

21/VII-6

П-27

ЖСТФ, 1971, т. 41 №1, с. 23-32

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

P9 - 4423



Э.А.Перельштейн, О.И.Ярковой

О СТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ  
ПОЛЯРИЗОВАННОГО САМОФОКУСИРУЮЩЕГОСЯ  
КОЛЬЦА (УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО  
СГУСТКА)

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1969

**P9 - 4423**

**Э.А.Перельштейн, О.И.Ярковой**

**О СТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ  
ПОЛЯРИЗОВАННОГО САМОФОКУСИРУЮЩЕГОСЯ  
КОЛЬЦА (УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО  
СГУСТКА)**

**Направлено в ЖТФ**

7873/2 нр.

## 1. Физическая постановка задачи

В различных вариантах коллективного метода ускорения В.И.Векслера <sup>/1,2/</sup> некоторая ускоряющая сила  $F_z$  действует на электронное кольцо, которое увлекает за собой кольцо ионов (см. рис. 1). Мы не будем рассматривать здесь те способы коллективного ускорения, когда ускоряющая сила существенно зависит от параметров ускоряемого кольца, например, увлечение сгустка средой.

Основное внимание в этой работе уделяется случаю, когда ионы сильно влияют на движение электронов. Если кольцо как целое не ускоряется, то, как показано в работах <sup>/3,4/</sup>, возможна самофокусировка, если частицы каждого сорта находятся в потенциальной яме в собственной системе координат.

Точно так же при выполнении последнего требования можно получить самофокусирующееся ускоренное электронно-ионное кольцо. Выбрав при этом число электронов гораздо большим числа ионов, можно говорить, что кольцо ускоряется примерно так же, как чисто электронное.

С другой стороны, поскольку ионы движутся вместе с электронами, они приобретают энергию, большую энергии электронов в отношении их полных масс. Именно в этом и заключается основная особенность коллективных методов ускорения.

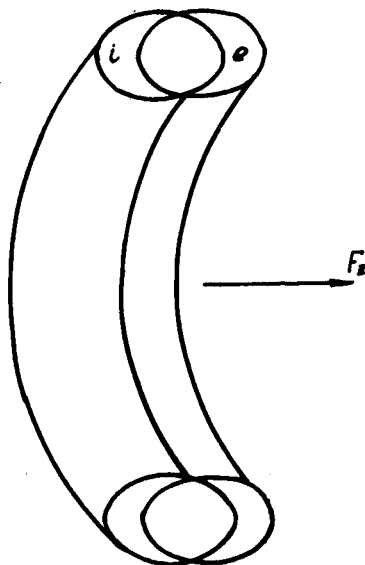


Рис. 1.

## 2. Стационарная в Мёллеровой системе координат модель

Ясно, что найти решение поставленной здесь самосогласованной задачи в общем виде весьма затруднительно. Более того, как это будет видно из дальнейшего, даже тогда, когда задача сводится к нелинейным интегральным уравнениям для самосогласованного поля, решение их сопряжено с серьезными трудностями.

В ряде случаев успеха можно добиться построением модели объекта, под которой понимается частное решение кинетического уравнения с самосогласованным полем без учета столкновений. При таком подхо-

де достаточно знать некоторые интегралы движения частицы в самосогласованном поле (обычно число их не превосходит двух, в крайнем случае, трех) для построения модели с определенными заданными свойствами <sup>/5/</sup>. В первую очередь при этом требуется интегрируемость функции распределения в пространстве импульсов, т.к. плотность частиц в координатном пространстве должна быть конечной. Наиболее простым, и в то же время достаточно эффективным, является использование интегралов движения, связанных с однородностью задач по определенной координате. Для стационарных задач вопрос о конечной плотности можно решить, как правило, используя в качестве одного из интегралов движения гамильтониан частицы <sup>/5/</sup>.

Поставленная в этой работе задача принципиально нестационарна в любой инерциальной системе координат, однако, в некоторых вариантах она может быть стационарной в Мёллеровой равноускоренной системе. Эта система была введена Мёллером <sup>/6/</sup>, использование ее в теории ускорителей рассматривается в работе <sup>/7/</sup>. Если внешнее поле имеет постоянные и однородные в лабораторной системе координат напряженности электрического и магнитного полей, то электронно-ионное кольцо будет ускоряться равномерно. В соответствующей Мёллеровой равноускоренной системе все внешние поля, включая и гравитационное, связанное с неинерциальностью системы, не зависят от времени. Поэтому в такой системе координат можно искать стационарное решение поставленной здесь задачи. Размеры кольца могут поддерживаться постоянными за счет сил самофокусировки.

Можно показать <sup>/7/</sup>, что в этом случае сохраняется ковариантная временная составляющая четырех-импульса, совпадающая с точностью до знака с гамильтонианом.

Рассматривая вращение частиц в кольце, потребуем азимутальной однородности кольца, как и в работе <sup>/5/</sup>, и воспользуемся соответ-

вующим интегралом движения. Кинетическое уравнение используем в ковариантной форме, предложенной в работе /8/, и приведенной также в обзоре /7/.

Пусть пространственные координаты точки в ускоренной системе заданы в цилиндрической системе координат, тогда метрический тензор Мёллеровой равноускоренной системы координат  $(t, r, \theta, z)$  имеет вид:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} h^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$h = 1 + w z$$

Здесь  $w$  — ускорение электронно-ионного сгустка как целого в сопутствующей системе координат, скорость света в вакууме положена равной единице.

Временная ковариантная компонента четырех-импульса частицы в такой системе координат записывается как

$$p_0 = h^2 p^0 = -h \sqrt{m_{e,i}^2 + p_r^2 + r^2 p_\theta^2 + p_z^2} \quad (2)$$

Индексы "e" и "i" здесь и в дальнейшем указывают на то, что соответствующие величины относятся к электронам, либо к ионам,  $p^\alpha$  — обычный релятивистский импульс частицы в Мёллеровой системе.

Интегралы движения, связанные с однородностью задачи по времени и азимутальному углу  $\theta$ , суть обобщенные импульсы:

$$P_{0e,i} = p_0 + e_{e,i} A_0 = \text{const} \quad (3)$$

$$P_{\theta e,i} = p_\theta + e_{e,i} A_\theta = \text{const} .$$

Эти выражения соответствуют лагранжиану, приведенному в /7/, причем величина  $A_0$  равна скалярному потенциалу электромагнитного поля, взятому с обратным знаком,  $A_\theta$  — соответствующая компонента векторного потенциала; далее мы будем считать заряды электрона и иона соответственно равными  $e_e = -e$ ,  $e_i = e$ .

Используя выражения (3), можно построить функцию распределения по аналогии с /5/, что позволит использовать специфику нелинейности уравнений для самосогласованного поля, свойственную этой модели. Итак, мы выбираем функцию распределения

$$f_{e,i} = \frac{\kappa}{8\pi^2 e^2} \delta(P_{0e,i} + H_{e,i}) \delta(P_{\theta e,i} - M_{e,i}), \quad (4)$$

которой отвечает отсутствие разброса по азимутальному обобщенному импульсу и по полной энергии частиц. Вычислим плотность четырех-тока в Мёллеровой системе координат, используя эту функцию распределения, по формулам, данным в /8,7/.

В результате вычислений, проводящихся точно так же, как в работе /5/, имеем

$$J^0 = J_e^0 + J_i^0; \quad J^\theta = J_e^\theta + J_i^\theta; \quad J^{r,z} = 0, \quad (5)$$

где

$$J_{e,i}^0 = \frac{\kappa_{e,i} m_{e,i}}{4\pi e_{e,i} h^2 r} \gamma_{e,i} \sigma_{e,i}; \quad J_{e,i}^\theta = \frac{-\kappa_{e,i} m_{e,i}}{4\pi e_{e,i} h r^2} v_{e,i} \sigma_{e,i}$$

$$\gamma_{e,i} = \frac{H_{e,i} + e_{e,i} A_0}{h m_{e,i}}; \quad v_{e,i} = \frac{M_{e,i} - e_{e,i} A_\theta}{r m_{e,i}} \quad (6)$$

$$\sigma_{e,i} = \begin{cases} 1 & \gamma_{e,i}^2 - v_{e,i}^2 - 1 > 0 \\ 0 & \gamma_{e,i}^2 - v_{e,i}^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Мы получили, таким образом, плотность тока, отличную от нуля лишь в той области пространства, где полная энергия частицы, имеющей обобщенный азимутальный импульс  $P_\theta$ , не превосходит заданной полной энергии  $H_{e,i}$ .

Используя выражения для четырех-тока (5-6), с помощью общих формул, выражающих четырех-потенциал через ток в Мёллеровой системе координат /7/, получим

$$\begin{aligned} \text{ch} A^0 &= \frac{\kappa_e m_e}{4\pi s_e} \int_{S_e} G \gamma \gamma_e dr' dz' - \frac{\kappa_i m_i}{4\pi s_i} \int_{S_i} G \gamma \gamma_i dr' dz' + \text{ch} A_{\text{вн.}}^0 \\ \text{er} A^\theta &= -\frac{\kappa_e m_e}{4\pi s_e} \int_{S_e} G_{\cup \cup_e} \frac{r}{r'} dr' dz' + \frac{\kappa_i m_i}{4\pi s_i} \int_{S_i} G_{\cup \cup_i} \frac{r}{r'} dr' dz' + \text{er} A_{\text{вн.}}^\theta \end{aligned} \quad (7)$$

где, в соответствии с (6),  $S_e(S_i)$  - область, где выполняется неравенство  $\gamma_{e,i}^2 - \dot{U}_{e,i}^2 - 1 \geq 0$ ,  $A_{\text{вн.}}^0$  и  $A_{\text{вн.}}^\theta$  - компоненты четырех-потенциала внешнего поля,

$$G_\gamma = \int_0^{2\pi} G \left( 1 + \frac{w^2 R^2}{2h h} \right) d\theta$$

$$G_{\cup} = \int_0^{2\pi} G \cos \theta d\theta$$

$$G = \frac{1}{R \sqrt{h h} \left( 1 + \frac{w^2 R^2}{4h h} \right)} ; \quad R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta + (z - z')^2}$$

$$h = h(z') = 1 + w z'$$

Выражения для четырех-потенциалов  $A_c^0$  и  $A_c^\theta$ , определяющих собственные поля, соответствуют в инерциальной системе координат запаздывающим потенциалам. Следует заметить, что такое соответствие для одиночной частицы означает совпадение выражений для четырех-потенциала с формулами Борна, которые дают правильные выражения для полей в области абсолютного будущего /9/. Для наших целей,



однако, этого оказывается вполне достаточно и никаких модификаций четырех-потенциала, согласно обсуждению этого вопроса в работе /9/, не требуется. Компонента  $A_r^r$  равна нулю, это следует прямо из равенства нулю компоненты тока в  $r$ -направлении. Легко показать также, что с помощью градиентного преобразования, не затрагивающего компонент  $A_\phi^0$  и  $A_\phi^\theta$ , можно обратить в нуль и компоненту  $A_\phi^z$ . Система уравнений (7) после подстановки величин  $\gamma$  и  $\psi$  из (6) является искомой системой уравнений для самосогласованного поля. Ее решение дает в результате решение поставленной задачи.

Отметим, что в систему (7) входит параметр  $w$  - ускорение, определяющее прирост энергии кольца как целого в инерциальной системе координат. Этот параметр не был до сих пор определен в связи с ускоряющим полем и вопрос о его определении нетривиален. Из физических соображений ясно, что при заданных размерах кольца, числе частиц и их энергии, а также при заданной величине ускоряющего поля параметр  $w$  ограничен сверху. С другой стороны, при должном уменьшении сечения кольца, что всегда возможно для самофокусирующегося пучка /10/, система способна выдержать сколь угодно большое ускорение. Однако при заданном ускоряющем поле ускорение  $w$  все же ограничено, т.к. при уменьшении сечения кольца возрастает его полевая масса.

### 3. Упрощенные уравнения самосогласованной задачи

Уравнения (7) очень сложны, так что не представляется возможным получить их решение, по-крайней мере в обозримом виде. Поэтому постараемся их упростить, заметив, что если величины  $\gamma$  и  $\psi$  мало меняются по сечению кольца, то плотность частиц и скорость их вращения можно считать приближенно постоянными. Итак, примем

$$\frac{\Delta y}{y} \ll 1; \quad \frac{\Delta u}{u} \ll 1. \quad (8)$$

При этом независимость от координат  $y$  и  $u$  в интегральных операторах следует учитывать лишь в пределах интегрирования. Далее, не ограничивая существенно области применимости результатов, можно принять

$$\frac{S_{e,i}}{\pi r_0^2} \ll \frac{1}{\gamma_e^2}, \quad \frac{w^2 r_0^2}{8} \ll 1. \quad (9)$$

Здесь  $r_0$  — радиус центральной окружности кольца. В этих предположениях систему уравнений (7) можно представить в упрощенном виде, оставляя лишь члены, существенные для определения границы. Введем новую систему координат  $x_1 = r - r_0$ ,  $x_2 = z$ , в которой, согласно первому из неравенств (9), на близких расстояниях можно считать  $\frac{x_2}{r_0} \ll \frac{1}{\gamma_e^2}$ .

Воспользовавшись неравенствами (9), разложим функции Грина  $G_y$  и  $G_u$  в ряды до членов первого порядка по малому параметру  $\frac{x_1}{r_0}$

$$G_y = \frac{2}{r_0} \left[ G_0 - \frac{w(x_2 + x_2')}{2} G_0 - \frac{x_1 + x_1'}{2r_0} (G_0 - 1) \right]$$

$$G_u = G_y - \frac{2}{r_0} \left[ 2 - w(x_2 + x_2') - \frac{x_1 + x_1'}{2r_0} \right], \quad (10)$$

где

$$G_0 = \ln \frac{8r_0}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}}.$$

Тогда потенциалы (7) с точностью до членов, пропорциональных

$$\frac{S_{e,i}}{\pi r_0^2} \ln \frac{8r_0}{\sqrt{S_{e,i}}} = \frac{S_{e,i}}{\pi r_0^2} L_{e,i},$$

запишутся в виде

$$\frac{ehA^0}{m_e} = \frac{\nu_e r_0}{S_e} \int_{s_e} G_\gamma dx'_1 dx'_2 - \frac{\nu_i r_0}{S_i} \int_{s_i} G_\gamma dx'_1 dx'_2 + \frac{ehA^0_{\text{ВН.}}}{m_e}$$

$$\frac{erA^\theta}{m_e} = -\frac{\nu_e \beta_0 r}{S_e} \int_{s_e} G_\gamma dx'_1 dx'_2 + \frac{\nu_e r_0}{S_e} \int_{s_e} G_\gamma \frac{x'_1}{r_0} dx'_1 dx'_2 + \frac{erA^\theta_{\text{ВН.}}}{m_e} \quad (11)$$

Здесь введены величины  $\nu_e$  и  $\nu_i$  - соответственно "погонный" электрон и ион, следующие из нормировки функции распределения (4) и равные

$$\nu_e = \frac{\kappa_e S_e}{4\pi r_0} \gamma_{\text{ц}}, \quad \nu_i = \frac{\kappa_i S_i m_i}{4\pi r_0 m_e} = \frac{\kappa_i S_i}{4\pi r_0 \mu} \quad (12)$$

Кроме того мы приняли величины  $\gamma_{e,i}$  и  $\nu_{e,i}$  в соответствии с неравенствами (8) равными их значениям на радиусе  $r=r_0$  при  $z=0$  для электронов  $\gamma_e \approx \gamma_{\text{ц}}$ ,  $\nu_e = \beta_0 \gamma_{\text{ц}}$ , при этом азимутальное движение электронов считается существенно релятивистским; и для ионов  $\gamma_i \approx 1$ ,  $\nu_i \approx 0$ , т.е. ионы в кольце вращаются очень медленно. Остановимся теперь более подробно на неравенствах (8).

Будем рассматривать случай, когда большой радиус кольца поддерживается постоянным за счет внешнего однородного магнитного поля, которому соответствует четырех-потенциал  $A_i = \frac{r^2 H_z}{2} \delta_{i,\theta}$ .

Уравнение движения электрона в  $r$ -направлении имеет вид:

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H_e}{\partial r} = h \frac{\left( \frac{M_e + e A \theta}{r^3} \right)^2 - e \frac{M_e + e A \theta}{r^2} \frac{\partial A \theta}{\partial r}}{\sqrt{m_e^2 + \frac{(M_e + e A \theta)^2}{r^2} + p_r^2 + p_z^2}} - e \frac{\partial A_0}{\partial r}. \quad (13)$$

Выделим в правой части последнего выражения члены нулевого порядка по параметру малости  $\frac{x_i}{r_0}$  и приравняем их сумму к нулю, что обеспечит удержание постоянного значения большого радиуса кольца; оставшиеся члены войдут в уравнения для отклонения частицы от центральной окружности. При этом, однако, необходимо учесть, как это мы уже сделали выше, что масса фиктивной частицы, вращающейся по центральной окружности с релятивистской скоростью  $\beta_0$ , в принятой здесь модели отличается от массы одиночной частицы, вращающейся с той же скоростью на том же радиусе. Это различие связано с поперечными колебаниями электрона в эффективной потенциальной яме <sup>/4/</sup>.

Поэтому, если ввести релятивистский фактор  $\gamma_{\perp} = \sqrt{1 + \frac{p_{\perp}^2}{m_e^2}}$ , где  $p_{\perp}$  — поперечный релятивистский импульс частицы, проходящей через центральную окружность, то полный релятивистский фактор фиктивной центральной частицы будет равен  $\gamma_{\perp} = \gamma_0 \gamma_{\perp}$ , где  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$  и соответственно  $v_{e\perp} = \frac{M_e + e A \theta_{\perp}}{m_e r_0} = \beta_0 \gamma_{\perp}$ .

Используя эти обозначения и пренебрегая собственными полями кольца по сравнению с внешним магнитным полем, что возможно в случае выполнения неравенств  $\frac{v_{e,i}}{\gamma_0} L_{e,i} \ll 1$ , получаем величину внешнего магнитного поля, необходимого для удержания большого радиуса кольца постоянным

$$H_z = \gamma_0 \gamma_{\perp} \beta_0 \frac{e}{r_0 r_e}. \quad (14)$$

Здесь  $r_e$  — классический радиус электрона. Это выражение совпадает с полученным в работе /4/.

Отметим, что малость собственных полей необходимо требовать также для того, чтобы сохранить скорости ионов нерелятивистскими. Действительно, если допустить, что собственные поля сравнимы по величине с внешним магнитным полем, то ионы начнут дрейфовать в скрещенных радиальном электрическом и внешнем магнитных полях со скоростью порядка  $\frac{v_e L}{\gamma_0} \approx 1$ . Так как такой дрейф нежелателен для коллективных методов ускорения, мы не будем рассматривать здесь этот случай. Разложение  $v_e$  вблизи центральной окружности имеет вид:

$$v_e = \beta_0 \gamma_0 \gamma_{\perp} \left[ 1 - \frac{e \Delta A_{\theta}^c}{m_e \beta_0 \gamma_0 \gamma_{\perp} r_0} \right] \quad (15)$$

$$\Delta A_{\theta}^c = A_{\theta}^c - A_{\theta \perp}^c$$

В этом приближенном равенстве мы отбросили члены, ответственные за слабую радиальную фокусировку в постоянном магнитном поле, считая самофокусировку преувеличивающей. Как видно из последней формулы, величины  $v_e$  и, соответственно,  $\gamma_e$  можно считать мало меняющимися по сечению кольца лишь при выполнении неравенства  $\frac{vL}{\gamma_0} \ll 1$ , т.е. опять-таки когда собственные поля малы, а также когда энергия поперечных колебаний много меньше энергии вращательного движения. Таким образом, приближенные выражения (11) верны для достаточно малых собственных полей. Учет следующих членов в разложении  $\gamma$  и  $v$  в подынтегральных выражениях формул (7) относится к следующему приближению по параметру малости  $\frac{vL}{\gamma_0}$ .

Следует иметь в виду, однако, что эти члены необходимо учитывать при нахождении границ электронно-ионного сгустка, поскольку при этом сравнивается глубина эффективной потенциальной ямы для каждого сорта частиц и разность поперечной кинетической энергии в центре и на границе сгустка.

Границы электронно-ионного сгустка находятся, как это видно из формул (6), как решение уравнений

$$\gamma_{e,i}^2 - \nu_{e,i}^2 - 1 = 0. \quad (16)$$

Этим уравнениям соответствуют приближенные

$$(\hbar-1) \gamma_{ц} + \frac{e}{m_e} (\Delta A_0 - \frac{\beta_0 \Delta A \theta}{r_0})' = \hbar \frac{\gamma_{\perp}^2 - 1}{2 \gamma_{ц}} \approx \frac{2 T_e'}{\gamma_0 m_e} \quad (17)$$

$$\frac{1}{\mu} (\hbar-1) - \frac{e}{m_e} \Delta A_0' = \frac{2 T_i}{m_e}, \quad (18)$$

которые получаются из (16) в предположении малости собственных полей и малости энергий поперечных колебаний, как это было оговорено выше. Кроме того в уравнениях (17) и (18) справа величина  $\hbar$  положена равной единице, т.к. здесь малая добавка к единице несущественна.

В формулах (17) и (18) введены обозначения:  $T_e'$  - поперечная температура электронов в собственной системе координат и  $T_i$  - ионная поперечная температура в лабораторной системе;  $\Delta A_0 = A_0 - A_{\theta ц}$ ; штрихи в приведенных формулах означают, что в соответствующих выражениях должны быть отброшены члены, линейные по  $x_1$ , поскольку они учитываются при выборе внешнего магнитного поля. Отметим, что условия (17)-(18) представляют собой обобщение на случай ускорения условий Беннета-Будкера для самофокусирующих пучков <sup>/3,4,10/</sup>, а

именно: они дают связь между поперечным разбросом и глубиной эффективной потенциальной ямы для каждого сорта частиц.

Займемся теперь вопросом о выборе Мёллеровской равноускоренной системы координат, в которой поведение кольца не меняется со временем, считая заданным внешнее ускоряющее поле. Из кинетического уравнения записанного в ковариантном виде <sup>/7/</sup>, можно получить уравнение для тензора энергии-импульса частиц и собственного поля  $T^{kj} = T^{kj} + U_c^{kj}$  в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T^{kj}) + \Gamma_{ik}^j T^{ik} = -g^{ji} F_{ik}^{BH} j^k. \quad (19)$$

Здесь  $g$  - определитель метрического тензора (1),

$$T_{\text{ч}}^{kj} = \int \frac{\sqrt{-g} p^k p^j}{p_0} f dp^1 dp^2 dp^3 ;$$

$$U_c^{ik} = -\frac{1}{4\pi} g_{mn} F_c^{im} F_c^{kn} + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{mn}^c F_c^{mn} ;$$

$F_{mn}^c$  - тензор собственного электромагнитного поля,  $F_{ik}^{BH}$  - тензор внешнего электромагнитного поля,  $\Gamma_{ik}^j$  - символы Кристоффеля. Мы рассматриваем уравнение (19) в области, где нет сторонних источников электромагнитного поля, поэтому в этих уравнениях внешние заряды и токи учитываются лишь тензором  $F_{ik}^{BH}$ .

Рассмотрим третью компоненту уравнения (19). Положим, что внешнее ускоряющее электрическое поле постоянно в лабораторной системе координат и напряженность его  $-E_z$ . Домножив полученное уравнение на  $\sqrt{-g}$ , проинтегрируем его по пространственным Мёллеровым координатам по области, достаточно большой по сравнению с областью занимаемой сгустком, но так, чтобы внешние заряды оставались вне области интегрирования. Тогда, вычисляя  $T_{\text{ч}}^{ik}$  с помощью функции распределения (4), взяв выражение для  $J^0$  из (5) и замечая быстрый спад соб-

ственных полей на далеких расстояниях от сгустка, получаем условие, следующее из стационарности задачи в Мёллеровой системе

$$w = \frac{e E_z^{\text{ВН.}} (1 - \alpha)}{m_e \gamma_{\text{ц}} + m_i \alpha}, \quad (20)$$

где  $\alpha = \frac{N_i}{N_e}$  - отношение полного числа ионов к числу электронов в сгустке.

Потенциал внешнего (однородного в лабораторной системе) электрического поля в Мёллеровой системе координат имеет вид  $A_0 = -z(1 + \frac{wz}{2})E_z^{\text{ВН.}}$ . После подстановки этого потенциала в формулы (17) и (18) с учетом связи (20) с точностью до малых членов порядка  $w^2 z^2$  имеем

$$-\frac{e}{m_e} (\Delta A_0^c - \frac{\beta_0 \Delta A_0^c}{r_0}) - \alpha w x_2 \frac{\gamma_{\text{ц}} + 1/\mu}{1 - \alpha} = \frac{2T_e'}{m_e \gamma_0} \quad (21)$$

$$-\frac{e}{m_e} \Delta A_0^{c'} + w x_2 \frac{\gamma_{\text{ц}} + 1/\mu}{1 - \alpha} = \frac{2T_i}{m_e} \quad (22)$$

#### 4. Возможная модель ускорения электронно-ионного сгустка

Как видно из уравнений (21), (22) и (11), в общем виде найти границу электронно-ионного сгустка даже при сделанных нами упрощающих задачу допущениях все же трудно. Поэтому введем дополнительное предположение о форме сгустка, а затем, используя это пробное решение, исследуем случаи, когда оно мало отличается от истинного.

Будем полагать, что и электроны и ионы занимают области, ограниченные эллипсами, центры которых расположены симметрично относи-



тельно начала координат оси  $z$  и лежат на этой оси. Кроме того, будем искать такое решение, когда большая и малая полуоси электрочного и ионного эллипсов совпадают по величине и равны соответственно  $a$  и  $b$ . Тогда состояние системы определяется девятью параметрами: релятивистским фактором электронов  $\gamma_{\text{ц}}$ , полным числом частиц каждого сорта  $N_i$  и  $N_e$ , большой и малой полуосью эллипсов и расстоянием между их центрами  $d$ , поперечными температурами  $T'_e$  и  $T'_i$  и ускорением Мёллеровой системы относительно лабораторной  $w$ . Зная эти параметры и задавая большой радиус кольца  $r_0$ , с помощью формул (14) и (20) можно найти внешние поля, необходимые для существования такого кольца.

Перепишем формулы (21) и (22), подставляя в них выражения для четырех-потенциала, соответствующие нашим предположениям. Эти выражения находятся из формул (11), в которых поперечное сечение кольца считается эллиптическим. В результате вычислений, аналогичных проведенным в /11/, имеем:

$$\frac{eh \Delta A_c^0}{m_e} = 2\nu_i \Phi_i - 2\nu_e \Phi_{oe} \quad (23)$$

$$\frac{e \Delta A_\theta^c}{m_e} = -2\beta_0 r_0 \nu_e \Phi_{oe},$$

где

$$\frac{x_1^2}{(a+b)b} + \frac{x_2^2}{(a+b)a} \quad x_{1,2} \in S_{e(i)}$$

$\Phi_{oe(i)} =$

$$-\ln \frac{2(a+b)e^{-1/2}}{r_1+r_2+\sqrt{(r_1+r_2)^2-4(a^2-b^2)}} + \frac{(r_1-r_2)^2-2(a^2-b^2)}{[r_1+r_2+\sqrt{(r_1+r_2)^2-4(a^2-b^2)}]^2} (x_{1,2} \in S_{e(i)})$$

$r_1$  и  $r_2$  — расстояния от фокусов эллипса до точки наблюдения,  $x_1$  и  $x_2$  отсчитываются от центра соответствующих эллипсов. После подстановки (23) в (21) и (22) получаем

$$-\frac{2\nu_e}{\gamma_0^2} \Phi_{oe} + 2\nu_i \Phi_{oi} - \alpha w x_2 \frac{\gamma_{\Pi} + 1/\mu}{1 - \alpha} = \frac{2T_e'}{m_e \gamma_0} \quad (24)$$

$$-2\nu_i \Phi_{oi} + 2\nu_e \Phi_{oe} + w x_2 \frac{\gamma_{\Pi} + 1/\mu}{1 - \alpha} = \frac{2T_i}{m_e} \quad (25)$$

Заметим теперь, что для симметрии граничных кривых электронного и ионного сгустков относительно плоскости  $z=0$  достаточно, чтобы уравнения (40) и (41) переходили друг в друга при подстановках  $x_{1e} = x_{1i}$ ,  $x_{2e} = -x_{2i}$  в первом из этих уравнений и  $x_{1i} = x_{1e}$ ,  $x_{2i} = -x_{2e}$  во втором из них. Этого можно добиться, если потребовать выполнения условий:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\nu_e}{\nu_i} = \gamma_0, \quad \frac{T_e'}{T_i} = 1. \quad (26)$$

Уравнение границы записывается тогда в виде

$$-\frac{2\nu_e}{\gamma_0^2} \Phi_{oe} + \frac{2\nu_e}{\gamma_0} \Phi_{oi} - w x_2 \frac{\gamma_{\Pi} + 1/\mu}{\gamma_0 - 1} = \frac{2T_e'}{m_e \gamma_0} \quad (27)$$

Если кольцо не ускоряется, то в данном примере границы электронного и ионного колец совпадают и, как показано в работе /10/, сохраняя погонную плотность и температуру частиц постоянными, малый размер кольца можно задать произвольным образом. В случае ускоряющегося кольца также возможно говорить о подобном преобразовании малого размера кольца, если сохранять постоянной величину типа  $wa$ .

Далее потребуем совпадения кривой, которая определяется уравнением (27), с пробным эллипсом в трех точках, например, выберем точки (для электронной границы): 1)  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{d}{2} - a$  2)  $x_1 = b$ ,  $x_2 = \frac{d}{2}$ ; 3)  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{d}{2} + a$ .

Тогда с учетом условий (26) нам остается задать только четыре параметра. Пусть это будут  $a$ ,  $d$ ,  $\gamma_0$  и  $\nu_e$ . Перепишем уравнение (27) в виде:

$$-\Phi_{oe} + \gamma_0 \Phi_{oi} - A \frac{x_2}{a} = B, \quad (28)$$

где

$$A = \frac{wa\gamma_0^2}{2\nu_e} \frac{\gamma_{ц+} + 1/\mu}{\gamma_0 - 1}, \quad B = \frac{T_e' \gamma_0}{m_e \nu_e}. \quad (29)$$

Тогда, задавая величины  $t = \frac{d}{a}$  и  $\gamma_0$ , из трех уравнений находим величины  $s = \frac{b}{a}$ ,  $A$  и  $B$ . Результаты численного решения приведены на рис. 2,3. На рис. 4,5 и 6 показаны формы поперечного сечения сгустков для различных значений относительного расстояния между центрами электронного и ионного колец. Пунктирной линии соответствует пробная эллиптическая граница, сплошной – форма границы, полученная из уравнения (28) как первое приближение к пробной.

Это приближение получается после подстановки в уравнение (28) параметров  $s$ ,  $A$  и  $B$ , найденных по трем точкам.

Заметим, что при выбранном размере  $a$  относительным расстояниям  $t$  соответствуют вполне определенные величины ускорения кольца как целого и глубины потенциальной ямы для электронов и ионов, которые можно определить с помощью графиков (рис. 3) и формул (29).

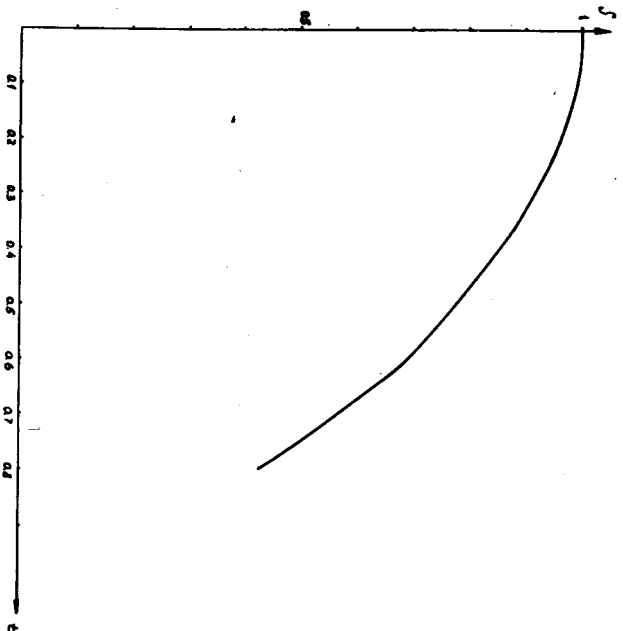


Рис. 2.

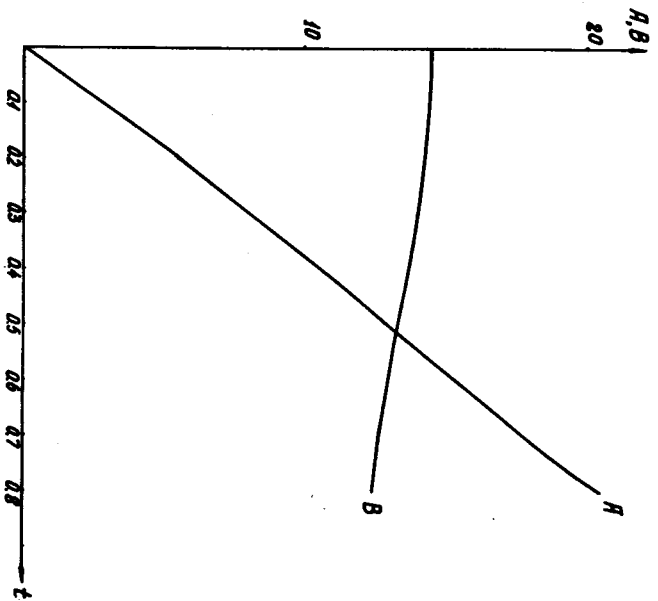


Рис. 3.

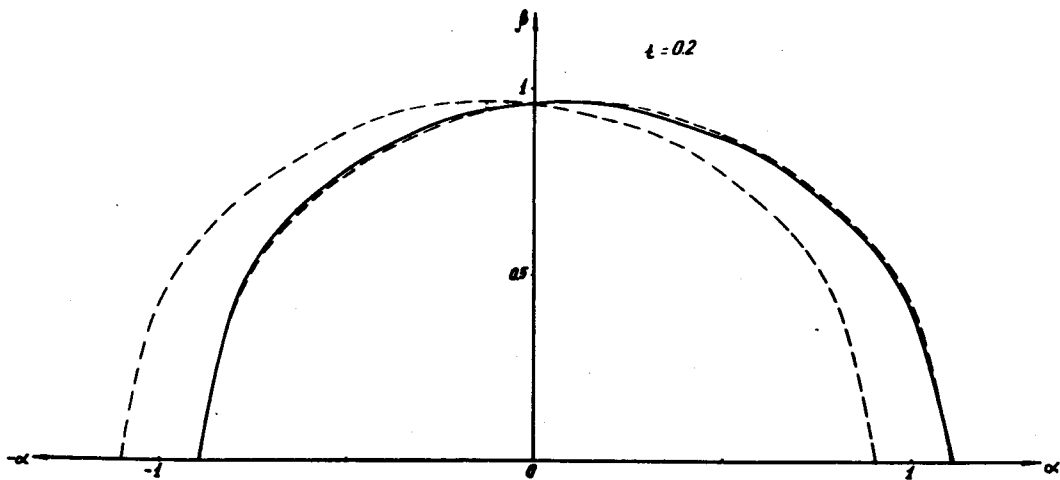


Рис. 4.

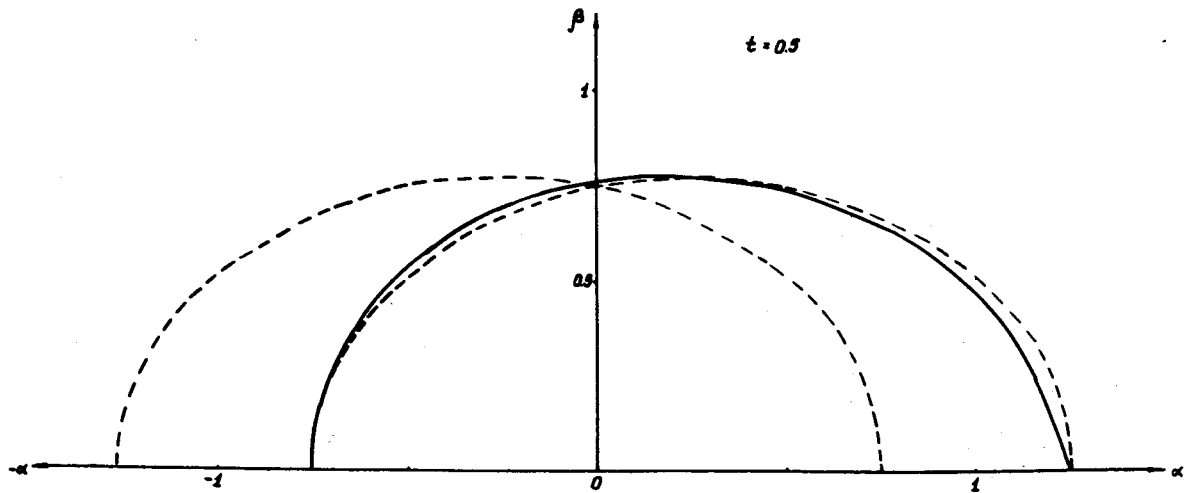


Рис. 5.

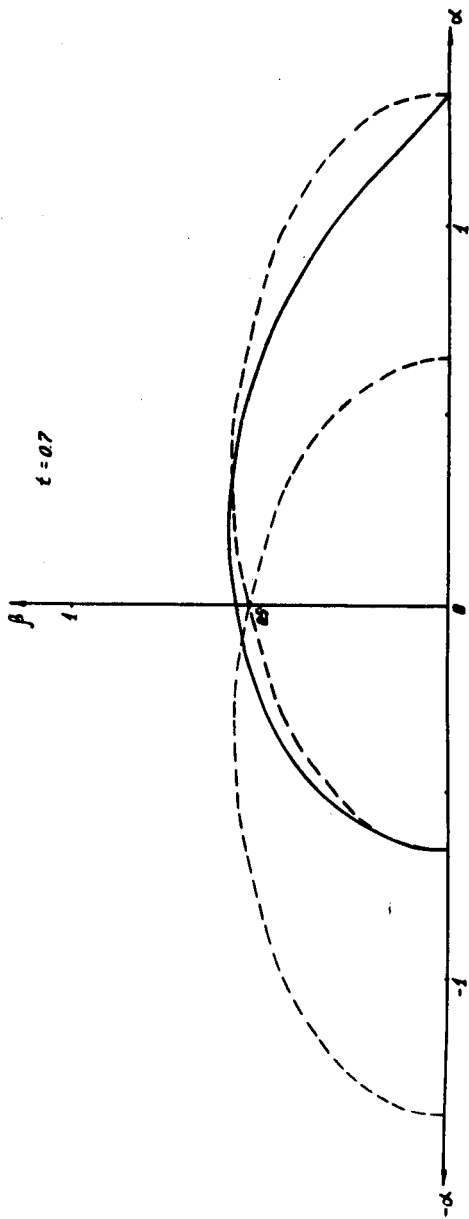


Рис. 6.



## З а к л ю ч е н и е

Основываясь на полученном частном решении, можно сделать вывод о возможности построения математической модели ускорения самофокусирующегося электронно-ионного сгустка. В рассмотренном примере, когда параметры кольца выбирались специальным образом, оказалось, что при не слишком больших значениях ускоряющего поля (см. рис. 4,5,6) форма малого сечения электронного и ионного колец и расстояние между их центрами находятся достаточно точно. При этом сечения колец - эллиптические.

В других случаях требуются более сложные численные расчеты.

В общем случае, однако, можно утверждать, что при ускорении, так же как и в отсутствие его <sup>/3,4/</sup>, имеется стационарное в собственной системе состояние самофокусирующегося электронно-ионного пучка, если для каждого вида частиц существует потенциальная яма с учетом неинерциальных сил.

Авторы благодарны И.А. Золиной и М.Г. Нехаевой за помощь в работе.

## Л и т е р а т у р а

1. В.И. Векслер. Атомная энергия. 5, 1957.
2. В.И. Векслер, В.П. Саранцев, А.Г. Бонч-Осмоловский, Г.В. Долбилов, Г.А. Иванов, И.Н. Иванов, М.Л. Иовнович, И.В. Кожухов, А.Б. Кузнецов, В.Г. Маханьков, Э.А. Перельштейн, В.П. Рашевский, К.А. Решетникова, Н.Б. Рубин, С.Б. Рубин, П.И. Рыльцев, О.И. Ярковой. Коллективное линейное ускорение ионов. Препринт ОИЯИ Р9-3440-2, Дубна 1967 г; Доклад на IV -й Международной конференции по ускорителям, США, Кембридж 1967 г.

3. Bennet, Phys.Rev., 98, 1584 (1955).
4. Г.И. Будкер. Атомная энергия, 5, 1956.
5. О.И. Ярковой. ЖТФ, XXXII, 11, 1285, 1962.
6. C.Møller. On Homogenous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox, Copenhagen. 1943. (Труды Датской Академии Наук, 2, №19).
7. А.Г. Бонч-Осмоловский, Э.А. Перельштейн, Н.Б. Рубин, С.Б. Рубин, О.И. Ярковой. Об использовании неинерциальных Мёллеровых систем координат в теории ускорителей. Препринт ОИЯИ 2649-2, Дубна 1966.
8. Н.А. Черников. Диссертация ОИЯИ 1963.
9. T.Fulton and F.Rohrlich. Annals of Physics, 9, 499-517 (1960).
10. О.И. Ярковой. Две особенности плоских двумерных самофокусирующихся пучков. Препринт ОИЯИ 2180, Дубна 1965.
11. Э.А. Перельштейн, О.И. Ярковой. Электромагнитное поле заряженного пучка, свернутого в азимутально-однородное кольцо. Препринт ОИЯИ 2351, Дубна 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел

16 апреля 1969 года.