

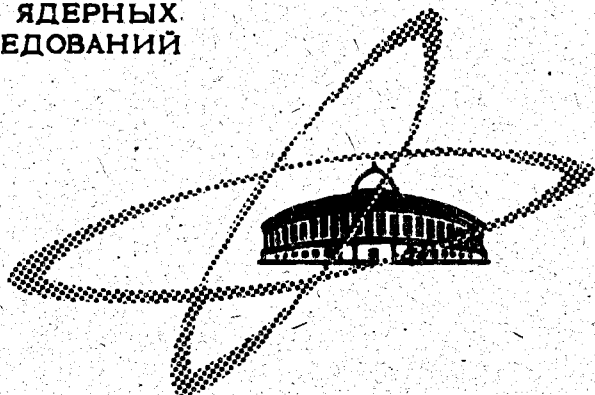
Д-183

28/III-69
Revue Bulgare de Physique
1970, t. 15, n° 1, p. 73-89

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 4324



В.И. Данилов, М. Ианович

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ
РАВНОМЕРНО НАМАГНИЧЕННЫХ
ПО АЗИМУТАЛЬНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ОБЪЕМОВ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

1969

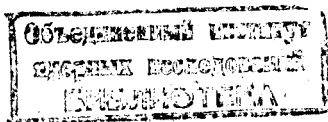
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

P9 - 4324

В.И.Данилов, М.Ианович

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ
РАВНОМЕРНО НАМАГНИЧЕННЫХ
ПО АЗИМУТАЛЬНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ОБЪЕМОВ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Направлено в "Revue Roumaine
de Physique"



В в е д е н и е

Настоящая работа завершает исследования магнитного поля от намагниченного цилиндрического сектора^{/1,2/}. В ней определены выражения для компонент магнитного поля от равномерно намагниченных по азимутальному направлению цилиндрических конфигураций. Как было показано в предыдущих работах^{/1,2/}, полученные выражения для составляющих поля могут быть использованы для расчётов магнитных полей как внутри, так и вне катушек соответствующих форм (эквивалентных по распределению поля для азимутально-намагниченных цилиндрических конфигураций) с током, протекающим по их контуру в бесконечно малом слое.

1. Скалярный потенциал

При направлении внешнего намагничивающего поля по азимуту и учёте того, что ($M_r = M_z = 0$), выражение скалярного потенциала в пространстве, свободном от токов проводимости, можно представить как:

$$\Phi_{1\phi} = \frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \Psi_{1\phi} = \frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \int_{v'} \frac{r \sin(\phi' - \phi)}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dv', \quad (1.1)$$

где \vec{r}' и \vec{r} - векторы-положения элементарного объема и точки наблюдения, а M_ϕ - азимутальная намагниченность элемента объема $dV = r' dr' d\phi' dz'$.

Учитывая, что

$$\frac{r' r \sin(\phi' - \phi)}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} = -\frac{\partial}{\partial \phi'} \left(\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right), \quad (1.2)$$

для цилиндрического кольцевого сектора (см. рис. 1) соотношение (1.1) перепишем в следующем виде:

$$\Psi_{1\phi}(r, \phi, z) = \frac{\partial}{\partial \phi'} \int_{R_1}^{R_2} dr' \int_{-h}^h dz' \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \frac{d\phi'}{[(z' - z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{3/2}} \quad (1.3)$$

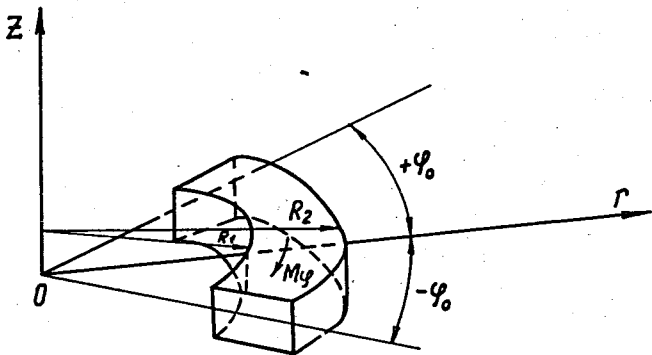


Рис. 1

В области $z < -h, -\phi_0 < \phi < \phi_0$ для которой ограничим в дальнейшем рассмотрение скалярного потенциала, выражение (1.3) можно представить, как

$$\Psi_{1\phi}(r, \phi, z) = - \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dy \int_{R_1}^{R_2} dr' \left\{ - \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{A^{1/2}} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{A^{1/2}} \right\} = \quad (1.4)$$

$$= - \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dy \int_{R_1}^{R_2} dr' \left\{ - \left[\frac{1}{A^{1/2}} \right]_0^{\alpha_1} + \left[\frac{1}{A^{1/2}} \right]_0^{\alpha_2} \right\},$$

где

$$\gamma = z' - z \quad (1.5)$$

$$\alpha = \phi' - \phi \quad \text{или} \quad \alpha = \phi - \phi' \quad (1.6)$$

$$\gamma_1 = -h - z; \quad \gamma_2 = h - z \quad (1.7)$$

$$\alpha_1 = \phi_0 + \phi; \quad \alpha_2 = \phi_0 - \phi \quad (1.8)$$

$$A = \gamma^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha. \quad (1.9)$$

После интегрирования выражения (1.4) по "r'" и по "y", имеем

$$\Psi_{1\phi}(r, \phi, z) = - \left\{ \gamma \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 \sin^2 \alpha}} + (r' - r \cos \alpha) \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha}} \right\}$$

$$-r \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha} \left\| \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \left| \frac{R_2}{R_1} \right| \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| \right\} \quad (1.10)$$

Из свойств скалярного потенциала отметим следующие:

1). Потенциал антисимметричен относительно плоскостей $\phi = \phi_0$

и $\phi = -\phi_0$, которые ограничивают намагниченное тело, т.е.

$$\Psi_{1\phi}(r, \phi, z) \Big|_{\phi=\phi_0+\delta} = -\Psi_{1\phi}(r, \phi, z) \Big|_{\phi=-\phi_0-\delta} \quad (1.11)$$

2). Потенциал симметричен относительно плоскостей $z = h$ и $z = -h$,

которые ограничивают также намагниченное тело, т.е.

$$\Psi_{1\phi}(r, \phi, z) \Big|_{z=h+\epsilon} = \Psi_{1\phi}(r, \phi, z) \Big|_{z=-h-\epsilon} \quad (1.12)$$

2. Компоненты поля

Общее выражение магнитного поля в предположении равномерного намагничивания по азимутальному направлению рассматриваемого объема имеет вид

$$H_{\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \operatorname{grad} \Psi_{1\phi}(r, \phi, z), \quad (2.1)$$

где индекс "(1)" означает первое приближение.

Выражение для компонент магнитного поля найдем из соотношения

$$H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\partial \Psi_{1\phi}}{\partial z}; \quad H_{\phi r}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\partial \Psi_{1\phi}}{\partial r}; \quad (2.2)$$

$$H_{\phi\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi_{1\phi}}{\partial \phi},$$

а в переменных "γ" и "α"

$$H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\partial \Psi_{1\phi}}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z}; \quad H_{\phi\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi_{1\phi}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \phi}, \quad (2.3)$$

$$\text{где при } \gamma = z - z', \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z} = +1 \quad \text{и при } \gamma = z' - z, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -1, \quad (2.4)$$

$$\text{при } \alpha = \phi - \phi', \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = +1 \quad \text{и при } \alpha = \phi' - \phi, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = -1. \quad (2.5)$$

На основе (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) и (1.10), имеем

$$H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \left\{ \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \left\| \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \left| \frac{R_2}{R_1} \right| \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| \right\} \quad (2.6)$$

$$H_{\phi r}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M\phi}{4\pi\mu_0} \left\{ \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^2} + \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha} \right\} \left\| \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \left| \frac{R_2}{R_1} \right| \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| \right\} \quad (2.7)$$

$$H_{\phi\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_{\phi}}{4\pi\mu_0} \left[\sin\alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \cos\alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r'-r\cos\alpha)}{r \sin\alpha A^{1/2}} \right] \frac{a_1}{0} + \quad (2.8)$$

$$+ (a_1 \rightarrow a_2) \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{R_2}{R_1} \right\}$$

где $B = r'^2 + r^2 - 2r'r \cos\alpha$, а $\gamma_1, \gamma_2, a_1, a_2$ определяются (1.7) и (1.8), A определяется из (1.9); математический символ $(a_1 \rightarrow a_2)$ означает вторую скобку, которая получается из первой при замене в ней a_1 на a_2 .

Из свойств компонент магнитного поля отметим следующее:

$$H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, z) = -H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, -z) \quad (2.9)$$

$$H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, z) = -H_{\phi z}^{(1)}(r, -\phi, z)$$

$$H_{\phi r}^{(1)}(r, \phi, z) = H_{\phi r}^{(1)}(r, -\phi, z) \quad (2.10)$$

$$H_{\phi r}^{(1)}(r, \phi, z) = -H_{\phi r}^{(1)}(r, -\phi, z)$$

$$H_{\phi\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = H_{\phi\phi}^{(1)}(r, \phi, -z) \quad (2.11)$$

$$H_{\phi\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = H_{\phi\phi}^{(1)}(r, -\phi, z)$$

С помощью ЭВМ было рассчитано распределение составляющих магнитного поля от азимутально-намагниченных цилиндрических кольцевых секторов для разных значений R_1, R_2, h в плоскости $z = -2h$.

На рис. 2-4 представлены распределения аксиальной, радиальной и азимутальной компонент поля при $2\phi_0 = 60^\circ, \phi = -15^\circ$ и разных значениях $r = \frac{r}{R}$. При этом параметры $\frac{R_1}{R_2}$ и $q = \frac{2h}{R_2}$ варьировались в следующих пределах $\frac{R_1}{R_2} = 0; 0,25; 0,5; 0,75; q = 1; 2; 4$.

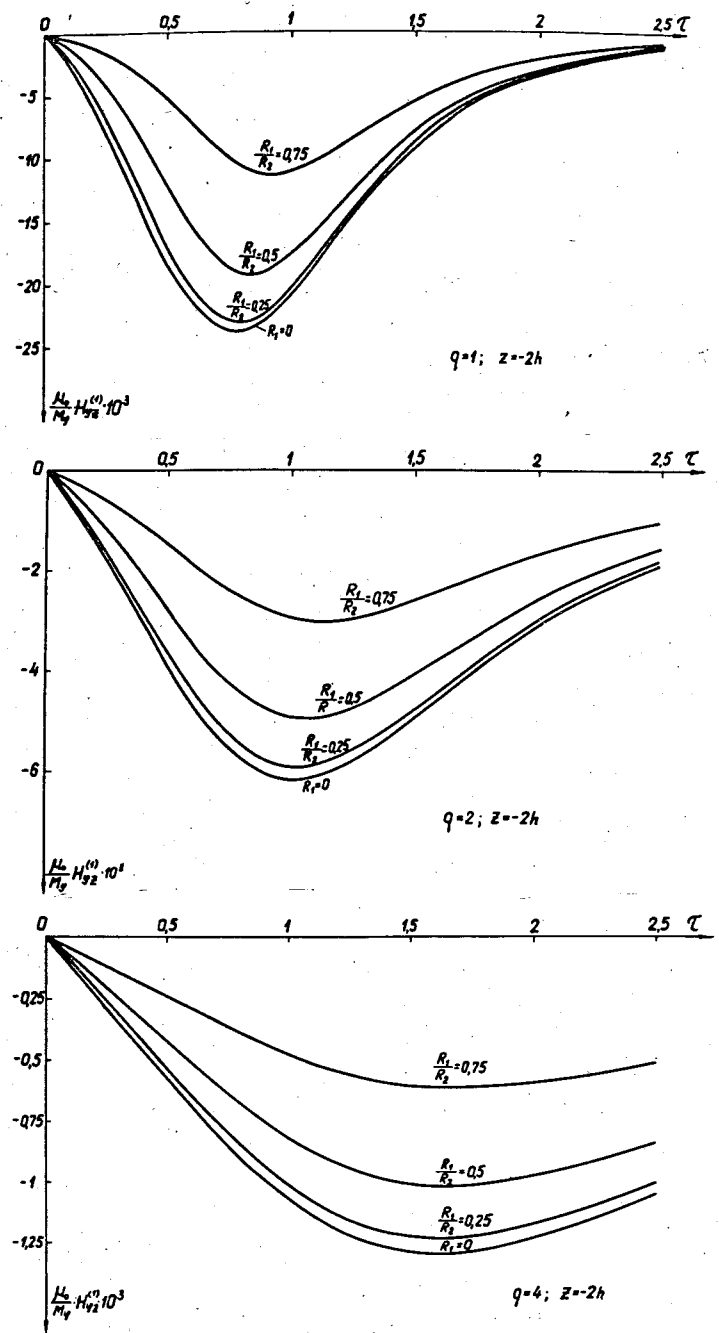


Рис. 2.

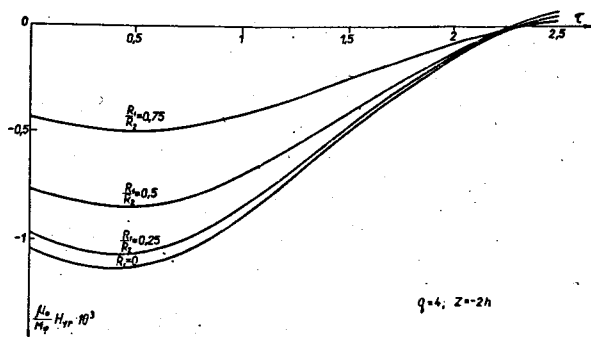
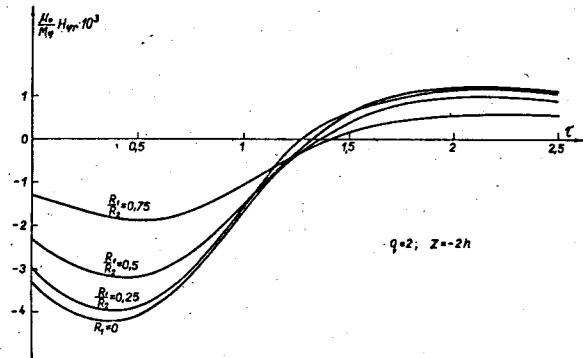
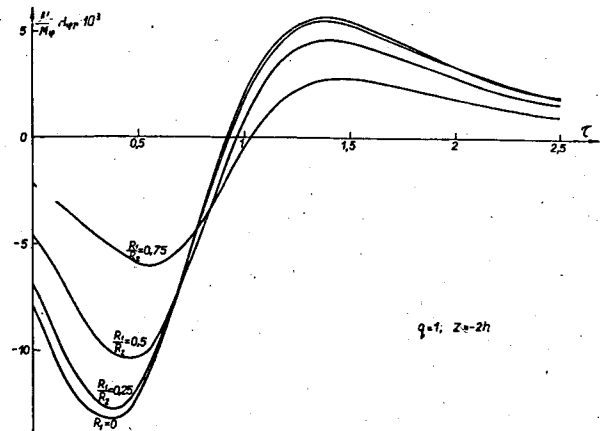


Рис. 3.

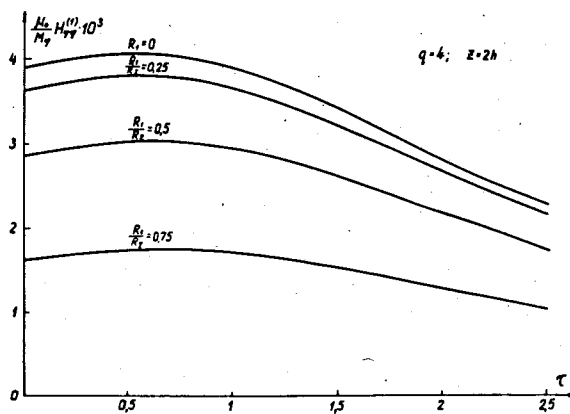
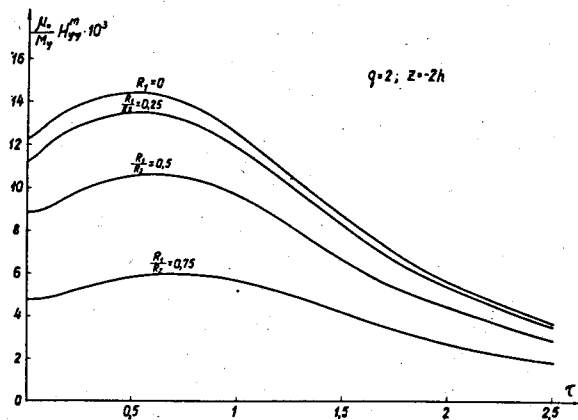
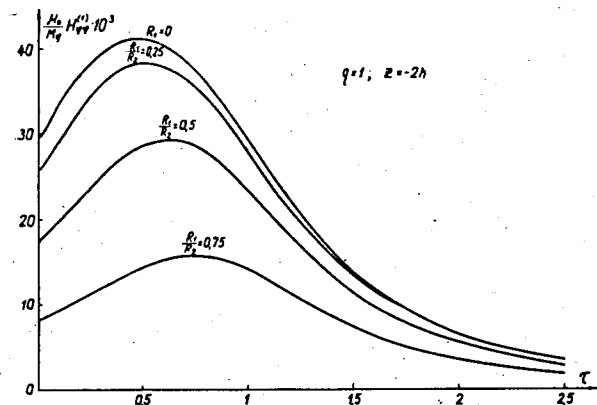


Рис. 4.

Распределение составляющих магнитного поля $H_{\phi z}^{(1)}$, $H_{\phi r}^{(1)}$, $H_{\phi \phi}^{(1)}$ для азимутально-намагниченного цилиндрического кольцевого сектора на фиксированном радиусе, равном среднему радиусу сектора ($r = \frac{R_1 + R_2}{2}$),

в зависимости от угла ϕ , представлено на рис. 5, 6, при $R_1 = 0$

и $\frac{R_1}{R_2} = 0,5$, а также при $q = 1; 2; 4$, $2\phi_0 = 60^\circ$.

Из анализа приведенных графиков следует, что

1) при $\phi = \text{const}$ радиальная составляющая может быть как отрицательной, так и положительной в зависимости от значений параметра

$r = \frac{r}{R_2}$; для одних и тех же параметров $\frac{2h}{R_2}$, $\frac{z}{h}$ и $\frac{R_1}{R_2}$

максимальное значение азимутальной составляющей является приблизительно в два раза большим, чем $(H_{\phi z}^{(1)})_{\text{макс.}}$, и в 3 + 4 раза большим, чем $(H_{\phi r}^{(1)})_{\text{макс.}}$

2) на оси при $r = 0$: $H_{\phi z}^{(1)} = 0$, $H_{\phi r}^{(1)} < 0$, а $H_{\phi \phi}^{(1)} > 0$

3) при $r = \text{const}$ и $\phi = 0$, $H_{\phi z}^{(1)} = 0$, $H_{\phi r}^{(1)} = 0$, а составляющая $H_{\phi \phi}^{(1)}$ достигает максимума, при котором $\frac{\partial H_{\phi \phi}^{(1)}}{\partial \phi} = 0$.

Отметим, что кривые, изображенные на рис. 5, 6, являются соответственно симметричными или антисимметричными относительно плоскости $\phi = 0$, в соответствии с выражениями (2.9), (2.10) и (2.11).

3. Частные случаи

В данной работе не приводятся выражения, описывающие магнитное поле ряда частных азимутально-намагниченных конфигураций (цилиндрические секторы, цилиндры, цилиндрические кольца, бесконечные, полубесконечные и тонкие^{x/} по высоте и по радиусу цилиндрические конфигурации), способ получения которых из соотношения (2.6) + (2.8) не представляет особого труда и приведен в работах^{/1,2/}.

^{x/} Под термином "тонкие" цилиндрические конфигурации понимаем такие конфигурации, у которых один из размеров значительно меньше остальных.

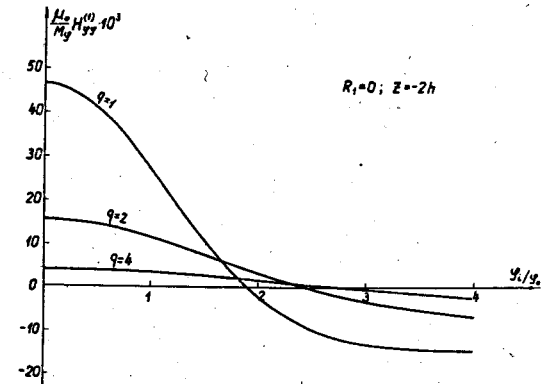
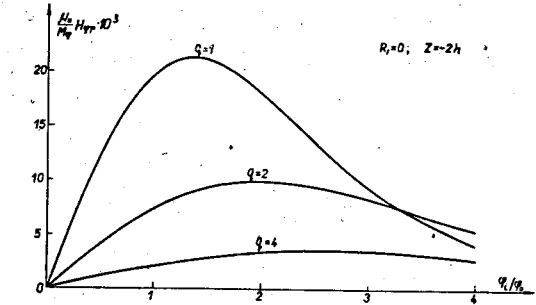
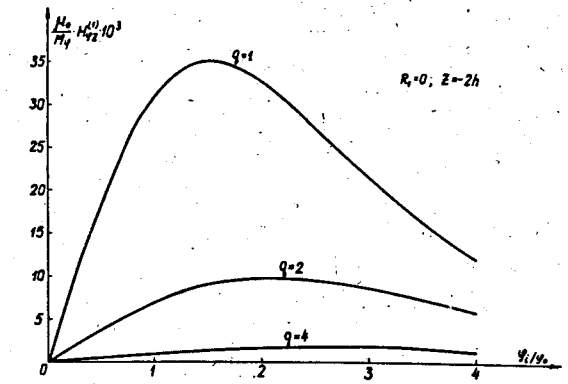


Рис. 5.

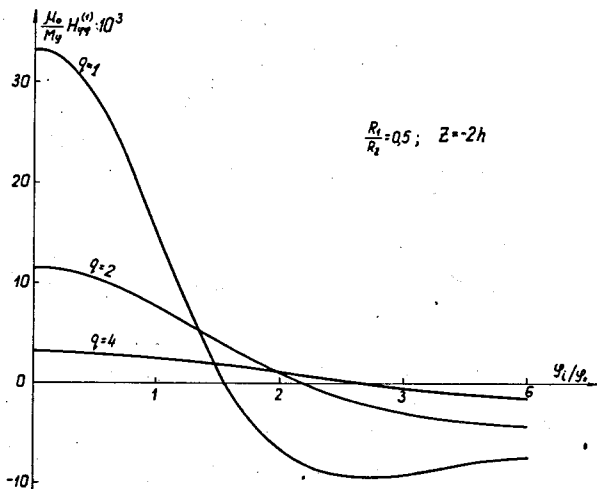
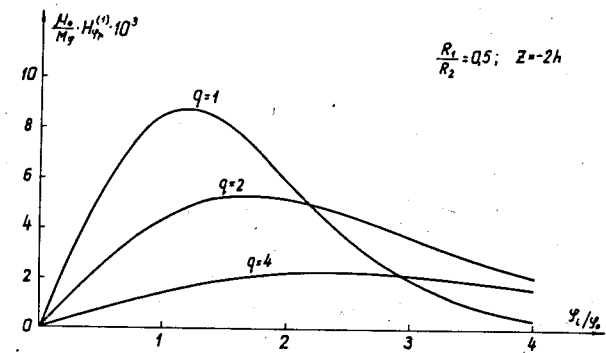
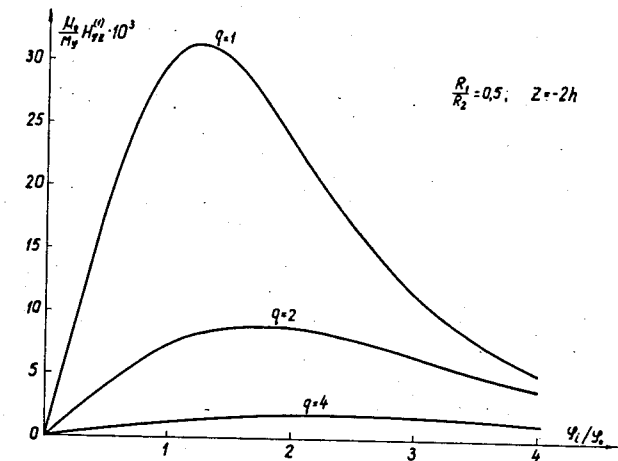


Рис. 6.

Однако необходимо отметить известный результат^{/3/}, согласно которому все компоненты напряженности поля ($H_{\phi z}, H_{\phi r}, H_{\phi\phi}$) от азимутально-намагниченных цилиндров и цилиндрических колец тождественно равны нулю, как вне тела, так и внутри его объема. Физически это означает, что невозможно азимутально намагнитить аксиально-симметричное тело, и что такое "магнитное состояние" эквивалентно рассмотрению аксиально-намагниченного двумерного тела бесконечной высоты, для которого все составляющие напряженности поля во всем пространстве также тождественно равны нулю.

В нашем случае рассмотрим "тонкие по азимуту" цилиндрические кольцевые секторы, т.е. шиммы, у которых $2\phi_0 = \phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi \ll \phi_1$, причём точка наблюдения находится в области $-h < z < h, R_1 < r < R_2$, на расстоянии $(\phi_1 - \phi)$ или d от боковой поверхности тела (см. рис. 7).

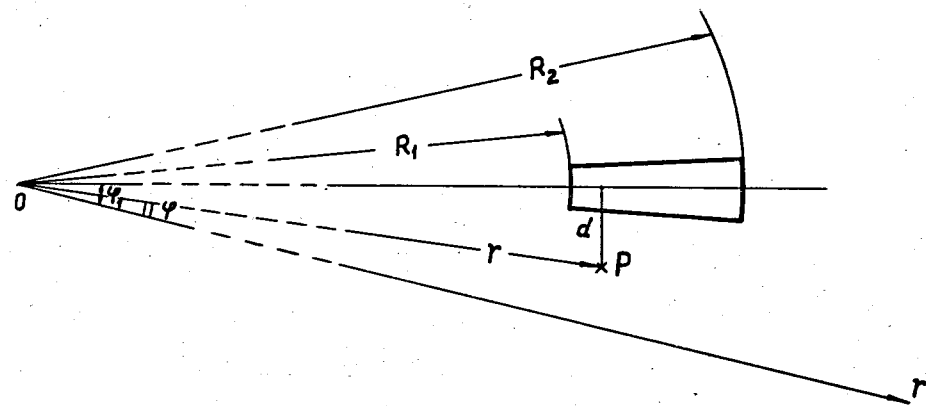


Рис. 7

Тогда, разлагая в ряд (2.6), (2.7) и (2.8) и ограничиваясь первыми членами, получим:

$$H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M \Delta \phi}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{r \sin(\phi_1 - \phi) [\gamma^2 + r^2 - r' r \cos(\phi_1 - \phi)] \gamma_2}{[\gamma^2 + r^2 \sin^2(\phi_1 - \phi)] A^{1/2}} \right\} \Big|_{\gamma_1}^{R_2} \quad (3.1)$$

$$H_{\phi r}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M \Delta \phi}{4\pi\mu_0} \left\{ \sin(\phi_1 - \phi) \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \cos(\phi_1 - \phi) \operatorname{arctg} \frac{\gamma [r' - r \cos(\phi_1 - \phi)]}{r \sin(\phi_1 - \phi) A^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \gamma r \frac{\sin(\phi_1 - \phi) \cos(\phi_1 - \phi) [r' - r \cos(\phi_1 - \phi)]}{[\gamma^2 + r^2 \sin^2(\phi_1 - \phi)] A^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \gamma r \frac{\sin(\phi_1 - \phi) [r - 2r' \cos(\phi_1 - \phi)]}{BA^{1/2}} \right\} \Big|_{\gamma=y_1}^{\gamma=y_2} + (\gamma_1 \rightarrow \gamma_2) \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$H_{\phi\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M \Delta \phi}{4\pi\mu_0} \left\{ \cos(\phi_1 - \phi) \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \sin(\phi_1 - \phi) \operatorname{arctg} \frac{\gamma [r' - r \cos(\phi_1 - \phi)]}{r \sin(\phi_1 - \phi) A^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \gamma r \frac{r' + r \cos(\phi_1 - \phi) - 2r' \cos^2(\phi_1 - \phi)}{BA^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \gamma r \frac{\cos^2(\phi_1 - \phi) [r' - r \cos(\phi_1 - \phi)]}{[\gamma^2 + r^2 \sin^2(\phi_1 - \phi)] A^{1/2}} \right\} \Big|_{\gamma=y_1}^{\gamma=y_2} + (\gamma_1 \rightarrow \gamma_2) \Big|_{R_1}^{R_2} \quad (3.3)$$

где A определяется (1.9) при замене α на $(\phi_1 - \phi)$, а $\gamma_1 = z + h$, $\gamma_2 = h - z$ и $B = r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi_1 - \phi)$.

Необходимо иметь в виду, что при $r \rightarrow \infty$, $R_1 \rightarrow \infty$ и $R_2 \rightarrow \infty$, $(\phi_1 - \phi) \rightarrow 0$, а $R_1 - r \cos(\phi_1 - \phi)$, $R_2 - r \cos(\phi_1 - \phi)$, $r \sin(\phi_1 - \phi) = d$ и $r \Delta \phi = \Delta L$ остаются конечными величинами.

4. Производные компонент магнитного поля по пространственным координатам

В этом разделе приведены выражения производных от компонент магнитного поля по пространственным координатам, полученным путем непосредственного дифференцирования выражений (2.6), (2.7) и (2.8) по "z", "r" и "φ". В области $z < -h$ и $-\phi_0 < \phi < \phi_0$ имеем для аксиальной составляющей поля

$$\frac{\partial H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial z} = \frac{\partial H_{\phi z}^{(1)}}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -\frac{M \phi}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{(\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha) A^{1/2}} \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Big|_{R_1}^{R_2} \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} = \frac{M \phi}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\gamma^2 \cos \alpha + r' r \sin^2 \alpha}{(\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha) A^{1/2}} \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Big|_{R_1}^{R_2} \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial H_{\phi z}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial \phi} = \frac{\partial H_{\phi z}^{(1)}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = \frac{M \phi}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[\frac{r \sin \alpha (\gamma^2 + r^2 - r' r \cos \alpha)}{(\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha) A^{1/2}} \right] \right\} \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} +$$

$$+ (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Big|_{R_1}^{R_2}$$

для радиальной составляющей

$$\frac{\partial H_{\phi r}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial z} = \frac{\partial H_{\phi r}^{(1)}}{\partial r} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial H_{\phi r}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} = \frac{M_{\phi}}{4\pi\mu_0} \left\{ \gamma \frac{r' + r \cos \alpha - 2r' \cos^2 \alpha}{BA^{1/2}} + \frac{\gamma \sin^2 \alpha (r' - r \cos \alpha)}{(\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha) A^{1/2}} \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 & R_2 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & R_1 & \alpha_1 \end{matrix} \right| \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial H_{\phi r}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial \phi} = \frac{\partial H_{\phi r}^{(1)}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = -\frac{M_{\phi}}{4\pi\mu_0} \left\{ \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \cos \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \gamma r \frac{\sin \alpha \cos \alpha (r' - r \cos \alpha)}{(\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha) A^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \gamma r \frac{\sin \alpha (r - 2r' \cos \alpha)}{BA^{1/2}} \right]_0^{a_1} + (a_1 \rightarrow a_2) \left\{ \left| \begin{matrix} \gamma_2 & R_2 \\ \gamma_1 & R_1 \end{matrix} \right| \right.$$

$$\left. \right\} \quad (4.6)$$

для азимутальной составляющей

$$\frac{\partial H_{\phi \phi}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial z} = \frac{\partial H_{\phi \phi}^{(1)}}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{M_{\phi}}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[\frac{\sin \alpha (\gamma^2 + r^2 - r' \cos \alpha)}{(\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha) A^{1/2}} \right]_0^{a_1} + (a_1 \rightarrow a_2) \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 & R_2 \\ \gamma_1 & R_1 \end{matrix} \right| \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial H_{\phi \phi}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} = -\frac{M_{\phi}}{4\pi\mu_0} \left\{ \left(\frac{\gamma \sin \alpha}{A^{1/2}} \left[\frac{\cos \alpha (r' - r \cos \alpha)}{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2r' \cos \alpha - r}{B} \right] \right)_0^{a_1} + \right.$$

$$\left. + (a_1 \rightarrow a_2) \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 & R_2 \\ \gamma_1 & R_1 \end{matrix} \right| \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial H_{\phi \phi}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial \phi} = \frac{\partial H_{\phi \phi}^{(1)}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = \frac{M_{\phi}}{4\pi\mu_0} \left\{ \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} + \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \gamma r \frac{r' + r \cos \alpha - 2r' \cos^2 \alpha}{BA^{1/2}} + \gamma r \frac{\cos^2 \alpha (r' - r \cos \alpha)}{(\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha) A^{1/2}} \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 & R_2 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & R_1 & \alpha_1 \end{matrix} \right| \quad (4.9)$$

Отметим, что при $\phi = 0$, $\frac{\partial H_{\phi \phi}^{(1)}}{\partial \phi} = 0$ (см. рис. 5,6).

5. Магнитное поле токовых конфигураций, эквивалентных цилиндрическим конфигурациям, намагниченным по азимутальному направлению.

Формулы для составляющих поля от токовых конфигураций, эквивалентных по распределению магнитного поля равномерно намагниченным в азимутальном направлении цилиндрическим конфигурациям, можно получить, если магнитный момент единичной поверхности ($M_{\phi s}$) или единичного объема (M_{ϕ}) связаны с током I следующими соотношениями:

1). Для "тонкой" по азимуту шиммы и ей соответствующей токовой конфигурации, показанной на рис. 8,

$$M_{\phi s} = \mu_0 I \quad (5.2)$$

$$M_{\phi} = \mu_0 i, \quad (5.2)$$

где μ_0 - магнитная проницаемость вакуума; I - ток, протекающий по

соответствующему витку; $i = \frac{I}{\Delta L}$ - линейная плотность тока. Здесь $\Delta L = R_m \cdot \Delta \phi$, где $R_m = \frac{R_2 + R_1}{2}$ - средний радиус.

Для точки P (см. рис. 8), учитывая, что $R_2 = -r \cos(\phi_1 - \phi) = \eta_2 = b - y$, $R_1 = r \cos(\phi_1 - \phi) = \eta_1 = b + y$, $r \sin(\phi_1 - \phi) = d$, $\gamma_2 = h - x$, $\gamma_1 = x + h$ и $\Delta L \cdot M_{\phi} = M_{\phi s}$, из соотношения (3.3) и (5.1) имеем

$$H_z \text{ виток} = -\frac{I}{4\pi} \left\{ \frac{\gamma \eta (\gamma^2 + \eta^2 + 2d^2)}{[\gamma^2 \eta^2 + d^2 (\gamma^2 + \eta^2 + d^2)] \sqrt{\gamma^2 + \eta^2 + d^2}} \right\} \left| \begin{matrix} \eta_2 & \gamma_2 \\ \eta_1 & \gamma_1 \end{matrix} \right| \quad (5.3)$$

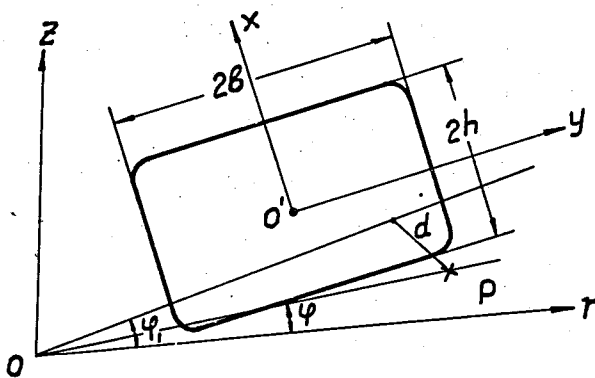
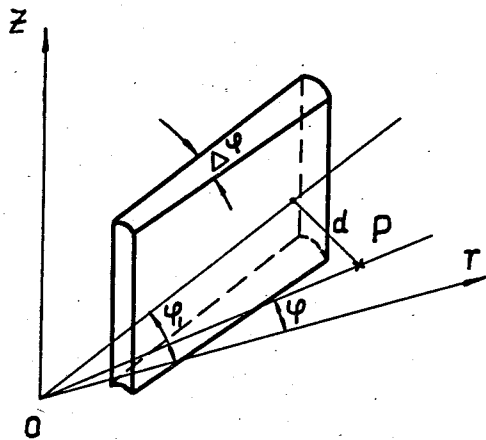


Рис. 8.

Это выражение совпадает с формулой, полученной на основе закона Био-Савара и приведенной в работе /4/.

Если точка P находится в центре плоскости прямоугольного витка с током, получим

$$H_{z \text{ виток}} = H \phi \phi_{\text{виток}} = \frac{I}{4\pi} \frac{\sqrt{b^2 + h^2}}{bh} \quad (5.4)$$

2). Для азимутально-намагниченного цилиндрического кольцевого сектора и эквивалентной ему конфигурации, показанной на рис. 9,

$$M_{\phi} \approx \mu_0 \frac{NI}{2\phi_0 R_m}, \quad (5.5)$$

где N – число витков; $2\phi_0$ – угловая протяженность.

Отметим, что эквивалентность между азимутально-намагниченным сектором и токовой катушкой является справедливой только при больших значениях R_1 и R_2 , т.е. когда $\Delta R = R_2 - R_1 \ll R_m$ где средний радиус $R_m = \frac{R_2 + R_1}{2}$.

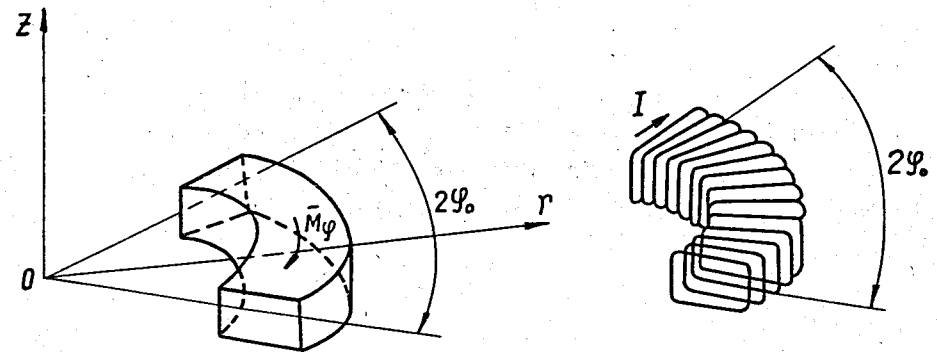


Рис. 9

Так как индукция поля B_0 и напряженность магнитного поля

$H_e = \frac{B_e}{\mu_0}$ от равномерно намагниченного тела вне его объема равны полю B_{ek} и H_{ek} от соответствующей токовой катушки, то, на основе (2.6), (2.7), (2.8) и (5.5) для компонент поля в области $z < -h$ и $-\phi_0 < \phi < \phi_0$, имеем

$$H_{\phi z ek}(r, \phi, z) = -\frac{NI}{8\pi\phi_0 R_m} \left\{ \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \begin{matrix} a_2 \\ a_1 \end{matrix} \quad (5.6)$$

$$H_{\phi r ek}(r, \phi, z) = \frac{NI}{8\pi\phi_0 R_m} \left\{ \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} + \right. \quad (5.7)$$

$$\left. + \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \begin{matrix} a_2 \\ a_1 \end{matrix}$$

$$H_{\phi \phi ek}(r, \phi, z) = -\frac{NI}{8\pi\mu_0 R_m} \left\{ \left[\sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \right. \quad (5.8)$$

$$\left. - \cos \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \right] + (a_1 \rightarrow a_2) \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix},$$

где $\gamma_1 = -h - z$; $\gamma_2 = h - z$; $a_1 = \phi_0 + \phi$, $a_2 = \phi_0 - \phi$.

Внутри намагниченного тела индукция поля B_i равна индукции поля B_{ik} внутри соответствующей токовой катушки, а напряженности магнитного поля отличны друг от друга, так как внутри намагниченного тела необходимо учесть действие вектора намагниченности \bar{M} , т.е.

$$\bar{H}_{ik} \approx \bar{H}_i + \frac{\bar{M}}{\mu_0} \quad (5.9)$$

При этом следует иметь в виду, что $M_\phi = M$ и $M_z = M_r = 0$. Поэтому выражения компонент магнитного поля внутри катушки с током I в области $-h < z < h$ и $-\phi_0 < \phi < \phi_0$ имеют вид

$$H_{\phi z ik}(r, \phi, z) = -\frac{NI}{8\pi\phi_0 R_m} \left\{ \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \begin{matrix} a_2 \\ a_1 \end{matrix} \quad (5.10)$$

$$H_{\phi r ik}(r, \phi, z) = \frac{NI}{8\pi\phi_0 R_m} \left\{ \left[\cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} + \right. \quad (5.11)$$

$$\left. + \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \right]_{\gamma=\gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2)} \right\} \left| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_2 \\ a_1 \end{matrix}$$

$$H_{\phi \phi ik}(r, \phi, z) = -\frac{NI}{8\pi\phi_0 R_m} \left\{ \left[\sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \right. \quad (5.12)$$

$$\left. - \cos \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \right]_0^{a_1} + [a_1 \rightarrow a_2] \right\}_{\gamma=\gamma_1 +}$$

$$+ (\gamma_1 + \gamma_2) \left| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \right| + \frac{NI}{2\phi_0 R_m},$$

где $\gamma_1 = z + h$, $\gamma_2 = h - z$.

Из (5.10)–(5.12) легко получить, положив в них $a_1 = a_2 = \pi$, известные выражения компонент поля внутри цилиндрического тороидального соленоида, сечение которого является прямоугольным

$$H_{z TC} \equiv 0 \quad (5.13)$$

$$H_{r TC} \equiv 0 \quad (5.14)$$

$$H_{\phi TC} = \frac{NI}{2\pi R_m} \quad (5.15)$$

Л и т е р а т у р а

1. В.И.Данилов, М.Ианович. Препринт ОИЯИ, Р9-3542, Дубна, 1967.
Rev. Roum de Phys., 13, 427 (1968).
2. В.И.Данилов, М.Ианович. Препринт ОИЯИ, Р9-3875, Дубна (1968).
3. E.M. Pugh, E.W. Pugh, Principles of electricity and magnetism,
Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1960.
4. В.А.Бирюков, В.И.Данилов, ЖТФ, 31, 428 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 февраля 1969 года.