ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 4337

В.Г.Маханьков, Б.Г.Щинов

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ В ОБЛАСТИ ЧАСТЫХ КУЛОНОВСКИХ СОУДАРЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

1969

Р9 - 4337

В.Г.Маханьков, Б.Г.Щинов

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ В ОБЛАСТИ ЧАСТЫХ КУЛОНОВСКИХ СОУДАРЕНИЙ

Направлено в ЖЭТФ

§1. Введение

Хорошо известно, что электромагнитные свойства плазмы существенно зависят от того, к какой области характерных плазменных частот принадлежит рассматриваемая частота колебаний[x/]. В невозмущенной плазме характерными частотами являются плазменные - электронная и ионная, циклотронно-гибридные, дрейфовые и др. частоты[1,2,3]. В достаточно плотной плазме, кроме того, появляются еще частоты парных соударений частиц ν_e - электрон-электронных и электрон-ионных и ν_i ион-ионных. При этом естественно, что при переходе в область частот, меньших частоты парных соударений частиц, дисперсионные свойства плазмы значительно меняются (возможно появление новых видов неустойчивостей и др.)[4,5].

В турбулентной плазме, кроме перечисленных выше характерных частот, появляются новые, связанные с эффективными турбулентными соударениями частиц и плазмонов между собой. При этом оказывается, что даже в условиях слабой турбулентности, когда относительная плотность энергии, заключенной в пульсациях, невелика $\frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$ ($n_0 T_e$ - плотность тепловой энергии плазмы), частоты турбулентных соударений $\nu_{эф}$ могут быть достаточно большими, особенно если развита высокочастотная

[x/] Здесь и в дальнейшем под термином электромагнитные свойства плазмы мы будем понимать линейный отклик плазмы на произвольное слабое электромагнитное поле.

(например, ленгмюровская) турбулентность [6,7]. Эти частоты могут быть сравнимы или даже значительно превосходить частоту парных соударений частиц. Естественно предположить, что дисперсионные свойства слаботурбулентной плазмы в области частот, меньших $\nu_{эф}$, могут значительно отличаться от "спокойной" плазмы, в которой не возбуждены коллективные степени свободы. Если к тому же $\nu_{эф} \gg \nu_e$, то плазму можно рассматривать как бессоударительную в области

$$\nu_e \ll \omega \ll \nu_{эф} . \qquad (1.1)$$

Для изотропной и однородной плазмы такое исследование было проведено в [9,10] (см. также [6]). В этих же работах было обнаружено, что колебания типа ионно-звуковых (в неизотермической плазме $T_e \gg T_i$) в присутствии фона ленгмюровских волн становятся неустойчивыми, и был найден критерий возникновения этой неустойчивости

$$\frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} > 12 \frac{v_{Te}^2}{(v_{ф}^{B})^2} . \qquad (1.2)$$

Наконец, в работах [11-12] был предложен общий метод исследований дисперсионных свойств плазмы в области частот меньших максимальной частоты турбулентных соударений[x]. Однако вышеприведенные

---

[x] Здесь следует отметить, что эффективных частот соударений в действительности бесконечный ряд $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \dots$, что соответствует разложению ядра интегрального уравнения по параметру $\frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$. О возможности суммирования этого ряда и о пределах применимости такого разложения см. [13]. Здесь мы будем рассматривать случай $\nu_1 \sim \nu_e \gg \nu_2$ и $\nu_e \gg \omega \gg \nu_2$.

работы касались лишь бессоударительной плазмы, т.е. когда выполнено неравенство (1.1). Вместе с тем в плотной плазме (создаваемой, например, лазером [14]) частота парных соударений ν_e может быть довольно велика (10^{15} сек$^{-1}$), кроме того в астрофизических условиях представляют интерес возбуждения длинноволновых низкочастотных (н.ч.) колебаний.

Рассмотрим случай, когда

$$\nu_2 \ll \omega \ll \nu_{\text{эф} \, max}, \; \nu_e . \qquad (1.3)$$

В §2 методом, аналогичным развитому в [11-12], получено выражение для продольной части нелинейной диэлектрической проницаемости слаботурбулентной плазмы $\epsilon^{\ell}(\omega, \vec{k}, W^{\ell})$ в области частот (1.3). При получении $\epsilon^{\ell}(\omega, \vec{k}, W^{\ell})$ использовались результаты работы [15], в которой была найдена относительно простая система гидродинамических уравнений, дающая адекватное описание нелинейных явлений в плазме в интересующей нас области частот.

В §3 исследуется дисперсионное уравнение $\epsilon^{\ell}(\omega, \vec{k}, W^{\ell}) = 0$ и найдены критерии неустойчивости и инкременты нарастания колебаний типа акустических, получены новые нелинейные ветви колебаний, которые могут рассматриваться как "второй" звук в газе плазмонов.

Наконец, в §4 найдены пределы применимости полученных результатов.

§2. Нелинейная диэлектрическая проницаемость плазмы

Поскольку нас интересуют электромагнитные свойства слаботурбулентной (квазистационарной) плазмы[x], будем искать линейный отклик такой плазмы на некоторое слабое регулярное электрическое поле E^R. В [15] была получена система гидродинамических уравнений, весьма удобная для дальнейших вычислений. Там же было показано, что с достаточной

[x] О квазистационарных спектрах слаботурбулентной плазмы см. [17].

точностью в.ч. турбулентность (здесь мы ее будем считать ленгмюровской) может быть описана уравнениями бессоударительной гидродинамики

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \vec{V}_e = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \vec{\nabla}) \vec{V}_e = \frac{e}{m} \vec{E}, \tag{2.2}$$

а н.ч. поле следующими уравнениями:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial n_e \vec{V}_e}{\partial \vec{r}} = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i \vec{V}_i}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{2.3}$$

$$m_e n_e \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_e \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) \right] V_{e,\alpha} = -\frac{\partial n_e T_e}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} - e n_e E_\alpha + R_\alpha \tag{2.4}$$

$$m_i n_i \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) \right] V_{i,\alpha} = -\frac{\partial n_i T_i}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_{i\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + e n_i E_\alpha - R_\alpha \tag{2.5}$$

$$\frac{3}{2} n_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_e \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) T_e + n_e T_e \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{V}_e = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{q}_e - \pi_{e,\alpha\beta} \frac{\partial V_{e\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_e \tag{2.6}$$

$$\frac{3}{2} n_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) T_i + n_i T_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{V}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{q}_i - \pi_{i,\alpha\beta} \frac{\partial V_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_i \;, \tag{2.7}$$

где $\vec{R} = \vec{R}_U + \vec{R}_T$, $\vec{R}_U$ – сила трения, $\vec{R}_T$ –термосила и аналогично $\vec{q}_e = q^e_U + q^e_T$, $\vec{U} = \vec{V}_e - \vec{V}_i$; m_e , m_i – массы, n_e , n_i – концентрации, T_e , T_i – температуры электронов и ионов, соответственно.

$\vec{R}_U = -0{,}51 m_e n_e \nu_e \vec{U}$, если величина $\vec{U}$ соответствует н.ч. колебаниям и $\vec{R}_U = -m_e n_e \nu_e \vec{U}$, если $\vec{U}$ соответствует в.ч. колебаниям

$$\vec{R}_T = -0{,}71\, n_e \frac{\partial T_e}{\partial \vec{r}}, \qquad \vec{q}^{\,e}_U = 0{,}71\, n_e T_e \vec{U},$$

$$q^e_T = -3{,}16 \frac{n_e T_e}{m_e \nu_e} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} T_e, \qquad \vec{q}_i = -3{,}9 \frac{n_i T_i}{m_i \nu_i} \frac{\partial T_i}{\partial \vec{r}},$$

$$Q_e = -(\vec{R}\vec{U}) - Q_i, \qquad Q_i = 3\frac{m_e}{m_i} n_e \nu_e (T_e - T_i), \tag{2.8}$$

$$\pi^e_{\alpha\beta} = -0{,}73 \frac{n_e T_e}{\nu_e} W^{(e)}_{\alpha\beta}; \qquad \pi^i_{\alpha\beta} = -0{,}96 \frac{n_i T_i}{\nu_i} W^{(i)}_{\alpha\beta}$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \delta_{\alpha\beta} \frac{2}{3} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}.$$

В соответствии с нашей задачей разложим все искомые функции как хаотические (турбулентные), так и регулярные в ряд по амплитуде слабого регулярного поля E^R и оставим члены не выше линейного. Вводя следующие обозначения

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^R + \vec{\mathcal{E}} \\ n &= n^R + \tilde{\tilde{n}} \\ \vec{V} &= \vec{V}^R + \vec{\tilde{\tilde{V}}}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

(здесь $\vec{\mathcal{E}}$, $\tilde{\tilde{n}}$, $\vec{\tilde{\tilde{V}}}$ – суть средние значения функций $\vec{E}$, n, $\vec{V}$ по статистическому ансамблю), будем иметь

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}^{(0)} + \vec{\mathcal{E}}^{(1)}$$

$$\tilde{\tilde{n}} = \tilde{\tilde{n}}^{(0)} + \tilde{\tilde{n}}^{(1)} \qquad (2.10)$$

$$\tilde{\tilde{V}} = \tilde{\tilde{V}}^{(0)} + \tilde{\tilde{V}}^{(1)},$$

где величины $\mathcal{E}^{(0)}$, $n^{(0)}$, и $\tilde{\tilde{V}}^{(0)}$ не зависят от E^R, а $\mathcal{E}^{(1)}, \tilde{\tilde{n}}^{(1)}, \tilde{\tilde{V}}^{(1)}$ -пропорциональны E^R.

Подставим разложения (2.9) и (2.10) в уравнения (2.1) -(2.7) и оставим лишь линейные по E^R члены. При этом уравнения нулевого порядка по E^R выполняются, так как по предположению турбулентность плазмы квазистационарна. Уравнение (2.6) приводит к слабому соударительному нагреву плазмы /16/, который можно учесть в адиабатическом приближении, если выполнены неравенства

$$\frac{\nu_e W}{\omega\, n_0 T_e} \ll 1 \qquad (2.11)$$

или

$$\frac{1}{\omega t} \ll 1 , \qquad (2.12)$$

если (2.11) не выполнено. В условиях (2.11) температура $T_e^{(0)}$ входит в уравнения, линейные по E^R, как постоянный параметр. В условиях (2.12) температуры уже являются медленно изменяющейся функцией времени, вообще говоря, пропорциональной W, поэтому величина $T_e^{(0)}$ зависит от момента установления квазистационарности.

Вернемся к системе уравнений, линейных по E^R. Как было уже отмечено во введении, мы будем рассматривать турбулентные соударения лишь низшего порядка по энергии турбулентности W, поэтому в уравнениях (2.1)-(2.2) можно оставить линейные по $\mathcal{E}$ члены, а в системе уравнений для н.ч. колебаний (2.3)-(2.7) удерживать члены второго порядка по $\mathcal{E}$ или $\tilde{\tilde{V}}$. При этом для Фурье-компонент искомых функций получим:

$$\left(-i\omega + i\frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega}\right)V_{ke}^R = -0{,}51\nu_e U_k^R - 1{,}71\, ik v_{Te}^2 \frac{T_{ke}^R}{T_{oe}} - \frac{e}{m}E_k^R \tag{2.13}$$

$$\left(-\frac{3}{2}i\omega + 3{,}16\frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e} + 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\right)\frac{T_{ke}^R}{T_{oe}} = -ikV_{ke}^R - 0{,}71\, ik U_k^R +$$

$$+3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\frac{T_{ki}^R}{T_{oe}} - \frac{m_e\nu_e}{T_{oe}}\int \langle \tilde{\tilde{V}}_{k_1}^{(0)} \tilde{\tilde{V}}_{k_2}^{(1)} \rangle \delta(k-k_1-k_2)\,dk_1 dk_2 \tag{2.14}$$

$$\left(-i\omega + 1{,}28\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\nu_i} + i\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega}\right)V_{ki}^R = -ik v_{Ti}^2\frac{T_{ki}^R}{T_{oi}} + 0{,}71\, k v_{Ti}^2\frac{T_{ke}^R}{T_{oi}} + 0{,}51\frac{m_e}{m_i}\nu_e U_k^R + \tag{2.15}$$

$$+\frac{e}{m}E_k^R$$

$$\left(-\frac{3}{2}i\omega + 3{,}9\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\nu_i} + 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\right)\frac{T_{ki}^R}{T_{oi}} = -ikV_{ki}^R + 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\frac{T_{ke}^R}{T_{oi}}. \tag{2.16}$$

Здесь

$$\tilde{\tilde{V}}_k^{(0)} = \frac{e}{m_e}\frac{(\vec{\mathcal{E}}^{(0)}\vec{k})}{\omega_k k}, \tag{2.17}$$

$$\tilde{\tilde{V}}_k^{(1)} = \frac{1}{k\,\epsilon^{\Pi}(\omega,\vec{k})}\int \frac{k_1'}{\omega_1'}\frac{(\vec{k}\vec{k}_2')}{k_2'} V_{k_1'}^R \tilde{\tilde{V}}_{k_2'}^{(0)} \delta(k-k_1'-k_2')\,dk_1' dk_2'. \tag{2.18}$$

получается в результате решения линеаризованных по E^R уравнений (2.1), (2.2) совместно с

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} = 4\pi e \, (n_e - n_i) . \tag{2.19}$$

Подставляя (2.17), (2.18) в (2.14) и решая получившуюся систему совместно с

$$\frac{\partial \vec{E}^R}{\partial t} = - 4\pi \vec{j}^R , \tag{2.20}$$

получим продольную часть нелинейного тензора диэлектрической проницаемости плазмы:

$$\epsilon^H(\omega, \vec{k}) = 1 + i \frac{\omega_{oe}^2}{\omega_e \kappa \omega} \frac{1 - \frac{m_e}{m_i} \frac{A_i \omega_e}{A_e \omega_i} \beta}{1 + \beta} + i \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{oe}^2}{\omega_i \kappa \omega} , \tag{2.21}$$

$$\omega_i = - i\omega + i \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega} + 1{,}28 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\nu_i} + \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\Omega_i} - \frac{T_{oe}}{T_{oi}} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\Omega_e} (0{,}71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_i})(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_i}) \tag{2.22}$$

$$\omega_e = - i\omega + i \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega} + 1{,}71 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e} (1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_i}) , \tag{2.23}$$

$$\Omega_i = - \frac{3}{2} i\omega + \delta\nu + 3{,}9 \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\nu_i} \tag{2.24}$$

$$\Omega_e = - \frac{3}{2} i\omega + \delta\nu + 3{,}16 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e} - \frac{(\delta\nu)^2}{\Omega_i} ; \quad \delta\nu = 3 \frac{m_e}{m_i} \nu_e \tag{2.25}$$

$$\kappa = 1 + (0{,}51\,\nu_e + 1{,}71\,(0{,}71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_i})\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e})(\frac{1}{\omega_e} + \frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\omega_i}) \tag{2.26}$$

$$A_e = 1{,}71 + \frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\omega_i}(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_i})(0{,}51\,\nu_e + 1{,}71\,(0{,}71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_i})\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e}) \tag{2.27}$$

$$A_i = 0{,}71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_i} - \frac{1}{\omega_e}(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_i})(0{,}51\,\nu_e + 1{,}71(0{,}71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_i})\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e}) \tag{2.28}$$

$$\beta = -\frac{ik^2 \nu_e A_e e^2}{\kappa\,\Omega_e\,\omega_e\,8\pi^2 m_e^2\,\omega}\int \frac{(\vec{k}_1(\vec{k}-\vec{k}_1))^2}{k_1^2|\vec{k}-\vec{k}_1|^2}\,\frac{(\vec{k}\,\dfrac{\partial N^{\ell}_{\vec{k}_1}}{\partial \vec{k}_1})}{\omega - \vec{k}\,\vec{v}_g}\,d\vec{k}_1, \tag{2.29}$$

$v_g = \dfrac{\partial \omega_{\vec{k}}}{\partial \vec{k}}$ – групповая скорость в.ч. колебаний, $N^{\ell}_{\vec{k}_1}$ – число плазмонов, которое может быть определено из соотношения $W^{\ell} = \int \omega_{\vec{k}_1} N^{\ell}_{\vec{k}_1} d\vec{k}_1$.

§3. Низкочастотные спектры слаботурбулентной плазмы

Рассмотрим здесь дисперсионное уравнение

$$\epsilon^{H}(\omega, \vec{k}, W^{\ell}) = 0. \tag{3.1}$$

Выше было отмечено, что его решение справедливо в области $|\omega - k v_{T\alpha}| \ll \ll \nu_e$, $(\alpha = e, i)$. Кроме того, в целях получения обозримых результатов целесообразно эту область разбить на несколько более мелких областей, определяемых неравенствами

1) $\delta\nu \gg \omega \gg k v_{Te}$ (3.2)

2) $\omega \ll k v_{Te}, \ \delta\nu, \ \dfrac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$ (3.3)

3) $\dfrac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e}, \ \delta\nu \ll \omega \ll k v_{Te}$ (3.4)

4) $\delta\nu \ll \omega \ll k v_{Te}, \ \dfrac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$ (3.5)

5) $\dfrac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e} \ll \omega \ll k v_{Te}, \ \delta\nu .$ (3.6)

Подчеркнем здесь, что в пределе слабой нелинейности существовали лишь две ветви колебаний, разделенные областью сильного поглощения /18/: высокочастотная $\omega_s < \dfrac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$ и низкочастотная $\omega_s > \dfrac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$. И в том, и в другом случае величина ω_s могла быть оценена как $\omega_s \approx v_{Ti} \sqrt{(1+\frac{T_e}{T_i})}$.

Как мы увидим в дальнейшем, в слаботурбулентной плазме могут появляться совершенно новые ветви колебаний (в том числе типа "второго" звука), которые в определенных условиях становятся неустойчивыми.

В первой области (3.2) решение дисперсионного уравнения (3.1) в условиях

$$\frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} \gg \frac{k v_{Te}}{\nu_e} \frac{m_i}{m_e} \qquad (3.7)$$

есть

$$\omega^5 = i k^4 v_{Te}^4 \delta\nu \frac{W^{\ell}}{n_0 T_e}. \qquad (3.8)$$

В пределе, обратном (3.7), решения в рассматриваемой области не существует.

Во второй области (3.3) решения (3.1) существуют лишь при весьма малом уровне ленгмюровской турбулентности (и $v_ф > v_{Te}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$)

$$\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2 \ll \frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} \ll \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \qquad (3.9)$$

$$\omega^3 = - i k^2 v_{Te}^2 \nu_e \frac{W^{\ell}}{n_0 T_e}. \qquad (3.10)$$

Обратимся теперь к наиболее интересным (с точки зрения величины инкремента) решениям дисперсионного уравнения (3.1). Для этого рассмотрим область (3.5). Заметим попутно, что именно в этой области существует линейная "высокочастотная" акустическая ветвь $\omega_s = kv_{Ti}\sqrt{\left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{5}{3}\right)}$.

Уравнение имеет вид:

$$\omega^4 - k^2 v_{Ti}^2 \left(\frac{5}{3} - \frac{T_e}{T_i}\right)\omega^2 - k^2 v_{Ti}^2 \frac{T_e}{T_i} 0{,}24 \frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} \nu_e^2 = 0, \qquad (3.11)$$

отсюда

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_{Ti}^2\left(\frac{5}{3} + \frac{T_e}{T_i}\right)}{2} \pm \sqrt{\frac{k^4 v_{Ti}^4 \left(\frac{5}{3} + \frac{T_e}{T_i}\right)^2}{4} + k^2 v_{Ti}^2 \nu_e^2 \frac{T_e}{T_i} 0{,}24 \frac{W^{\ell}}{n_0 T_e}}. \qquad (3.12)$$

Нетрудно видеть, что из (3.12) получаются линейные решения при достаточно малой W^{ℓ}.

Если

$$\frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} > \frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e^2} \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{5}{3} \frac{T_i}{T_e} + 1\right)^2 = \frac{W^{\ell}_{kp}(\nu)}{n_0 T_e}, \qquad (3.13)$$

то рассматриваемые колебания (3.12) становятся неустойчивыми, при этом инкремент этой неустойчивости есть:

$$\gamma \approx k v_{Te} \left(\frac{\nu_e}{k v_{Te}}\right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{W}{n_0 T_e}\right)^{1/4}. \qquad (3.14)$$

Сравним получающиеся результаты с нелинейными колебаниями бесстолкновительной слаботурбулентной плазмы.

Как известно, в случае $\omega \gg \nu_e$ уравнение, аналогичное (3.11), при $kv_{Ti} < \omega < kv_{Te}$ имеет вид /6/ x/

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_*^2 + \omega_s^2) - (\omega_{\approx}^2 - \omega_*^2)\omega_s^2 = 0$$

$$\omega_*^2 = k^2 v_s^2, \quad \omega_{\approx}^2 = \frac{3}{4} \frac{W^{\ell} k^2}{n_0 m_e}, \qquad (3.15)$$

и неустойчивые решения возникают при

$$\frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} > 12 \frac{v_{Te}^2}{v_{\text{ф}}^2} \approx \frac{m_e}{m_i} = \frac{W^{\ell}_{kp}}{n_0 T_e}. \qquad (3.16)$$

---

x/ В /13/ показано, что уравнение (3.15) справедливо лишь в весьма узкой области фазовых скоростей ленгмюровских волн

$$v_{\text{ф}} < 3 v_{Te} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}.$$

Сравнивая (3.16) и (3.13), видим, что возбуждение нелинейных акустических колебаний возможно при гораздо меньших энергиях турбулентности

$$\frac{W^{\ell}_{kp}(\nu)}{W^{\ell}_{kp}} \approx \frac{k^2 v^2_{Te}}{\nu^2_e} \ll 1 . \tag{3.17}$$

Кроме того, поскольку $W^{\ell}_{kp}(\nu)$ пропорционально k^2, длиннноволновые колебания становятся неустойчивыми при относительно меньших W^{ℓ}. Решение (3.14) ограничено следующей областью изменения величин k, W^{ℓ}

$$\frac{\nu_e}{v_{Te}}\left(\frac{m_e}{m_i}\frac{W^{\ell}}{n_0 T_e}\right)^{1/6} \ll k \ll \frac{\nu_e}{v_{Te}}\left(\frac{m_i}{m_e}\frac{W^{\ell}}{n_0 T_e}\right)^{1/2} \tag{3.18}$$

$$\frac{W^{\ell}_{kp}(\nu)}{n_0 T_e} < \frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} < \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{9/2} . \tag{3.19}$$

Наконец, решения уравнения (3.1) в областях (3.6), (3.4) непосредственно переходят друг в друга при изменении частоты от $\omega < \delta\nu$ к $\omega > \delta\nu$. и совпадают с (3.8)

$$\omega^5 = i k^4 v^4_{Te}\, \delta\nu \frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} . \tag{3.20}$$

При этом должно выполняться неравенство

$$\frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 . \tag{3.21}$$

§4. Краткие выводы

Вышеприведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

1. Дисперсионные свойства слаботурбулентной плазмы в области $\omega \ll \nu_e$ (как и в бессоударительном случае) могут коренным образом отличаться от таковых в отсутствие турбулентности.

2. Нелинейные неустойчивости в рассматриваемой области появляются при относительно малом (в сравнении со случаем $\omega > \nu_e$) уровне турбулентности (см. формулу (3.17)).

3. При заданном уровне турбулентности W_0^{ℓ} имеется некоторое критическое значение волнового вектора k_0, определяемого левой частью неравенства (3.18). Раскачка колебаний с $k < k_0$ описывается формулой (3.20), а при $k > k_0$ – формулой (3.14), определяющей максимальный инкремент. Если $\frac{W}{n_0 T_e} < \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2$, то решения нелинейного дисперсионного уравнения (3.1) имеют вид (3.10).

4. При получении выражения $\epsilon^{H}(\omega, \vec{k}, W^{\ell})$ мы учитывали члены лишь первого порядка по энергии турбулентности W^{ℓ}, опуская члены более высокой степени. Получим условия, при которых справедливо такое рассмотрение. Согласно /12/, турбулентными соударениями, пропорциональными второй и более степеням W^{ℓ}, можно пренебречь, если выполнено неравенство

$$\frac{k}{k_1}\left|\omega - k v_g\right| \gg \omega_{cor} . \tag{4.1}$$

Здесь ω_{cor} – действительная часть нелинейной поправки к частоте, связанной с нелинейными взаимодействиями лингмюровских волн. Максимальную величину ω_{cor} имеет при $v_{ф} > v_{Te}\sqrt{m_e/m_i}$

$$\omega_{cor} \approx \omega_{oe} \frac{W^{\ell}}{n_0 T_e} . \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1), получим, что при $k < k_0$ (решение вида (3.20)) дополнительных ограничений не возникает, а в области $k_0 < k < k_{max}$ (для решения (3.14)) имеем

$$\frac{v_\Phi}{v_{Te}} > \left(\frac{\omega_{oe}}{\nu_e}\right)^2 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 . \qquad (4.2)$$

5. Условие пренебрежимости членов $\approx W^2$ и более в рассматриваемом случае $\omega \ll \nu_e$ не приводит к значительному сокращению области применимости полученных результатов, в отличие от бессоударительного предела, где необходимо учитывать турбулентные соударения более высоких порядков по W^ℓ, за исключением узкой области параметров /13/ x/.

В заключение авторы выражают благодарность В.Н.Цытовичу за обсуждение постановки задачи и полученных результатов.

Литература

1. В.П.Силин, А.А.Рухадзе. "Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред". Атомиздат, Москва, 1961.
2. А.И.Ахиезер, И.А.Ахиезер, Р.В.Половин. А.Г.Ситенко, К.Н.Степанов. "Коллективные колебания в плазме", Атомиздат, Москва, 1964.
3. А.Б.Михайловский. Вопросы теории плазмы, вып. 3, 1963.
4. А.А.Галеев, С.С. Моисеев, Р.З.Сагдеев. АЭ, 15, 183, 1966.
5. А.А.Рухадзе, В.П.Силин. УФН, 96, 87, 1966.
6. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме. Изд. Наука, Москва, 1967.
7. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Nuclear Fusion, 1, 81, 1961.
8. W.E.Drummond, Pines. Nucl. fusion. Suppl. part 3, 1049 (1962).

---

x/ Высказанное утверждение касается лишь раскачки ионного звука ленгмюровскими пульсациями и несправедливо в общем случае взаимодействия других мод колебаний.

9. А.А. Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН, 159, 767, 1964.
10. A.A.Vedenov, A.V.Gordeev, L.I.Rudakov. Plasma Phys., 9, 719 (1967).
11. В.Н.Цытович. ДАН, 181, 1968.
12. Э.Криворуцкий, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович. Препринт ОИЯИ Р9-3982, Дубна 1968; Nuclear Fusion 9, № 2, 1969.
13. В.Н.Цытович, Препринт ФИАН, №121, 1968; ЖЭТФ 56 №6, 1969.
14. U.Ascoli-Bartoli, B.Brunelli, A.Caruso, A.De Angelis, G.Gatti, R.Gratton, F.Parlange., H.Salzmann, Report CN-24/F-6, III Conference IAEA, Новосибирск 1968.
15. В.Г. Маханьков, В.Н.Цытович. Препринт ОИЯИ Р9-4042, Дубна 1968 г.
16. В.Л.Гинзбург, А.В.Гуревич. УФН, 70, 201, 1960.
17. С.Б.Пикельнер, В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 55, 977, 1968.
18. В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 56, №6, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1969 года.