_1} W_{k_2} W_{k_3} + K_1^2 W_{k_1} W_{k_2} W_{k_3} W_k - K_2^2 W_k W_{k_1} W_{k_2} - K_3^2 W_k W_{k_1} W_{k_3}) \quad (I.5)$$

Здесь в правой части первый член описывает поглощение ленгмювских колебаний из-за парных соударений, второй - поглощение на быстрых частицах, третий - индуцированное рассеяние плазмонов на ионах и, наконец, четвертый - рассеяние плазмонов друг на друге. Кроме того, введены следующие обозначения:

$$Q(k, k_1) = \frac{\sqrt{2\pi}}{8\pi\omega} \frac{T_e}{m_e v_{Te}} \frac{(k_1^2 - k^2)}{(1 + \nu_e/\gamma_{k_1})^2} k_1^2 \left(k_1^2 + \frac{2}{5} k^2 \right), \quad (I.6)$$

если $K > K_1$, а при $K < K_1$ в (I.6) нужно сделать замену $K_1 \rightarrow K$ и

$$R(k, k_1, k_2, k_3) = \frac{\sqrt{2\pi} \delta(k^2 + k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{48 \nu_e^3 \pi^2 T_e^2 (1 + \nu_e/\gamma_{k_1})^2 k^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \left\{ \frac{(k_2^2 - k_3^2)^4 k_1^5}{5(k^2 - k_1^2)^3} (k^2 - \frac{2}{7} k_1^2) - \right. \quad (I.7)$$

$$\left. - \frac{(k_2^2 - k_3^2)^2 k_1^3}{15(k^2 - k_1^2)} (5k^4 - 24k^2 k_1^2 + 43k_1^4) + \frac{k_1^3}{315} (622k^4 + 825k_1^2 k^2 + 672k_1^2 k_1^2 + 105k_1^6) \right\}$$

Здесь $KK_1 < K_2K_3$; $K > K_1$. Если $K < K_1$, но $KK_1 < K_2K_3$, то следует сделать замену $K \rightleftharpoons K_1$. Если $KK_1 > K_2K_3$ и $K_2 > K_3$, то $K \rightleftharpoons K_2$, $K_3 \rightleftharpoons K_1$, (I.8) и если $KK_1 > K_2K_3$ и $K_2 < K_3$, то $K \rightleftharpoons K_3$, $K_2 \rightleftharpoons K_1$.

Относительная эффективность процессов индуцированного рассеяния и рассеяния на плазмонах (I.6) и (I.7) зависит от параметров плазмы, от величины потока энергии, от интервала волновых чисел и от положения максимума спектра. Введя безразмерные переменные $\xi = (K_1/K)^2$, $\eta = (K_2/K)^2$ для $KK_1 < K_2K_3$ и $\xi = (K_3/K)^2$, $\eta = (K_2/K)^2$

для $KK_1 > K_2K_3$, учитывая, что $K^2 + K_1^2 - K_2^2 - K_3^2 = 0$, и условия (I.8), получим (пренебрегая поглощением на быстрых частицах)

$$1 = a \left[\int_1^{\xi_0} K_1(\xi) W_{\xi} d\xi - \int_0^{\eta} K_2(\eta) W_{\eta} d\eta \right] + b \left[\int_0^{\eta} d\eta \int_0^{\xi} d\xi L(\xi, \eta) V(\xi, \eta) + \int_1^{\xi_0} d\xi \int_0^{\eta} d\eta M(\xi, \eta) V(\xi, \eta) + 2 \int_1^{\xi_0} d\xi \int_0^{\eta} d\eta N(\xi, \eta) U(\xi, \eta) \right], \quad (I.9)$$

где

$$a = \frac{\pi \sqrt{2\pi}}{4} \frac{(T_e/T_i)^{3/2} (m_i/m_e)^{1/2}}{(1 + T_e/T_i)^2} \frac{K_0 V T_e}{V_e} \frac{1}{\xi_0}, \quad \xi_0 = \left(\frac{K_0}{K}\right)^2 \quad (I.10)$$

$$b = \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{T_e/T_i}{1 + T_e/T_i}\right)^2 \frac{\omega_{0e}^2}{K_0^2 V T_e^2 V_e},$$

а ядра суть

$$K_1(\xi) = \frac{\xi - 1}{\xi} \left(\xi + \frac{2}{\xi}\right), \quad K_2(\eta) = \frac{1 + \frac{2}{\xi} \eta}{\xi^{1/2}} (1 - \eta) \quad (I.11)$$

$$L(\xi, \eta) = \frac{(2\eta - \xi - 1)^4 \xi^{5/2}}{5(1 - \xi)^3} \left(1 - \frac{3}{\xi}\right) - \frac{\xi^{3/2} (2\eta - \xi - 1)^2}{15(1 - \xi)} (5 - 24\xi + 45\xi^2) + \frac{\xi^{3/2}}{315} (622\xi^3 + 825\xi^2 + 672\xi + 105)$$

$$M(\xi, \eta) = \frac{(2\eta - \xi - 1)^4}{5(\xi - 1)^3} \left(\eta - \frac{3}{\xi}\right) - \frac{(2\eta - \xi - 1)^2}{15(\xi - 1)} (5\eta^2 - 24\eta + 45) + \frac{1}{315} (622 + 825\xi + 672\xi^2 + 105\xi^3) \quad (I.12)$$

$$N(\xi, \eta) = \frac{(2 - \xi - \eta)^4 \xi^{5/2}}{5(\eta - \xi)^3} \left(\eta - \frac{3}{\xi}\right) - \frac{(2 - \eta - \xi)^2 \xi^{3/2}}{15(\eta - \xi)} (5\eta^2 - 24\eta + 45) + \frac{\xi^{3/2}}{315} (622\xi^3 + 825\xi^2\eta + 672\xi\eta^2 + 105\eta^3)$$

$$V_{(\xi, \eta)} = \left[\frac{w_5 w_7 w_{1+\eta-1}}{w_0} + \xi w_7 w_{1+\xi-\eta} - \eta w_5 w_{1+\eta-1} - w_5 w_7 (1+\xi-\eta) \right] \frac{1}{\xi^2 \eta^2 (1+\xi-\eta)^2} \quad (I.13)$$

$$U_{(\xi, \eta)} = \left[\frac{w_5 w_7 w_{\xi+\eta-1}}{w_0} + (\xi+\eta-1) w_5 w_7 - \xi w_7 w_{\xi+\eta-1} - \eta w_5 w_{\xi+\eta-1} \right] \frac{1}{\xi^2 \eta^2 (\xi+\eta-1)^2}$$

$$w_0 = \frac{W_k K_0}{4\pi n_0 T_e}, \quad w_5 = \frac{K_0 W_k v}{4\pi n_0 T_e}$$

В следующем параграфе будет описан метод решения уравнения (I.9). Здесь мы приведем еще выбранные значения параметров, при которых это уравнение считалось на ЭВМ. $\frac{W}{n_0 T_e} = 10^{-6}$, $\omega_{ce} = 5,6 \cdot 10^3$, $v_e = 2,4 \cdot 10^{-6}$, $T_e = T_i$, $n_0 = 10^{-2}$, $V_{te} = 4,8 \cdot 10^7$, $V_{ti} = 1,1 \cdot 10^6$, такой выбор параметров плазмы и уровня турбулентности диктовался астрофизическими приложениями (в частности, проблемой ускорения субкосмических лучей).

§ 2. Методика численных расчетов и их результаты

Задача, решение которой было выполнено на электронной вычислительной машине (ЭВМ), ставится следующим образом.

Требуется решить интегральное уравнение

$$\begin{aligned} y(x) = & a(x) \int_0^{\infty} K(\xi) U[y(x), y(x\sqrt{\xi})] d\xi + \\ & + b \left\{ \int_0^1 d\eta \int_0^1 d\xi L(\xi, \eta) V[\xi, \eta, y(x), y(x\sqrt{\xi}), y(x\sqrt{\eta}), y(x\sqrt{1+\xi-\eta})] + \right. \\ & + \int_1^{\infty} d\eta \int_{\eta}^{\infty} d\xi M(\xi, \eta) V[\xi, \eta, y(x), y(x\sqrt{\xi}), y(x\sqrt{\eta}), y(x\sqrt{1+\xi-\eta})] + \\ & \left. + 2 \int_1^{\infty} d\eta \int_0^1 d\xi N(\xi, \eta) W[\xi, \eta, y(x), y(x\sqrt{\xi}), y(x\sqrt{\eta}), y(x\sqrt{1+\xi-\eta})] \right\}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

где $a(x) = 25,455 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2$; $b = 2545,5$; $x_0 = 0,6$

$$K(\xi) = \begin{cases} K_1(\xi) & \text{при } \xi \in [1, \infty) \\ K_2(\xi) & \text{при } \xi \in (0, 1]. \end{cases}$$

функции $K_1(\xi)$, $K_2(\xi)$, U, V, W, L, M, N задавались формулами [см. § I].

Уравнение (2.1) имеет, кроме тривиального, и другие решения. Выделение конкретного решения примененным методом можно осуществить путем указания области, в которой существует единственное решение уравнения, и выбором начального приближения $y_0(x)$, принадлежащего этой области.

Для решения задачи (2.1) применялся непрерывный аналог метода Ньютона, описание которого можно найти в работах [7;8]. При этом бесконечный верхний предел в интегралах уравнения (2.1) заменялся конечным числом R , достаточно большим для того, чтобы на отрезке $[0, R]$ характер поведения искомого решения $y(x)$ хорошо описывался.

Согласно примененному методу, уравнение (2.1) заменяется системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 & a(x) \int_0^R K(\xi) [U'_y(x) U(x, t) + U'_y(x\sqrt{\xi}) U(x\sqrt{\xi}, t)] d\xi + \\
 & + b \left\{ \int_0^1 d\eta \int_0^\eta L(\xi, \eta) [V'_y(x) U(x, t) + V'_y(x\sqrt{\xi}) U(x\sqrt{\xi}, t) + \right. \\
 & + V'_y(x\sqrt{\eta}) U(x\sqrt{\eta}, t) + V'_y(x\sqrt{\xi+\eta}) \cdot U(x\sqrt{\xi+\eta}, t)] d\xi + \\
 & + \int_1^R d\eta \int_\eta^R M(\xi, \eta) [V'_y(x) U(x, t) + V'_y(x\sqrt{\xi}) U(x\sqrt{\xi}, t) + V'_y(x\sqrt{\eta}) U(x\sqrt{\eta}, t) + \\
 & + V'_y(x\sqrt{\xi+\eta}) \cdot U(x\sqrt{\xi+\eta}, t)] d\xi + \\
 & + 2 \int_1^R d\eta \int_1^\eta N(\xi, \eta) [W'_y(x) U(x, t) + W'_y(x\sqrt{\xi}) U(x\sqrt{\xi}, t) + \\
 & + W'_y(x\sqrt{\eta}) U(x\sqrt{\eta}, t) + W'_y(x\sqrt{\xi+\eta-1}) \cdot U(x\sqrt{\xi+\eta-1}, t)] d\xi \left. \right\} - \\
 & - U(x, t) = a(x) \int_0^R K(\xi) U d\xi + b \left\{ \int_0^1 d\eta \int_0^\eta d\xi L V + \right. \\
 & + \int_1^R d\eta \int_\eta^R d\xi M V + 2 \int_1^R d\eta \int_1^\eta d\xi N W \left. \right\} \\
 & \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = U(x, t) \quad 10
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Интегро-дифференциальная система (2.2) решалась с начальным условием

$$y(x, 0) = f(x), \quad \dots, \quad (2.3)$$

где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\pi}} & , \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ \left(\frac{x_0}{x}\right)^3 & , \quad x_0 \leq x \leq 4. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь $x_0 = 0,6$ (в предположении, что $K_0 \approx \frac{1}{3} \frac{\omega_{000}}{c}$)

В первое уравнение системы (2.2) подставляется всюду вместо $y(x, t)$ ее значение при $t = 0$. Уравнение относительно $u(x, 0)$ становится линейным интегральным. Если все входящие в него интегралы заменить при $x = x_i$; $i = 1, 2, \dots, n$ приближенно суммами, то получим линейную алгебраическую систему относительно $u(x_i, 0)$ $i = 1, 2, \dots, n$. Найдя из этой системы $u(x_i, 0)$, подставляем их во второе уравнение системы (2.2). Заменяя производную $y'_t(x, t)$ при $t = 0$ приближенным выражением $\frac{y(x, \tau) - y(x, 0)}{\tau} = y'_t(x, 0)$, мы можем совершить один шаг интегрирования τ по переменной t и найти $y(x_i, \tau)$.

После этого весь цикл вычислений повторяется сначала с функцией $y(x_i, \tau)$ вместо $y(x_i, 0)$.

При $t \rightarrow +\infty y(x_i, t)$ сходится к $y_0(x_i)$ - приближенному решению задачи (2.1) (см. теорему I работы /8/). Практически достаточно было выполнить два шага интегрирования по t , чтобы максимальная разность между результатами первой и второй итераций не превышала 10^{-5} , и счет был прекращен. Малое число шагов по t объясняется хорошим выбором начального приближения, задаваемого формулой (2.4).

Следует отметить, что ядра интегралов, входящие в систему (2.1), имеют особенности (обращаются в бесконечность) на некоторых кусках границы области интегрирования. Однако лег-

ко убедиться в том, что эти особенности интегрируемы, если $y(x,t) = 0$ (х²) вблизи точки $X = 0$.

В результате проведенных расчетов было получено приближенное решение уравнения (2.1), которое приведено в таблице I. График решения изображен на рис. 2, кроме того, здесь же приведено начальное приближение $y_0(x)$, для того, чтобы указать тенденцию его изменения в процессе решения.

x	y(x)
0.0	0.000
0.2	0.272
0.4	0.773
0.6	0.877
0.8	0.479
1.0	0.248
1.2	0.142
1.4	0.095
2.4	0.020
2.8	0.010
3.2	0.007
3.6	0.005
4.0	0.003

Таблица I.

Полученное решение на промежутке $1,2 \leq X \leq 4$ было приближено методом наименьших квадратов функцией $f(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^v$. В результате v оказалось равным 3,89.

Цель настоящего параграфа—сравнить результаты численных расчетов с теоретическими исследованиями спектра стационарной ленгмюровской турбулентности, проведенными в [3]. Следует сразу оговориться, что, поскольку аналитическое решение справедливо лишь в асимптотической области волновых чисел, где $K \gg K_0$, то результаты такого исследования должны существенно зависеть от величины K_0 (что, кстати, отмечалось и в [3]). Так, в вышеупомянутой работе авторы аппроксимировали спектр функцией, которая равна нулю при $K < K_0$, а, начиная с некоторого $K' \gg K_0$, представляется в виде $(\frac{K_0}{K})^\nu$, при этом площадь, ограниченная этой кривой (если ее экстраполировать в область $K_0 \leq K \leq K'$ той же степенной функцией), равна плотности энергии турбулентности W_0 . Итак, согласно [3],

$$W_K = \begin{cases} W_0 (\frac{K_0}{K})^\nu (\frac{\nu-1}{K_0}), & K \gg K_0, \\ 0, & K < K_0 \end{cases}, \quad \text{а } \int_{K_0}^{\infty} W_K dK = W_0. \quad (3.1)$$

Естественно, что, как вид такой аппроксимации, так и определение асимптотической области, существенно зависят от K_0 . В этом заключается недостаток аналитического исследования. Поэтому сравнивать аналитические результаты с численными нужно с известной осторожностью. Так, можно в правую часть уравнения (см. формулы (2.17)–(2.19) работы [3])

$$F(\frac{\nu}{2}+1, -\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}+1, \frac{1}{2}) = \Gamma_0 - \delta\Gamma_Q - \delta\Gamma_V, \quad (3.2)$$

точнее в $\delta\Gamma_Q$ и $\delta\Gamma_V$, подставить найденную при помощи численных расчетов величину K_0 , и лишь после этого определить V из уравнения (3.2). Для выбранных параметров (см. § 2) $K_0 \sim \frac{1}{3} \frac{W_0 c}{\epsilon}$, величина $\delta\Gamma_Q$ из формулы (см. [3])

$$\delta\Gamma_Q = \frac{n_0 T_i}{W_0} \frac{gV}{\sqrt{\pi} 2^{(\nu+1)/2} (\nu-1)} \left(\frac{K_0 V_{Te}}{\omega_{oe}} \right)^3 \frac{V_{Te}}{V_{Ti}} \left(\frac{K}{K_0} \right)^{(\frac{\nu}{2}+1)} \quad (3.3)$$

может быть оценена как

$$\delta \Gamma_{\alpha} \approx 1,26 \cdot 10^{-2} \left(\frac{K}{K_0} \right)^{\frac{1}{2}(\nu+1)}. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.4) следует, что уже начиная с $K' \geq 4K_0$, решение уравнения (3.2) стремится к $\nu \approx 3,7$, а при $K' \sim 5K_0$ совпадает с полученным численными методами. Таким образом, при выбранных значениях параметров плазмы область волновых чисел K , в которой справедливо асимптотическое представление (3.1), начинается с $K' = 5K_0$.

Дальнейшее уточнение формулы (3.1) может быть сделано в результате переопределения теоретического значения K_0 . Действительно, при получении оценки (3.4) мы предположили, что теоретическое значение K_0 , которое фигурирует в (3.1) и (3.3), совпадает с экспериментальным значением (обозначим его \tilde{K}_0), полученным на ЭВМ. Однако более естественно предположить, что K_0 должно быть несколько меньше \tilde{K}_0 , например, так, чтобы площади слева от \tilde{K}_0 , ограниченные как теоретической, так и экспериментальной кривыми, совпали (см. рис. 3). Нормируя распределения (3.1) и (2.4) на W_0 и вводя $\alpha = \frac{\tilde{K}_0}{K_0}$, из условия $\int_{K_0}^{\tilde{K}_0} W_k(\text{теор}) dk = \int_0^{\tilde{K}_0} W_k(\text{эксп}) dk$, получим

$$\alpha^{\nu-1} = 1 + (\nu-1) \int_0^1 x^2 \exp(1-x^2) dx. \quad (3.5)$$

Из (3.5) нетрудно получить $\alpha \sim 1,7$ при $\nu \sim 3$. Используя это значение α , можно показать, что хорошее совпадение экспериментальной и теоретической кривых начинается уже с $K' \sim 4K_0$. Следует отметить, что, так как (3.5) — не единственное соотношение для отыскания K_0 (например, $K_0 = \tilde{K}_0$), то всегда остается некоторая неопределенность при сопоставлении результатов аналитического и численного решений. Однако эта неопределенность касается лишь величины K' — начала асимптотической области на оси .

В заключение этого параграфа определим величину K_1 , ограничивающую область применимости уравнения (I.5) с ядрами (I.6) и (I.7). Как уже отмечалось в § I эта область ограничивается сверху величиной $K_* = \omega_{pe} \frac{V_{Ti}}{3V_{Te}}$. В рассматриваемом нами случае (см. конец § I) $K_* = \left(\frac{1}{3} \frac{\omega_{pe}}{c}\right) \frac{V_{Ti}c}{V_{Te}} = \tilde{K}_0 \frac{V_{Ti}c}{V_{Te}}$ отсюда $K_* \approx 14K_0$.

§ 4. Выводы и перспективы развития теории и численных экспериментов

Остановимся кратко на основных следствиях полученных результатов и перспективах дальнейших исследований в рамках развиваемого подхода. Обычно с помощью ЭВМ решают разного рода модельные задачи, исходя при этом либо из уравнений магнитной гидродинамики, либо из уравнений двухжидкостной гидродинамики (нелинейные волны, взаимодействие различных мод). При этом (может быть за исключением ⁽¹⁴⁾) приходится прибегать к разного рода упрощающим предположениям относительно физической модели: одномерность задач, взаимодействие конечного числа слоев и др. В результате подчас исследованная модель оказывается далекой от реальной физической постановки задачи. Поэтому результаты носят лишь приближенный качественный характер.

I. В настоящей работе предлагается новый подход к исследованию задач нелинейной теории плазмы с помощью ЭВМ. Суть предлагаемого метода состоит в том, что вначале максимально упрощаются уравнения нелинейной теории, однако с тем, чтобы основные физические явления, характерные для данной постановки задачи, были отражены в уравнениях, и затем эти уравнения

решаются с высокой точностью на ЭВМ. При этом сохраняется наибольшее количество информации, содержащейся в уравнениях. Появляется возможность исследовать широкий класс явлений, описываемых этими уравнениями.

2. Следует отдельно остановиться на преимуществе использованного метода численных расчетов перед аналитическими методами. Такой метод в теории слаботурбулентной плазмы здесь продемонстрирован на примере решения нелинейного интегрального уравнения (2.1) для квазистационарного спектра ленгмювской турбулентности плазмы. Примененный метод введения непрерывного параметра разработан в ЛВТА ОИЯИ [7]. Подчеркнем здесь, что использование этого метода является, с нашей точки зрения, весьма перспективным для решения разного рода нелинейных задач физики плазмы. Существенно подчеркнуть, что с помощью предлагаемой методики можно исследовать задачи, в которых, кроме быстрого времени, за которое устанавливается стационарное состояние, существует еще и медленное время, характеризующее медленное изменение этого состояния.
3. Физической предпосылкой для возникновения задач с медленным временем в теории слаботурбулентной плазмы является большая эффективность нелинейных взаимодействий (особенно в ч. колебаний) в такой плазме. Поэтому время установления квазистационарных состояний относительно мало. Так, при расчете спектра из (1.5) мы предполагали его изотропным, что вполне оправдано, т.к. процесс изотропизации ленгмювских колебаний является наиболее быстрым процессом. Аналогично при исследовании спектров из (1.5) можно включить в рассмотрение быстрые частицы, что приведет к появлению медленной зависимости крутизны спектра от времени, и др.

4. В результате численных расчетов, если окажется, что конечное (а практически небольшое) число итераций дает сходимость к решению, можно утверждать, что полученное решение в некотором смысле устойчиво в малом, т.е. малые отклонения от искомого решения не существенны в окончательном результате. Это, однако, не относится к большим отклонениям, так как в этом случае можно попасть в область локализации другого решения (если оно формально существует) или в область, где решения не существует. Так, для приведенного примера выбор начального приближения, использующего результаты аналитического рассмотрения /3/, оказался настолько удачным, что потребовалось всего две итерации, чтобы получить точность до сотых долей процента.

5. Развиваемый подход позволил получить спектр квазистационарной ленгмювской турбулентности во всей области волновых чисел $0 \leq k < \infty$, включая $k \lesssim k_0$, в то время как ранее удавалось получить лишь его асимптотику при больших k ($k \gg k_0$). [3, 10].

Оказалось, что при выбранных параметрах спектр в области $0 \leq k \leq k_0$ хорошо аппроксимируется функцией

$$W_k \sim k^2 e^{-(\frac{k^2}{k_0^2} - 1)}$$

а в области $k_0 < k \lesssim 7k_0$ - функцией

$$W_k \sim \left(\frac{k_0}{k}\right)^\psi,$$

где ψ , найденная методом наименьших квадратов, есть $\psi = 3,89$.

6. Следует сказать о возможностях использования полученных результатов в других задачах. Во-первых, знание квазистационарных спектров ленгмювских волн позволяет судить о различных низкочастотных свойствах слаботурбулентной

плазмы. Эти вопросы связаны с проблемой аномальной (турбулентной) диффузии и других явлений переноса. Как показано в /10-12/, наличие в.ч. турбулентности, в частности, ленгмюровской, может существенно изменять дисперсионные свойства плазмы в области низких частот. При этом возможно как подавление линейных неустойчивостей, существующих в нетурбулентной плазме, так и возникновение новых нелинейных неустойчивостей, развитие которых, по-видимому, приводит к изменению функции распределения плазмонов, т.е. спектра W_k . Во-вторых, найденные спектры легко использовать в проблемах ускорения частиц и, в частности, космических и субкосмических лучей, а также в других задачах физики турбулентной плазмы.

В заключение авторы выражают свою глубокую признательность М.Г.Мещерякову за стимулирующие беседы и содействие в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н.Цытович, "Нелинейные эффекты в плазме", из-во "Наука", М., 1967 г. (*New-York English translation*).
2. Б.Б.Кадамцев. Вопросы теории плазмы, т.4, стр. 188, Атомиздат. М., 1964 г. (*English translation "Plasma turbulence" in V. Progress in Plasma Physics. New-York*).
3. С.Б.Пикельнер, В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 55, 977, 1968 г.
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц. "Механика сплошных сред". ГИИЛ, М., 1954 г.
5. В.Н.Цытович. УФН, 89, 89, 1966 г.
6. Е.П.Жидков, В.А.Липеровский, В.Г.Маханьков, С.Б.Пикельнер, В.Н.Цытович, Доклад на 9 международной конференции по физике ионизованных газов, Бухарест, 1969 г.
7. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин, ЖВМ и МФ, 7, 1084, 1967 г.
8. Е.П.Жидков, Г.А.Ососков, ДАН СССР, 180, 1279, 1968 г.
9. С.А.Каплан, В.Н.Цытович, Астрон. ж., 44, 1194, 1967г.
10. В.М.Захаров, ЖЭТФ, 51, 689, 1966 г.
11. В.Н.Цытович, ДАН СССР, 181, 60, 1968 г.
12. А.А.Веденов, А.В.Гордеев, Л.И. Рудаков, *Plasma Phys*, 9, 719, 1967 г.
13. Э.Н.Криворучский, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович. Ядерный синтез, 9, 2, 1969 г.
14. С.А.Каплан, В.Н.Цытович, Астрон. ж., 44, 1194(1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1969 года