

Б-817

19/viii

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.



P9 - 4424

А.Г.Бонч-Осмоловский, Э.А.Перельштейн

ПРОДОЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
В КОЛЬЦЕВЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКАХ.

Часть I. Эффект отрицательной массы

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1969

Р9 - 4424

А.Г.Бонч-Осмоловский, Э.А.Перельштейн

**ПРОДОЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
В КОЛЬЦЕВЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКАХ.**

Часть I. Эффект отрицательной массы

**Направлено в Известия высших учебных заведений.
Радиофизика**

4894/2 нр.

Продольные (азимутальные) неустойчивости кольцевых заряженных пучков с большим числом частиц изучались в ряде работ^{/1-7/}. Эти неустойчивости можно разделить на три основных типа: эффект отрицательной массы (НОМ), резистивная неустойчивость и неустойчивость на собственных модах колебаний камеры, в которую помещен сгусток. Поскольку последняя неустойчивость связана с излучением электромагнитных волн, будем называть ее радиационной (РН).

В настоящей работе рассматриваются только неустойчивости типа НОМ и РН; заметим, что в отдельных случаях разделение этих двух типов неустойчивостей оказывается несколько условным.

В работах^{/2-5/} указанные типы неустойчивостей исследовались раздельно. Использование кинетического подхода и аппарата разложения полей возмущения по собственным модам колебаний камеры^{/1,6/} позволяет рассмотреть в общем виде продольные неустойчивости заряженного кольца.

Мы будем анализировать устойчивость кольца электронов, помещенного внутрь бесконечно длинной идеально проводящей круглой трубы (учёт конечной проводимости и связанных с ней резистивных неустойчивостей также возможен в данном методе).

Интересуясь только азимутальным движением частиц, удобно применить метод, развитый в работах /1,2/; при этом продольное движение частиц описывается функцией распределения в пространстве канонических переменных θ и w , где θ - азимутальная координата и w - обобщенный канонический импульс. Невозмущенное состояние пучка считается азимутально однородным и не зависящим от времени. Соответственно с этим представляем функцию распределения в виде

$$f(w, \theta, t) = \psi_0(w) + \psi(w, \theta, t).$$

Предполагая малость возмущения, для добавки в начальной функции распределения получаем линейризованное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 2\pi e R \frac{\partial \psi}{\partial w} \bar{\epsilon} = 0, \quad (1.1)$$

где ω - частота обращения частиц, R - средний радиус кольца, $\bar{\epsilon}$ - азимутальное электрическое поле, усредненное по сечению пучка.

Усреднение проводится с помощью функции $Q(r, z)$, которая дает распределение частиц в поперечном сечении кольца, следующим образом:

$$\bar{\epsilon} = \int_S Q(r, z) \epsilon_\theta r dr dz, \quad (1.2)$$

где S - сечение камеры в плоскости r, z . Полная функция распределения частиц записывается как

$$F = \frac{N}{2\pi} Q(r, z) f(\theta, w, t), \quad (1.3)$$

где N – полное число частиц в кольце, а функции Q и ψ_0 удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_S Q(r, z) r dr dz = 1 \quad (1.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(w) dw = 1.$$

Выражения для возмущений плотности заряда и азимутального тока имеют вид

$$\rho = \frac{eN}{2\pi} Q(r, z) \int \psi dw. \quad (1.5)$$

$$j = \frac{eN}{2\pi} r Q(r, z) \int \omega(w) \psi dw. \quad (1.6)$$

Представляя возмущения плотности заряда и тока в виде разложений Фурье по гармоникам $e^{-i(\Omega t - n\theta)}$, из формул (1.1), (1.5) и (1.6) получим:

$$\rho_{\Omega, n} = ie^2 RN \bar{\epsilon}_{\Omega, n} Q(r, z) \int \frac{\partial \psi_0}{\partial w} dw \quad (1.7)$$

$$j_{\Omega, n} = r \frac{\Omega}{n} \rho_{\Omega, n} \approx R \frac{\Omega}{n} \rho_{\Omega, n}. \quad (1.8)$$

Для нахождения полей возмущения используем разложения по собственным модам колебаний, которые делятся на E - и H - типы волн и продольные волны ^{/6/}. Система собственных функций выбирается ортонормированной, согласно условию

$$\int_V \vec{E}_s(\vec{r}) \vec{E}_{s'}^*(\vec{r}) dV = \delta_{s,s'} \quad (1.9)$$

где V - объем камеры. В случае непрерывного спектра символ $\delta_{s,s'}$ понимается в смысле δ - функции.

Ортонормированные поперечные собственные функции имеют вид:

E - волны:

$$E_s^r = \frac{\sqrt{2} i c k_z}{2 \pi b \omega_s J_{n+1}(\lambda_{np})} J_n'(k_r r) e^{-i k_z z - i n \theta}$$

$$E_s^\theta = \frac{\sqrt{2} c n k_z}{2 \pi b \omega_s r k_r J_{n+1}(\lambda_{np})} J_n(k_r r) \exp(-i k_z z - i n \theta) \quad (1.10)$$

$$E_s^z = \frac{\sqrt{2} c k_r}{2 \pi b \omega_s J_{n+1}(\lambda_{np})} J_n(k_r r) \exp(-i k_z z - i n \theta)$$

$$k_r = \frac{\lambda_{np}}{b}.$$

H - волны:

$$E_s^r = - \frac{\sqrt{2} n}{2 \pi r k_r' J_n(\lambda_{np}') \sqrt{1 - n^2 / \lambda_{np}'^2}} J_n'(k_r' r) \exp(-i k_z z - i n \theta)$$

$$E_s^\theta = \frac{\sqrt{2} i}{2 \pi b J_n(\lambda_{np}') \sqrt{1 - n^2 / \lambda_{np}'^2}} J_n'(k_r' r) \exp(-i k_z z - i n \theta) \quad (1.11)$$

$$E_s^z = 0, \quad k_r' = \frac{\lambda_{np}'}{b}.$$

$\omega^2 = c^2 (k_r^2 + k_z^2)$; λ_{np} и λ'_{np} - корни функций Бесселя J_n и J'_n , соответственно, b - радиус трубы.

Продольные собственные поля находятся из соотношения

$$\vec{E}_s^{\ell} = -\nabla \Phi_s \quad (1.12)$$

и Φ_s находится как решение уравнения

$$\Delta \Phi_s = \lambda_s \Phi_s \quad (1.13)$$

с граничным условием $\Phi_s |_{r=b} = 0$.

Ортонормированные функции Φ_s суть

$$\Phi_s = \frac{1}{\sqrt{2} \pi b J_{n+1}(\lambda_{np})} J_n(k_r r) e^{-ik_z z - i n \theta} \quad (1.14)$$

Собственные значения λ_s равны

$$\lambda_s = -k_r^2 - k_z^2$$

и

$$k_r = \frac{\lambda_{np}}{b}$$

Разложим поля возмущения, заряды и токи по ортонормированным собственным функциям и решим уравнения Максвелла, пренебрегая при этом поперечными составляющими тока по сравнению с продольной. В результате находим линейную связь между азимутальным электрическим полем и усредненным полем $\bar{\epsilon}$ возмущения. После выполнения усреднения в полученном соотношении получаем дисперсионное уравнение в форме, предложенной Лебедевым /6/:

$$1 = \frac{i e^2 \Omega N}{(2\pi)^2 n} Z(\Omega, n) \int \frac{\frac{\partial \psi_0}{\partial w} d^3 w}{\Omega - n\omega}, \quad (1.15)$$

функция $z(\Omega, n)$ - так называемый импеданс камеры с пучком - имеет вид

$$Z(\Omega, n) = 16 \pi^3 R^2 i \sum_p \int d\mathbf{k}_z \left[\frac{\Omega |\overline{E}_{\theta,s}^{tr}|^2}{\Omega^2 - c^2 (k_r^2 + k_z^2)} + \frac{n^2 |\overline{\Phi}_s|^2}{\Omega R^2 (k_r^2 + k_z^2)} \right], \quad (1.16)$$

где черта означает усреднение соответствующих величин в смысле (1.2), а значок "tr" сумму вкладов волн электрического и магнитного типов.

Предположим, что функция $Q(r, z)$ имеет вид

$$Q(r, z) = Q(r) Q(z). \quad (1.17)$$

Далее для простоты положим, что распределение частиц по оси z имеет вид ступеньки

$$Q(z) = \frac{1}{2a_z} \sigma(z) \sigma(2a_z - z), \quad (1.18)$$

где

$$\sigma(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases},$$

$2a_z$ - размер кольца в направлении оси z .

Теперь получаем:

$$|\bar{E}_s^{tr}|^2 = \frac{1 - \cos 2k_z a_z}{b^2 a_z^2} \left\{ \frac{n^2 I_\Phi^2(k_r)}{k_r^2 (k_r^2 + k_z^2) J_{n+1}^2(\lambda_{np})} + \frac{R^2 I_M^2(k_r')}{k_z^2 J_n^2(\lambda'_{np}) (1 - \frac{n^2}{\lambda_{np}^2})} \right\} \quad (1.19)$$

$$|\bar{\Phi}_s|^2 = \frac{R^2 I_\Phi^2}{a_z^2 k_z^2 b^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np})} (1 - \cos 2k_z a_z).$$

Здесь

$$I_\Phi = \frac{1}{R_0} \int_0^b Q(r) J_n(k_r r) r dr$$

$$I_M = \frac{1}{R_0} \int_0^b Q(r) J_n'(k_r' r) r dr.$$

Будем считать, что в формуле (1.16) частота Ω имеет отрицательную мнимую часть, что соответствует неустойчивости. Выполнив интегрирование по k_z в (1.16), получим следующий результат:

$$Z(\Omega, n) = \frac{16 \pi^3 R^2 i}{a_z \Omega} n^2 \sum_p \frac{I_\Phi^2}{\lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np})} -$$

$$- \frac{8 \pi^3 R^2 i b}{a_z^2 \Omega} \sum_p \left\{ \frac{n^2 I_\Phi^2 \left(\sin \frac{\phi(\lambda_{np})}{2} + i \cos \frac{\phi(\lambda_{np})}{2} \right)}{\lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np}) / \sqrt{\frac{\Omega^2 b^2}{c^2} - \lambda_{np}^2}} (1 - e^{2i \frac{a_z}{b} \sqrt{\frac{\Omega^2 b^2}{c^2} - \lambda_{np}^2}}) + \right.$$

$$\left. + \frac{R^2 I_M^2 \Omega^2}{c^2 J_n^2(\lambda'_{np}) (1 - n^2 / \lambda_{np}'^2)} \cdot \frac{(\sin \phi(\lambda'_{np}) / 2 + i \cos \phi(\lambda'_{np}) / 2)}{|\sqrt{\frac{\Omega^2 b^2}{c^2} - \lambda_{np}'^2}|} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(1 + 2i \frac{a_z}{b} \sqrt{\frac{\Omega^2 b^2}{c^2} - \lambda_{np}'^2} - e^{2i \frac{a_z}{b} \sqrt{\frac{\Omega^2 b^2}{c^2} - \lambda_{np}'^2}})}{(\frac{\Omega^2 b^2}{c^2} - \lambda_{np}'^2)} \right\}. \quad (1.20)$$

В формуле (1.20) $\phi(\lambda_{np})$ определяется условием

$$\operatorname{tg} \phi(\lambda_{np}) = \frac{2R e \Omega \operatorname{Im} \Omega b^2}{c^2 [(\operatorname{Re} \Omega)^2 \frac{b^2}{c^2} - (\operatorname{Im} \Omega)^2 \frac{b^2}{c^2} - \lambda_{np}^2]} \quad (1.21)$$

и аналогично $\phi(\lambda'_{np})$. При этом значение ϕ заключено в интервале $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Формула (1.20) дает импеданс бесконечной круглой трубы с кольцом конечного размера по направлению z . Нам еще понадобится выражение для импеданса для бесконечно длинного цилиндрического заряженного слоя (E - слой). В этом случае из формулы (1.20) предельным переходом $a_z \rightarrow \infty$, сохраняя линейную плотность

$$\sigma = \frac{N}{2a_z} = \text{const}, \text{ получаем}$$

$$NZ(\Omega, n) = \frac{i 32 \pi^3 R^2 n^2 \sigma}{\Omega} \left[\sum_p \frac{I_\Phi(\lambda_{np})}{\lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np})} + \sum \frac{\Omega^2 R^2 I_M^2(\lambda'_{np})}{n^2 c^2 J_n^2(\lambda'_{np}) (1 - \frac{n^2}{\lambda_{np}^2})} \right. \\ \left. \times \frac{1}{(\frac{\Omega^2 b^2}{c^2} - \lambda_{np}^2)} \right]. \quad (1.22)$$

Из этой формулы видно, что для E - слоя вклад в импеданс дают только продольная часть поля и магнитные волны, что вполне естественно в отсутствие винтовых возмущений ($k_z = 0$). Следует иметь в виду, что применяемый нами метод усреднения азимутального электрического поля по сечению пучка предполагает по крайней мере монотонность изменения поля по сечению, что эквивалентно требованиям

$$\frac{\lambda'_{np} a_r}{b} \ll 1 \quad \text{и} \quad k_z a_z \ll 1, \quad (1.23)$$

где a_r и a_z - малые размеры пучка.

Первое условие ограничивает сумму по p и номера гармоник n , которые можно рассматривать; второе условие – длину волны возмущения в z направлении и его следовало бы учитывать при интегрировании по k_z в (1.16). Однако вклад больших значений k_z в интеграл мал, поэтому интегрирование велось в бесконечных пределах.

Таким образом, мы рассматриваем лишь такие возмущения, длина волны которых много больше радиального размера пучка и в дальнейшем можем считать пучок бесконечно тонким. На языке кинетики это означает, что разброс частиц по энергиям должен быть достаточно мал.

§2. Эффект отрицательной массы (НОМ)

Исследование продольных неустойчивостей в кольце начнем со случая, когда условие излучения поперечных волн не выполняется. Это означает, что мы рассматриваем некоторую выбранную гармонику средней частоты обращения, которая примерно совпадает с частотой волны возмущения и достаточно сильно отличается от собственных частот камеры, соответствующих этой гармонике.

В частности, это условие выполняется, когда кольцо (E -слой) находится вблизи стенки трубы. Математически сильное различие частот возмущения и собственных частот камеры записывается в соответствии с резонансным знаменателем в формуле (1.20)

$$\left| \lambda_{np}^{-2} - n^2 \beta^2 \frac{b^2}{R^2} \right| \gg 2 n^2 \beta^2 \frac{b^2}{R^2} \frac{|\operatorname{Im} \Omega|}{n \omega_0}. \quad (2.1)$$

Здесь ω_0 – средняя частота обращения частиц в пучке. При малости инкремента по сравнению с частотой ω_0 условие (2.1) выполняется вблизи стенки на расстояниях, удовлетворяющих требованию

$$\frac{b-R}{R} \ll \frac{1}{n\beta^2} + \frac{1}{2\beta^2\gamma^2}. \quad (2.2)$$

Предполагая выполнение условия (2.2), импеданс для E - слоя можно представить в виде

$$NZ(\Omega, n) = \frac{i32\pi^3 R^2 n^2 \sigma}{\Omega} \sum_p \left[\frac{I_\Phi^2(\lambda_{np})}{\lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np})} - \beta^2 \frac{I_M^2(\lambda'_{np})}{J_n^2(\lambda'_{np}) \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_{np}^2} (\lambda_{np}^{\prime 2} - n^2 \beta^2 \frac{b^2}{R^2})\right)} \right]. \quad (2.3)$$

В соответствии с формулами (1.23) выберем $Q(r) = \frac{\delta(r-R)}{r}$. Тогда выражение для импеданса становится

$$NZ(\Omega, n) = \frac{i32\pi^3 n^2 \sigma}{\Omega} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{J_n^2(\lambda_{np} R/b)}{J_{n+1}^2(\lambda_{np}) \lambda_{np}^2} - \beta^2 \frac{J_n^2(\lambda'_{np} R/b)}{J_{np}^2(\lambda'_{np}) \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_{np}^2} (\lambda_{np}^{\prime 2} - n^2 \beta^2 \frac{b^2}{R^2})\right)} \right]. \quad (2.4)$$

Рассмотрим случай не очень больших n , таких что

$$\frac{b-R}{b} \lambda_{np \max} \ll \frac{\lambda_{np \max} - \lambda_{np \max - 1}}{2} \approx \pi/2. \quad (2.5)$$

Здесь $\lambda_{np \max}$ может быть большим числом: $p_{\max} \approx \frac{b}{b-R}$. Тогда сумму в (2.4) можно разбить на две: сумму по p от единицы до p_{\max} и от p_{\max} до бесконечности.

В первой сумме проведем разложение функций Бесселя таким образом:

$$J_n^2(\lambda_{np} R/b) \approx \left(\frac{b-R}{b}\right)^2 \lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np}) \quad (2.6)$$

и соответственно для $J_n^2(\lambda_{np} R/b)$.

Во второй сумме воспользуемся асимптотикой функций Бесселя, полагая λ_{np} и λ'_{np} значительно большими n . В результате после суммирования будем иметь:

а) для нерелятивистского случая

$$NZ(\Omega, n) \approx \frac{32 \pi^3 i n^2 \sigma}{\Omega} \cdot \frac{b-R}{b} a_1, \quad (2.7)$$

где a_1 - коэффициент, меньший единицы,

б) в релятивистском случае, когда $\left| \frac{1}{\gamma^2} - \frac{b^2 - R^2}{b^2} \right| \ll 1$

$$NZ(\Omega, n) = \frac{32 \pi^3 i n^2 \sigma}{\Omega} \frac{b-R}{b} \left[\frac{1}{\gamma^2} - a_2 \frac{b-R}{b} \right], \quad (2.8)$$

коэффициент a_2 несколько больше единицы.

Таким образом, в соответствии с результатами работы /7/, для нерелятивистского пучка импеданс имеет емкостный характер ($Z=iA, A > 0$) и может возникнуть неустойчивость типа НОМ на любых малых расстояниях, от стенки. В релятивистском случае, как видно из формулы (2.8), импеданс может быть как емкостным, так и индуктивным ($Z=-iA, A > 0$), в последнем случае неустойчивость не возникает.

Как видно из выражений (2.8), импеданс для малых n пропорционален n^2 . Если n велико, но еще удовлетворяет условию $n < \frac{b}{b-R}$ (пучок находится вблизи от стенки $\frac{b}{b-R} \gg 1$), то в формуле (2.4) можно воспользоваться асимптотическим представлением бесселевых функций, когда индекс и аргумент велики и сравнимы по величине ^{/8/}. В результате оказывается, что для достаточно больших n импеданс убывает с ростом номера гармоники. Подстановка полученных выражений для импеданса (2.7) и (2.8) в дисперсионное уравнение (1.15) дает для моноэнергетических пучков инкременты, совпадающие с полученными в работах ^{/3,7/}.

Для пучков с энергетическим разбросом инкремент НОМ уменьшается и существует порог неустойчивости, аналогично рассмотрению проведенному в ^{/1,2/}. Даже для максимальных инкрементов, получающихся в случае моноэнергетических пучков, условие (2.1) может выполняться как для малых, так и для больших n .

Таким образом, вблизи стенки неустойчивость типа НОМ может существовать в чистом виде вплоть до очень больших номеров гармоник.

Займемся теперь исследованием НОМ для кольца. Предположим опять, что условие (2.2) выполняется. Тогда из общего выражения для импеданса (1.20), считая малый размер кольца много меньшим расстояния до стенки

$$\frac{2a_z}{b-R} \ll 1 \quad (2.9)$$

и проделывая те же операции, что и в случае Е - слоя, получим

$$Z \cong \frac{16\pi^3 \text{in}^2}{b\Omega} \left[\frac{a}{\gamma^2} + \beta^2 \frac{b-R}{2b} + \alpha \left(\frac{a_z}{b} \right) \right], \quad (2.10)$$

где a - коэффициент порядка единицы.

В ультрарелятивизме, при $\gamma^2 \gg \frac{b}{b-R}$, имеем

$$Z(\Omega, n) \cong \frac{8\pi^3 i n^2}{b \Omega} \cdot \frac{b-R}{b}. \quad (2.11)$$

Для малых γ , когда $\gamma^2 \ll \frac{b}{b-R}$, импеданс равен

$$Z(\Omega, n) = \frac{8\pi^4 i n^2 a}{b \Omega \gamma^2}. \quad (2.12)$$

В отличие от E-слоя, для очень тонкого кольца без учёта энергетического разброса срыва неустойчивости в релятивизме не происходит, но инкремент уменьшается пропорционально величине $\frac{b-R}{b}$. Однако с увеличением размера a_z возможен срыв неустойчивости, т.е. при $\frac{a_z}{b-R} > 1$ кольцо ведет себя так же, как E-слой. Для сравнения инкрементов НОМ в кольце и E-слое введем для кольца линейную плотность $\sigma = \frac{N}{2a_z}$. Тогда из формул для импедансов (2.12) и (2.7) или соответствующей формулы (2.8) следует уменьшение инкремента для кольца в $\sqrt{\frac{a_z}{b-R}}$ раз при равных линейных плотностях σ .

До сих пор мы занимались эффектом отрицательной массы для пучка вблизи стенки, когда выполняется условие (2.2). Теперь перейдем к случаю, когда пучок находится на большом расстоянии от стенки, но по-прежнему будем считать, что условие (2.1) выполняется. Оказывается, что оно может удовлетворяться в полосах между резонансами, когда ширина полосы достаточно велика. Поскольку аналитическое рассмотрение НОМ в этом случае провести нелегко, мы сделаем некоторые качественные выводы, основываясь на численном расчёте импеданса для E-слоя вдали от стенки и ограничиваясь лишь первыми гармониками. Как видно из рис. 1, можно выделить различные области по радиусу, в которых импеданс имеет существенно различный характер. В заштрихованной области импеданс имеет чисто емкостный характер, в незаштрихованной — индуктивный,

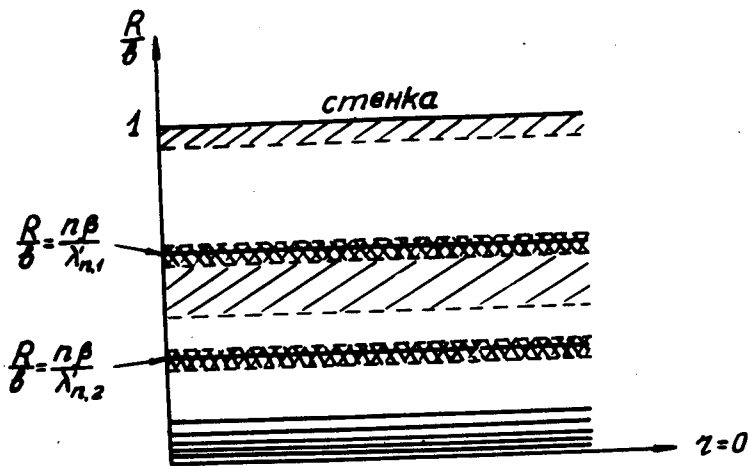


Рис. 1

в дважды заштрихованной - импеданс имеет большую активную часть. Поэтому последняя область соответствует радиационной неустойчивости, которая будет рассмотрена далее. Как уже говорилось раньше, область с емкостным импедансом соответствует неустойчивости НОМ для моноэнергетического пучка. Характерно, что чередование полос с различными свойствами импеданса повторяется в каждой полосе между резонансами (на рисунке для наглядности изображены лишь первые две полосы).

Областям, соответствующим радиационной неустойчивости, будет посвящена следующая работа.

Авторы глубоко признательны Я.Б.Файнбергу, А.Н.Лебедеву, В.И.Курилко, И.Н.Иванову и товарищам по работе за полезную дискуссию.

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Атомная энергия, 7. 549 (1959).
2. С.Е.Nielsen, A.Sessler, K.Symon. GERN Symposium 1959, p115.
("Накопление релятивистских частиц", Госатомиздат, 1963).
3. И.Н.Иванов. Препринт ОИЯИ Р9-3476-2, Дубна, 1967. И.Н.Иванов.
Препринт ОИЯИ Р9-3474-2, Дубна 1967.
4. R.Briggs. Symposium ERA, Berkeley, 1968, p434.
5. А.В.Гапонов, В.К. Юлпатов. Радиотехника и электроника, т. VII ,
вып. 4, 1962 г.
6. А.Н.Лебедев. Диссертация, ФИАН, 1968 г.
7. R.Briggs, V.Neil, Plasma Physics, V 9,2,1967.
8. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. "Высшие трансцендентные функции", т.2, изда-
тельство "Наука", Москва, 1966 г.

Рукопись поступила в издательский отдел

16 апреля 1969 года.