ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 4425

А.С.Бонч-Осмоловский, Э.А.Перельштейн

ПРОДОЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КОЛЬЦЕВЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКАХ.

Часть II. Радиационная неустойчивость

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1969

Р9 - 4425

А.С.Бонч-Осмоловский, Э.А.Перельштейн

7874/2 пр.

ПРОДОЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КОЛЬЦЕВЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКАХ.

Часть II. Радиационная неустойчивость

Направлено в Известия высших учебных заведений. Радиофизика

Данная работа является продолжением предыдущей [1] и в дальнейшем ссылки на нее будут обозначаться просто как [1]. Все обозначения совпадают с принятыми ранее.

§3. Вычисление импедансов в резонансном случае

В [1] мы выделили продольную неустойчивость отрицательной массы как эффект, имеющий место при достаточно большом разделении гармоник частоты обращения частиц (и частот полей возмущения) и собственных мод колебаний камеры.

Теперь мы рассмотрим противоположный предельный случай близости к резонансу, так что выполняется условие, обратное (1.2.1):

$$2n^2\beta^2\,\frac{b^2}{R^2}\,\frac{|\operatorname{Im}\Omega|}{n\omega_0}\gg\left|\lambda'^2_{np_0}-n^2\beta^2\frac{b^2}{R^2}\right|. \tag{3.1}$$

Рассмотрим два крайних случая: $p_0\ll n$ и $p_0\gg n$. Как видно из формулы (3.1), первому случаю соответствует близость пучка к стенке и относительно большое разделение резонансных линий. Второй случай может встретиться, если пучок находится далеко от стенки камеры, при этом резонансы весьма близки друг к другу. Смысл такого разделения состоит в том, что в первом случае время развития неустойчивости много больше времени прохождения сигнала от пучка до стенки, во втором случае имеет место обратное условие.

Пучок вблизи стенки

В этом случае в формулах (1.1.20) и (1.1.22) для импедансов E - слоя и кольца можно оставить по одному резонансному члену. Тогда, учитывая, что $\mathrm{Im}\,\Omega \ll \mathrm{Re}\,\Omega$, $\mathrm{Re}\Omega = \frac{nc\beta}{R}$ и $\phi(\lambda'_{np}) \approx \frac{\pi}{2}$, будем иметь:

E - слой

$$NZ(\Omega, n) \simeq \frac{16\pi^3\sigma}{\Omega\,\mathrm{Im}\,\Omega}\,\frac{c\beta R}{b^2}\,f(n); \qquad (3.2)$$

кольцо

$$Z(\Omega, n) = -\frac{(2\pi)^3(1+i)R}{\Omega b^2}\,\beta\,\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\mathrm{Im}\Omega}{\mathrm{Re}\Omega}\right|}}\,f(n)\,. \qquad (3.3)$$

Здесь в соответствии с условиями (1.1.23) вместо $Q(r)$ выбрана функция $\frac{\delta(r-R)}{r}$.

Функция $f(n)$ определяется так:

$$f(n) = \frac{n\,J_n'^{\,2}(\lambda'_{np_0}\frac{R}{b})}{J_n^2(\lambda'_{np_0})(1-\frac{n^2}{\lambda'^{\,2}_{np_0}})}\,. \qquad (3.4)$$

Вблизи стенки, как уже упоминалось, n достаточно велики, и можно пользоваться асимптотическими представлениями функций Бесселя, аргумент и индекс которых велики и близки друг к другу /2/. Для релятивистских пучков $\beta \approx 1$ и в силу условия резонанса (3.1) аргумент функции Бесселя $\lambda'_{np_0}\frac{R}{b} \approx n\beta$. Функция (3.4) тогда ведет себя следующим образом:

$$f(n) \sim n^{4/3} \quad \text{при} \quad 1 \ll n \ll \gamma^3, \tag{3.5}$$

$$f(n) \sim n^{11/3} e^{-2n/\gamma^3} \quad n \gg \gamma^3. \tag{3.6}$$

Пучок далеко от стенки

При больших p, когда электроны вращаются далеко от стенки, $\frac{b}{R}$ велико, резонансные линии близки друг к другу и вклад в импеданс будут давать многие соседние резонансы. В пределе $\frac{b}{R} \to \infty$ пучок ведет себя как в свободном пространстве. Рассмотрим этот предельный переход для наиболее интересного случая тонкого электронного кольца. Анализ будем проводить, исходя из общего выражения (1.1.20). Нетрудно убедиться, что при $\frac{b}{R}$, стремящемся к бесконечности, основной вклад в сумму (1.1,20) дают большие значения корней функции Бесселя, т.е. большие значения p. Тогда в (1.1.20) можно перейти от суммирования к интегрированию, положив $\lambda_{np} \approx \lambda'_{np} \approx \pi p$.

Раскладывая при этом также экспоненты в (1.1.20) до второго порядка по a_z, получим импеданс

$$Z(\Omega, n) = \frac{8\pi^3}{b\Omega}\int_0^{\frac{R\Omega b}{\pi c}} \left[\frac{n^2 J_n^2(\pi p\frac{R}{b})\sqrt{\frac{\Omega^2 b^2}{c^2}-\pi^2 p^2}}{p} + \frac{R^2\Omega^2}{c^2}\,\frac{J_n'^2(\pi p\frac{R}{b})\pi^2 p}{\sqrt{\frac{\Omega^2 b^2}{c^2}-\pi^2 p^2}}\right] dp. \tag{3.7}$$

Можно показать, что мнимая часть этого выражения пренебрежимо мала, если выполняется условие $\sqrt{\left|\frac{\operatorname{Im}\Omega}{\operatorname{Re}\Omega}\right|} \ll 1$, а вещественная часть импеданса с помощью замены переменной интегрирования $\pi p \frac{R}{b} = n\beta \sin\Theta$ определяется в виде:

$$\operatorname{Re} Z(\Omega, n) = -\frac{4\pi^2 n^2}{c} \int_0^{\pi} [J_n^2(n\beta \sin\Theta)\operatorname{ctg}^2\Theta + \beta^2 J_n'^2(n\beta\sin\Theta)]\sin\Theta d\Theta . \tag{3.8}$$

Заметим здесь, что вещественная часть импеданса характеризует работу поля над пучком, а именно, мощность потерь пучка на излучение на n-ой гармонике дается произведением импеданса на квадрат Фурье-компоненты тока. Использование формулы (3.8) для определения мощности излучения приводит к известной формуле Шотта [3] (см. также работу [4], где вычисляется излучение кольца в приближении заданного тока). Формулу (3.8) можно также представить в виде

$$\operatorname{Re} Z(\Omega, n) = -\frac{8\pi^3}{R\omega_0}[n\beta^2 J_{2n}'(2n\beta) - \frac{n^2}{\gamma^2}\int_0^{\beta} J_{2n}(2n\xi)d\xi] \tag{3.9}$$

и дальше пользоваться асимптотическими выражениями из [2].

§4. Радиационная неустойчивость

Как видно из выражений для импеданса, полученных в предыдущем разделе, вблизи резонансов с собственными частотами камеры импеданс содержит вещественную часть, связанную с потерями энергии на излучение. Поэтому неустойчивость пучка, появляющуюся в этом случае, можно назвать радиационной. Эта неустойчивость была найдена в работах [5,6] и называется также индуцированным циклотронным излучением.

Для получения инкрементов этой неустойчивости будем подставлять полученные формулы для импедансов в дисперсионное уравнение (1.1.15). Исследование уравнения (1.1.15) для произвольной функции распределения сложно, поэтому зададимся некоторыми частными видами функций распределения.

а) Выберем сначала наиболее простую для анализа функцию распределения – ступеньку:

$$\psi_0(w) = \frac{1}{w_2 - w_1}\,\sigma(w - w_1)\,\sigma(w_2 - w). \tag{4.1}$$

Здесь $w_2 > w_1$. Тогда дисперсионное уравнение можно привести к виду

$$1 = -\frac{e^2 N\Omega i}{(2\pi)^3 M R^2} Z(\Omega, n) \frac{1}{(\Omega - n\omega_1)(\Omega - n\omega_2)}, \tag{4.2}$$

где $\omega_{1,2} = \omega(w_{1,2})$, а так называемая эффективная масса определена следующим образом

$$M = \left(2\pi R^2 \frac{d\omega}{dw}\right)^{-1}. \tag{4.3}$$

Подставляя в формулу (4.2) выражение для импеданса E – слоя, расположенного вблизи стенки, из (3.2) приходим к алгебраическому уравнению, из которого находится инкремент неустойчивости

$$A^2 x^3 - 4n^2 \Delta\omega^2 x - 4 = 0. \qquad (4.4)$$

Здесь

$$x = \frac{1}{(\mathrm{Im}\,\Omega)^2}, \quad A = \frac{2e^2 \sigma c\beta}{MRb^2} f(n), \quad \Delta\omega = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} -$$

– полуразброс частот обращения частиц в пучке. В крайнем случае малого энергетического разброса, чему соответствует условие

$$\frac{|A|}{(n\Delta\omega)^3} \gg 1, \qquad (4.5)$$

инкремент РН равен

$$\mathrm{Im}\,\Omega = \pm \sqrt[3]{\frac{e^2 \sigma c\beta}{MR\,b^2} f(n)}. \qquad (4.6)$$

Верхний знак здесь и дальше всегда соответствует отрицательной массе.

Вещественная часть частоты мало отличается от средней частоты обращения частиц и равна

$$\mathrm{Re}\,\Omega = n\omega_0 \pm \left(\frac{e^2 \sigma c \beta}{|M|\,Rb^2} f(n)\right)^{2/3}. \qquad (4.7)$$

В другом предельном случае большого разброса, отвечающего обратному условию (4.5), получаем инкремент

$$\operatorname{Im}\Omega = -\sqrt{\frac{e^2 \sigma c \beta\ f(n)}{|M|\ R b^2 n \Delta\omega}}. \tag{4.8}$$

Вещественная часть частоты при этом примерно равна

$$\operatorname{Re}\Omega \approx n(\omega_0 \pm \Delta\omega). \tag{4.9}$$

Далее подставим выражение (3.3) для импеданса кольца вблизи стенки в формулу (4.2). Решая получившееся дисперсионное уравнение, получаем в случае малого разброса (см. формулу (4.5)) инкремент

$$\operatorname{Im}\Omega \cong -\left(\frac{e^2 N \beta \sqrt{n \omega_0}}{|M|\ R\ b^2} f(n)\right)^{2/5} \tag{4.10}$$

и вещественную часть частоты

$$\operatorname{Re}\Omega \cong n\omega_0 \pm \left(\frac{e^2 N \beta \sqrt{n\omega_0}}{|M|\ R b^2} f(n)\right)^{2/5}. \tag{4.11}$$

Для большого разброса получаем

$$\operatorname{Im}\Omega \cong -\left(\frac{e^2 N \beta f(n)}{\sqrt{n \Delta\omega_0}\,|M|\ R\ b^2}\right)^{2/3} \tag{4.12}$$

$$\operatorname{Re}\Omega \cong n(\omega_0 \pm \Delta\omega). \tag{4.13}$$

Если кольцо расположено вдали от стенки, то для оценки инкремента неустойчивости можно решать дисперсионное уравнение с импедансом (3.9). В результате для малого разброса, что эквивалентно требованию $\frac{|\mathrm{Im}\,\Omega|}{n\,\Delta\omega} \gg 1$, получаем

$$\mathrm{Im}\,\Omega \cong -\sqrt{|A|}\,, \tag{4.14}$$

$$\mathrm{Re}\,\Omega \cong n\omega_0 \pm \sqrt{|A|} \tag{4.15}$$

для большого разброса

$$\mathrm{Im}\,\Omega \cong \pm \frac{A}{n\,\Delta\omega}, \tag{4.16}$$

и вещественная часть частоты представляется так же, как и раньше в случаях большого разброса. В формулах (4.14) – (4.16) через A обозначено:

$$A = \frac{e^2 N}{2MR^2}\left[n\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - \frac{n^2}{\gamma^2}\int_0^{\beta} J_{2n}(2n\,\xi)\,d\xi\right]. \tag{4.17}$$

Сравнение инкрементов для кольца и E -слоя при равных линейных плотностях на расстояниях, не очень далеких от стенки, показывает, что инкремент неустойчивости для кольца меньше соответствующего инкремента для E -слоя и пропорционален малой величине $\left(\frac{n a_z}{b}\right)^{1/2}$. Это объясняется тем, что для E -слоя резонанс имеет место на одной гармонике по k_z ($k_z = 0$), в случае кольца в резонансе участвует непрерывный спектр гармоник по k_z и возбуждение основной резонирующей гармоники с k_z, равным нулю, оказывается меньшим, чем для E -слоя.

Как показывает анализ, этот же эффект имеет место при переходе от кольца, близкого к стенке, к кольцу в свободном пространстве. Для дальнейшего анализа рассмотрим еще две простых функции распределения:

б) Распределение Гаусса

Функция распределения имеет вид

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, w_0} e^{-\frac{w^2}{2 w_0^2}} . \tag{4.18}$$

Мы рассматриваем достаточно узкие пучки, при этом дисперсионное уравнение (1.15) можно записать как

$$1 = \frac{i e^2 \Omega N Z(\Omega, n)}{(2\pi)^3 n^2 (\Delta\omega)^2 R^2 M} \left\{ 1 - J_- \left(\frac{\Omega - n\omega_0}{n\Delta\omega} \right) \right\}. \tag{4.19}$$

Здесь $\Delta\omega = |\omega(w_0) - \omega(0)|$, $J_-(x) = \frac{x I_-(x)}{\sqrt{2\pi}}$, I_- - интеграл, введенный Фоком и равный /7/.

$$I_-(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\beta - x} \quad \text{при} \quad \mathrm{Im}\beta < 0. \tag{4.20}$$

Нас интересует зависимость полученных выше в разделе а) результатов от выбора функции распределения. Поэтому нет необходимости повторять все предыдущие выкладки. Выясним влияние формы распределения на примере E -слоя вблизи стенки. Тогда, используя соответствующий импеданс (3.2) в уравнении (4.19) для большого разброса, т.е. $\frac{\mathrm{Im}\,\Omega}{n\,\Delta\omega} \ll 1$, получаем

$$\mathrm{Im}\Omega \cong - \frac{e^2 \sigma\, c \beta\, f(n)}{|M|\, R b^2\, n^2 (\Delta\omega)^2}, \tag{4.21}$$

$$\mathrm{Re}\Omega \cong n(\omega_0 \pm \Delta\omega). \tag{4.22}$$

в) Распределение Лоренца

Выберем функцию распределения в виде /8/

$$\psi_0 = \frac{1}{\pi w_0 \left(1 + \frac{w^2}{w_0^2}\right)}\ ;$$

Дисперсионное уравнение для E -слоя вблизи стенки записывается как

$$1 = \frac{-i e^2\, \sigma c \beta}{M R b^2 n^2 (\Delta\omega)^2\, \mathrm{Im}\,\Omega} \; \frac{1}{\left[\frac{\Omega - n\omega_0}{n\,\Delta\omega} - i\right]^2} \tag{4.23}$$

и имеет решение, соответствующее РН

$$\mathrm{Im}\,\Omega = - \frac{e^2\, \sigma c \beta\, f(n)}{2|M|\, R b^2\, n^2 (\Delta\omega)^2},$$

$$\mathrm{Re}\,\Omega \cong n(\omega_0 \pm \Delta\omega). \tag{4.24}$$

Радиационная неустойчивость связана с тем, что в системах с существенной кривизной фазовая скорость электромагнитных волн в азимутальном направлении может быть меньше скорости света в пустоте. При этом средняя скорость обращения частиц в пучке может быть близка к фазовой скорости волн в азимутальном направлении. В случае, когда эффективная масса частиц положительна, средняя скорость частиц больше азимутальной фазовой скорости волны; когда эффективная масса отрицательна, соотношение скоростей обратное. В обоих случаях, если благодаря флуктуации в азимутальнооднородном пучке возникает волна, то частицы пучка со скоростями, близкими к средней, будут эффективно взаимодействовать с волной и часть из них будет захватываться в областях, где выполнены условия автофазировки. Для частиц с отрицательной массой область захвата сдвинута по фазе на величину π по отношению к области захвата соответствующей частицы с положительной массой. Таким образом, пространственная плотность частиц, связанных с флуктуацией, будет расти, а вместе с ней возрастет и когерентное излучение, что, в свою очередь, приведет к дополнительному захвату.

Обратим еще внимание на зависимость инкремента радиационной неустойчивости от номера гармоники возмущения. Большая вещественная часть импеданса естественным образом связана с потерями энергии пучка, и поскольку механизм потерь – синхротронное излучение, максимальное значение импеданса лежит в области значений n порядка γ^3. Однако при сильном релятивизме длины соответствующих волн становятся гораздо меньшими малых размеров кольца и наше рассмотрение становится незаконным.

Поэтому можно лишь утверждать, что для достаточно малых длин волн, но все же много больших разметров пучка, инкременты растут с номером гармоники.

В заключение авторы выражают благодарность Я.Б. Файнбергу, И.Н.Иванову, В.И.Курилко и А.Н.Лебедеву за обсуждения и полезные замечания.

Литература

1. А.Г.Бонч-Осмоловский, Э.А.Перельштейн. Препринт ОИЯИ Р9-4424, Дубна 1968.
2. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т.2, Наука, Москва, 1966.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, Москва, 1962.
4. А.Г.Бонч-Осмоловский, К.А.Решетникова. Препринт ОИЯИ Р9-3415-2, Дубна 1967.
5. А.В.Гапонов, Изв. высш.уч.завед., Радиофизика 2 №5, 836 (1959).
6. J.Schneider, Phys. Rev.Letters, 2, 504, (1959).
7. В.П.Силин, А.А.Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Госатомиздат, 1961.
8. А.Н.Лебедев. Диссертация, ФИАН, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 апреля 1969 года.