Ат. энергия, 1969, т.27, в.1, с.53

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 4044

В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович

О СТОХАСТИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ ЧАСТИЦ ПЛАЗМЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1968

Р9 - 4044

В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович

О СТОХАСТИЧЕСКОМ НАГРЕВЕ ЧАСТИЦ ПЛАЗМЫ

Направлено в АЭ

§1. Введение

Высказывались предположения [1,2] о том, что частицы плазмы, находящиеся во внешнем стохастическом электромагнитном поле, могут нагреваться быстрее, нежели из-за парных соударений (т.е. из-за джоулева нагрева). Физическим аргументом в пользу этого предположения является аналогия между корреляциями стохастического поля и парными соударениями. В [1] эта аналогия была использована для построения феноменологической теории стохастического нагрева, в которой эффективной частотой соударений служило вводимое феноменологически обратное время исчезновения корреляций стохастического поля. В [2] были высказаны предположения о том, что стохастическое поле (при $H = 0$) вообще не должно приводить к нагреву частиц плазмы. Эти аргументы, по нашему мнению, можно сформулировать так, что любое внешнее поле, сколь бы сложным ни было его изменение во времени, можно представить в виде разложения в ряд Фурье, каждая из компонент которого должна затухать лишь из-за парных соударений.

Таким образом, несмотря на важность развития теоретических представлений о стохастическом нагреве частиц плазмы, ввиду целого ряда экспериментальных работ, в которых такой нагрев пытаются осуществить [3,4,5], до сих пор отсутствует последовательная теоретическая трактовка проблемы.

Цель настоящей работы – построение теории стохастического нагрева, учитывающей корреляции стохастического электромагнитного поля. Следует сразу заметить, что стохастический нагрев может быть описан лишь при последовательном учете нелинейных эффектов. Поэтому аргументы /2/, основанные на линейной теории, оказываются не имеющими отношения к рассматриваемой проблеме, а феноменологическая теория /1/, основанная на модификации квазилинейного приближения оказывается неполной, т.к. учитывает не все эффекты одного и того же порядка по энергии стохастического поля. Из простых соображений можно понять, что стохастический нагрев должен квадратично зависеть от плотности энергии стохастического электромагнитного поля W x). Действительно, запишем известное выражение для диссипации энергии поля из-за парных соударений:

$$\frac{dW}{dt} = -2\,\frac{\omega_{oe}^{2}}{\omega^{2}}\,\nu_{\text{эфф.}}\,W\,. \tag{1.1}$$

Если корреляционные эффекты аналогичны парным соударениям, то вместо $\nu_{\text{эфф}}$ можно бы было подставить эффективную частоту, характеризующую корреляцию стохастического поля. Наличие плазмы играет в проблеме стохастического ускорения, как показано ниже, самую существенную роль. Но в плазме корреляции любых турбулентных пульсаций, в частности и рассматриваемого стохастического поля, пропорциональны W

$$\nu_{\text{эфф}} \simeq W\,. \tag{2.2}$$

Отсюда легко убедиться в справедливости утверждения о нелинейном характере процесса стохастического нагрева. Наконец, ниже показывается, что если концентрация плазмы стремится к нулю, то $\nu_{\text{эфф}} \to 0$, т.е.

---

x) $W = \left\langle \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{t} \vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,dt + \frac{H^2}{8\pi} \right\rangle$

E – напряженность электрического поля, в W учтено, что в плазме $\epsilon \neq 1$.

для проявления стохастичности при нагреве частиц плазмы необходимо $n_0 \neq 0$ и возникающий эффект обязан нелинейному взаимодействию.

§2. Стохастический нагрев бесстолкновительной замагниченной плазмы

Чтобы наиболее просто выявить физический смысл эффектов нелинейности стохастического нагрева, рассмотрим случай сильно замагниченной плазмы (в пределе $H \to \infty$) когда ларморовские кружки могут двигаться лишь вдоль магнитных силовых линий.

Представим функцию распределения частиц плазмы в виде суммы регулярной и стохастической частей: $f^{(\alpha)} = \Phi^{(\alpha)} + \phi^{(\alpha)}$, $\langle\phi^{(\alpha)}\rangle = 0, \alpha = e,i;$ электромагнитное поле будем считать чисто стохастическим: $\frac{e}{m_e} E_z = \mathcal{E};$ $\langle\mathcal{E}\rangle = 0$. Получим следующую систему уравнений для функций Φ, ϕ, E:

$$\frac{\partial\Phi^{(\alpha)}}{\partial t} + v_z \frac{\partial\Phi^{(\alpha)}}{\partial z} = -\frac{m_e}{m_\alpha} \langle \mathcal{E} \frac{\partial\phi^{(\alpha)}}{\partial v_z} \rangle \equiv I, \tag{2.1}$$

$$-i(\omega - k_z v_z)\phi_k^{(\alpha)} = -\frac{m_e}{m_\alpha} \int \left(\mathcal{E}_{k_1} \frac{\partial\Phi_{k_2}^{(\alpha)}}{\partial v_z} + \mathcal{E}_{k_1} \frac{\partial\phi_{k_2}^{(\alpha)}}{\partial v_z} - \right.$$

$$\left. - \langle \mathcal{E}_{k_1} \frac{\partial\phi_{k_2}^{(\alpha)}}{\partial v_z} \rangle \right) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1\, dk_2, \quad k = \{\vec{k}, \omega\}. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) написано для компонент Фурье искомых функций. Правая часть (2.1) описывает "соударения" стохастического поля и частиц плазмы, приводящие к нагреву последних. Получим выражение для правой части (2.1) с точностью до членов, квадратичных по энергии стохастического поля.

Простоты ради будем считать, что нагрев скомпенсирован, например, потерями на излучение, поэтому функция распределения $\Phi^{(a)}$ стационарна, $\Phi_k^{(a)} = \Phi_0^{(a)}\,\delta(k)$.

Раскладывая случайную часть функции распределения по напряженности стохастического поля $\phi_k^{(a)} = \sum_i \phi_k^{i(a)}$, получим

$$i(\omega - k_z v_z)\phi_k^{(1)} = \mathcal{E}_k \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_z}, \tag{2.3}$$

$$i(\omega - k_z v_z)\phi_k^{(2)} = \int \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{\mathcal{E}_{k_1}\mathcal{E}_{k_2} - \langle \mathcal{E}_{k_1}\mathcal{E}_{k_2} \rangle}{i(\omega_2 - k_{2z} v_z)} \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_z} \cdot \tag{2.4}$$

$$\cdot\, \delta(k - k_1 - k_2)\,dk_1 dk_2 \,,$$

$$i(\omega - k_z v_z)\phi_k^{(3)} = \int \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{1}{i(\omega_2 + \omega_3 - (k_{2z} + k_{3z})v_z)} \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{1}{i(\omega_2 - k_{2z} v_z)} \tag{2.5}$$

$$\cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_z}\left(\mathcal{E}_{k_1}\mathcal{E}_{k_2}\mathcal{E}_{k_3} - \mathcal{E}_{k_1}\langle \mathcal{E}_{k_2}\mathcal{E}_{k_3}\rangle - \langle \mathcal{E}_{k_1}\mathcal{E}_{k_2}\mathcal{E}_{k_3}\rangle\right)\delta(k - k_1 - k_2 - k_3)\,dk_1 dk_2\, dk_3 \,.$$

Если теперь функцию $\phi_k^{(1)}$, определяемую формулой (2.3), подставить в (2.1), мы получим уравнение, аналогичное квазилинейному и представляющее собой уравнение диффузии в пространстве скоростей. При этом коэффициент диффузии записывается в виде

$$D^{(1)} = \int \frac{\langle \mathcal{E}_{k_1}\mathcal{E}_{k_2}\rangle}{i(\omega_2 - k_{2z} v_z)}\, dk_1\, dk_2 \,. \tag{2.6}$$

Положим $\langle \mathcal{E}_{k_1}\mathcal{E}_{k_2}\rangle = V_{k_1}\delta(k_1 + k_2)$, тогда x)

$$D^{(1)} = \int \frac{V'_{k_1}}{i(\omega_1 - k_{1z} v_z)}\, dk_1 \,. \tag{2.7}$$

---

x) Для линейных полей $V_k = V_{\vec{k}}\,\delta(\omega - \omega(\vec{k}))$. Если это соотношение подставить в интеграл соударений (правая часть (2.1), линейный по V_k (т.е. в (2.7)), то получим известный квазилинейный интеграл соударений. Следует иметь в виду, что $V_{\vec{k}} = \frac{e^2}{m_e^2}|E_{\vec{k}}|^2$.

Индекс (1) соответствует тому, что в интеграле соударений учтена лишь $\phi^{(1)}$. Соответственно вычисляются $D^{(2)}$ и $D^{(3)}$. Явные выражения для них мы не будем приводить, записав лишь окончательный результат, учитывающий все эффекты второго порядка по V_k (см. (2.14), (2.15)).

Как известно, эффективность нагрева плазмы в.ч. колебаниями, связанного с квазилинейной диффузией, ничтожно мала, так как экспоненциально малое число частиц находится в резонансе с волнами. Поэтому (например, в /1/) предполагалось, что частота имеет некоторую мнимую поправку, связанную с корреляцией стохастического поля $\omega_1 = \omega(\vec{k}_1) + i\nu_{эф.}$ Разлагая далее (2.7) с точностью до первого порядка по ($\nu_{эф.}/\omega(\vec{k}_1)$), можно получить коэффициент диффузии, не связанный с резонансными частицами и определяющий нагрев всей массы частиц плазмы:

$$D \simeq \int \frac{V_k}{\omega^2(\vec{k})} \nu_{эф.} dk . \tag{2.8}$$

Отметим сразу, что такой подход носит чисто феноменологический характер, а величина $\nu_{эф}$ в теории остается не выясненной. Более того, ниже мы покажем, что использование в качестве $\nu_{эф}$ корреляционной поправки к частоте, связанной с нелинейными взаимодействиями (например, распады и рассеяние), является незаконным.

Подставляя $\phi_k^{(2)}$ и $\phi_k^{(3)}$ в уравнение (2.1), получим коэффициент диффузии, связанный с нелинейными взаимодействиями и пропорциональный второй степени V_k.

Поскольку нелинейные взаимодействия искажают спектр колебаний и формула $V_k = V_k\,\delta(\omega - \omega(\vec{k}))$ не является более справедливой, необходимо найти уравнение для корреляционной функции. В интересующем нас случае оно имеет вид

$$V_k = \frac{V_k}{\Pi(k)} \int V_{k_1} \Sigma(k,k_1) dk_1 + \frac{1}{2} \int \frac{|S(k,k_1,k_2)|^2}{\Pi(k)\Pi(-k_1-k_2)} V_{k_1} V_{k_2} \delta(k-k_1-k_2) dk_1 dk_2 . \tag{2.9}$$

Здесь

$$\Sigma(k,k_1) = \Sigma(k,k_1,k,-k_1) - \frac{S(k,k_1,k-k_1)S(k-k_1,k,-k_1)}{\Pi(k-k_1)}, \tag{2.10}$$

$$S(k,k_1,k_2) = \frac{\omega_{oe}^2}{n_0} \int \frac{dv_z \, \partial\Phi_0/\partial v_z}{(\omega - k_z v_z)(\omega_1 - k_{1z} v_z)(\omega_2 - k_{2z} v_z)}, \tag{2.11}$$

$$\Sigma(k,k_1,k_2,k_3) = \frac{\omega_{oe}^2}{n_0} \int \frac{dv_z}{(\omega - k_z v_z)^2} \left\{ \frac{2k_z}{\omega - k_z v_z} + \frac{k_{2z}+k_{3z}}{\omega_2+\omega_3-(k_{2z}+k_{3z})v_z} \right\} \cdot \tag{2.12}$$

$$\cdot \frac{\partial\Phi_0/\partial v_z}{(\omega_2 - k_{2z} v_z)(\omega_3 - k_{3z} v_z)},$$

$$\Pi(k) = \epsilon(k) + \frac{k_\perp^2}{k_z^2 - \omega^2}, \quad \epsilon(k) = 1 + \frac{\omega_{oe}^2}{n_0 k_z} \int \frac{\partial\Phi_0/\partial v_z}{\omega - k_z v_z} dv_z \tag{2.13}$$

(скорость света $c = 1$) .

Величину V_k с помощью соотношения (2.8) можно выразить через V_k^2 и подставить в коэффициент диффузии $D^{(1)}$. Объединяя далее $D^{(2)}$, $D^{(3)}$ и член в $D^{(1)}$, пропорциональный $|S|^2$, получим

$$D' = \frac{\pi}{2} \int (k_{1z} + k_{2z})^2 V_{k_1} V_{k_2} |M|^2 \delta(\omega_1 + \omega_2 - (k_{1z}+k_{2z})v_z) dk_1 dk_2 , \tag{2.14}$$

---

x) В силу стационарности стохастического поля $\mathrm{Im}\,\Pi(k) = \int V_{k_1} \mathrm{Im}\,\Sigma(k,k_1) dk_1$. Но для в.ч. поля $\mathrm{Im}\,\Pi(k) \approx \nu_e (\frac{\omega_{oe}}{\omega})^2$ (ν_e –частота парных соударений частиц), здесь же нас интересует бессоударительный нагрев, поэтому полагаем $\mathrm{Im}\,\Sigma = 0$.

$$M(k_1,k_2)=\frac{1}{(\omega_1-k_{1z}v_z)^2}+\frac{S(k_1+k_2,k_1,k_2)}{(k_{1z}+k_{2z})\Pi(k_1+k_2)}\,. \tag{2.15}$$

Кроме того, подстановка первого члена (2.9) в (2.7) дает

$$D''=\pi\int V_{k_1}V_{k_2}\,\mathrm{Re}\,\Sigma(k_1,k_2)\frac{\delta(\Pi(k_1))}{\omega(\vec{k}_2)}dk_1\,dk_2\,. \tag{2.16}$$

Коэффициент диффузии D' соответствует индуцированному рассеянию стохастического в.ч. поля на частицах плазмы, т.к. он пропорционален вероятности такого рассеяния $|M|^2$ (см. /3/). В связи с этим его величина существенно уменьшается из-за эффектов компенсации, возникающих при таком рассеянии. Второй член качественно соответствует коэффициенту диффузии, который получается из квазилинейного, если за частоту корреляции принять некую $\nu_{эф}$. Величина $\nu_{эф}$. существенно зависит от ряда деталей в распределении $V_{\vec{k}\omega}$ по ω, т.е. от вида корреляционной функции, а также от величины нелинейного сдвига частоты (см. §3). Отсюда следует вывод о том, что при использовании формулы (2.8) остается открытым вопрос об интерпретации величины $\nu_{эф}$. По-видимому, эта величина может быть найдена эмпирически из опытов по стохастическому нагреву плазмы[x)]. С нашей точки зрения, предлагаемый здесь подход позволяет наглядно интерпретировать получающиеся результаты. При этом первый член соответствует нагреву частиц плазмы в результате рассеяния на них в.ч. колебаний, второй описывает нагрев частиц, связанный, грубо говоря, с конечным

[x)] Однако, поскольку $\nu_{эф}$ существенно зависит от параметров плазмы, изменяющихся даже в процессе нагрева, интерпретация наблюдений невозможна без использования полученных ниже формул, связывающих $\nu_{эф}$ с параметрами плазмы и энергией стохастического поля.

временем корреляции стохастического в.ч. поля. Учет же корреляций лишь в квазилинейном приближении незаконен, т.к. при этом выпадает часть членов, описывающих рассеяние, которые фактически также описывают корреляционные эффекты.

§3. Нелинейный сдвиг частоты стохастического поля и эффективность нагрева

При рассмотрении эффектов взаимодействия стохастического поля с плазмой существенную роль играет нелинейное изменение частоты в.ч. поля. Из (2.9) получим, считая отклонение от линейного $\omega(\vec{k})$ малым,

$$\frac{\partial \Pi(k)}{\partial \omega}\Big|_{\omega=\omega(\vec{k})} (\omega-\omega(\vec{k}))V_k = V_k \int V_{k_1} \operatorname{Re} \Sigma(k,k_1)dk_1 . \tag{3.1}$$

Если $\operatorname{Re}\Sigma(k,k_1)$ не зависит от ω, то решение (3.1) может быть представлено как $V_{\vec{k}_1}\delta(\omega-\omega^{H}_{\vec{k}_1})$, где

$$\omega^{H}_{\vec{k}}-\omega(\vec{k}) = \frac{1}{\frac{\partial\Pi(k)}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega(\vec{k})}} \int V_{\vec{k}_1} \operatorname{Re}\Sigma(\omega^{H}_{\vec{k}},\vec{k},\omega^{H}_{\vec{k}_1},\vec{k}_1)d\vec{k}_1 . \tag{3.2}$$

В действительности, около сдвига частоты (3.2) имеется некий разброс, описывающий эффекты корреляции турбулентных пульсаций. Поэтому точное значение для сдвига частоты не очень существенно, если рассматривается распределение около среднего значения. Определим в общем случае $\omega^{H}_{\vec{k}}$ соотношением

$$\omega^{H}_{\vec{k}}-\omega(\vec{k}) = \frac{1}{\frac{\partial\Pi(k)}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega(\vec{k})}} \int V_{k_1} \operatorname{Re}\Sigma(\omega^{H}_{\vec{k}},\vec{k},\omega^{H}_{\vec{k}_1},\vec{k}_1)d\vec{k}_1, d\omega_1 . \tag{3.3}$$

Это выражение отличается от (3.2) тем, что $V_{\vec{k}_1}$ заменено на $\int V_{\vec{k}_1 \omega_1} d\omega_1$. Если $V_{k_1} = V_{\vec{k}_1} \delta(\omega - \omega^H_{\vec{k}_1})$, то (3.3) и (3.2) совпадают. В (3.3), однако, не предполагается δ-образного распределения частот. Введем $\tilde{\tilde{\omega}} = \omega - \omega^H_{\vec{k}}$. Тогда, вычитая из (3.1) соотношение (3.3), получим

$$\frac{\partial \Pi(k)}{\partial \omega}\Big|_{\omega=\omega(\vec{k})} \tilde{\tilde{\omega}} = \int V_{k_1} dk_1 (\mathrm{Re}\, \Sigma(k, k_1) - \mathrm{Re}\, \Sigma(\omega^H_{\vec{k}}, \vec{k}, \omega^H_{\vec{k}_1}, \vec{k}_1)). \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) является искомым уравнением для отыскания корреляций. Существенно, что в нагрев (2.16) входит значение V_{k_1} при $\omega_1 = \omega(\vec{k}_1)$. Наличие нелинейного сдвига в частоте приводит к тому, что в случае δ-образного распредления $V_k = V_{\vec{k}_1} \delta(\omega - \omega^H_{\vec{k}})$ нагрев (2.16) строго обращается в нуль. Наличие разброса по частотам (3.4) приводит к возможности проявления эффектов нагрева, описываемых (2.16). Из самого вида уравнения (3.4) следует, что если $\Sigma(k, k_1)$ не зависит от ω, ω_1, то ширина разброса распределения по частотам равна нулю. Выражение для $\mathrm{Re}\, \Sigma(k, k_1)$ имеет вид

$$\Sigma(k, k_1) = \frac{k^2_{-z}}{\omega^2 \omega_1^2} \frac{(\epsilon^e(k_-) - 1)\epsilon^i(k_-)}{\epsilon^e(k_-) + \epsilon^i(k_-) - 1}, \quad k_- = k_1 - k_2, \tag{3.5}$$

где $\epsilon^{(e)}(k_-)$ и $\epsilon^i(k_-)$ – линейные диэлектрические проницаемости электронов и ионов соответственно. Для оценки ширины разброса по частотам запишем $\epsilon^e(k_-)$ и $\epsilon^i(k_-)$ следующим образом:

$$\epsilon^{(a)}(k_-) = 1 + \frac{\omega^2_{0a}}{k^2_- v^2_{Ta} - \omega^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2_{oe}\, \omega_-}{(k_- v_{Ta})^3} e^{-\frac{\omega^2_-}{2 k^2_- v^2_{Ta}}} \quad (a = e, i). \tag{3.6}$$

Приближенный характер такой записи, как будет видно из дальнейших рассуждений, не играет существенной роли. Действительная часть выражения (3.5) есть рациональная функция своих аргументов

$$F\left(\frac{1}{1-\Omega_-^2};\ \frac{1}{1-a^2\Omega_-^2}\right), \qquad (3.7)$$

где

$$\Omega_-^2 = \frac{\omega_-^2}{k_-^2 v_{Te}^2}, \qquad a^2 = \frac{T_e m_i}{T_i m_e}.$$

Для оценки величины нелинейного взаимодействия в зависимости от уровня энергии стохастического в.ч. поля можно использовать формулу (3.2). Если величина

$$\overline{\Delta\omega} = \omega^{H}_{\vec{k}} - \omega(\vec{k}) \lesssim k v_{Te},$$

то формула (3.4) с учетом структуры функции (3.7) дает оценку для разброса по частотам $\tilde{\tilde{\Omega}}_- \approx k v_{Te}$ или $\delta(\vec{k}) = \left(\int(\omega-\omega^{H}_{\vec{k}})V_{\omega}\times d\omega\right)^{1/2} \approx k v_{Te}$. В том случае, когда стохастическое поле достаточно интенсивно, так что $\overline{\Delta\omega} \gg k v_{Te}$, ширина разброса по частотам определяется как шириной спектра в.ч. поля в пространстве волновых векторов Δk_0, так и интенсивностью в.ч. поля. При этом справедлива оценка $\delta \approx \Delta k \ll k$. Последнее утверждение следует из того, что при $\Delta k \gg k v_{Te}$ функция (3.7) принимает вид

$$-\frac{1}{(\tilde{\tilde{\omega}} - \tilde{\tilde{\omega}}' + \Delta k)^2} + \frac{1}{(\Delta k)^2}. \qquad (3.8)$$

Отсюда при $\tilde{\tilde{\omega}} - \tilde{\tilde{\omega}}' \ll \Delta k$ следует, что (3.4) не имеет решения за исключением δ -функции, поэтому $\delta(\vec{k}) = 0$. В пределе $\tilde{\tilde{\omega}} - \tilde{\tilde{\omega}}' \gg \Delta k$ выражение (3.8) с требуемой точностью есть константа и, следовательно, $\delta(\vec{k}) = 0$. Поэтому остается лишь $\tilde{\tilde{\omega}} - \tilde{\tilde{\omega}}' \approx \Delta k$, что и определяет ширину разброса по частотам.

Имея в виду вышеизложенное, можно оценить эффективность нагрева электронов плазмы стохастическим в.ч. полем. Рассмотрим вначале интенсивность процесса нагрева, определяемого выражением (2.16). Если интенсивность в.ч. поля достаточно мала, так что $\overline{\Delta\omega} \ll k\, v_{Ti}$, то функция $V(\omega)$ представляет собою δ-функцию и нагрев (2.16) отсутствует. При $\overline{\Delta\omega} \lesssim k\, v_{Ti}$ ширина разброса $V(\omega)$ по частотам становится порядка $k\, v_{Ti}$ и для оценки эффективности нагрева (2.16) справедлива порядковая формула:

$$n_0 \frac{d\,T_e}{d\,t} = \omega_{oe} \frac{k_0}{\Delta\, k_0} \left(\frac{\omega_{oe}}{\omega} \right)^8 \left(\frac{\omega_{oe}}{k\, v_{Te}} \right)^2 \frac{W}{n_0\, m_e\, c^2}\, W. \tag{3.9}$$

При дальнейшем увеличении интенсивности стохастического в.ч. поля увеличивается как средний нелинейный сдвиг частоты, так и ширина разброса функции $V(\omega)$ по частотам δ. Для точного определения величины $\delta(\vec{k})$ необходимо решать интегральное уравнение (3.4). Однако проведенные выше рассуждения позволяют оценить интенсивность нагрева (2.16), имея в виду, что величина δ заключена в пределах $k_0\, v_{Te} < \delta < \Delta\, k \ll k_0$. Поэтому оценка интенсивности нагрева (2.16)

$$n_0 \frac{d\,T_e}{d\,t} = \frac{\omega_{oe}^2}{\omega^2}\, \nu_{эф}\, W, \tag{3.10}$$

$$\nu_{эф} \lesssim \omega_{oe} \frac{\omega_{oe}}{\omega} \frac{k_0}{\Delta\, k_0} \left(\frac{\omega_{oe}}{k_0\, v_{Te}} \right)^2 \frac{W}{n_0\, m_e\, c^2}, \tag{3.11}$$

если спектр в.ч. поля сосредоточен в области $k_0 > \frac{\omega_{oe}}{v_{Te}}$, и

$$\nu_{эф} \lesssim \omega_{oe} \frac{\omega_{oe}}{\omega} \frac{k_0}{\Delta k_0} \frac{W}{n_0 m_e c^2} \left(\frac{\omega_{oe}}{k_0 v_{Te}}\right)^2 \frac{v_{Ti}}{v_{Te}} \tag{3.12}$$

$$\text{при} \quad k_0 < \frac{\omega_{oe}}{v_{Te}} .$$

Перейдем к исследованию интенсивности нагрева, определяемого формулой (2.14). Перепишем ее в виде

$$D' = \int d\,\delta\,(\omega_- - k_{-z} v_z)\, dk_1\, dk_2 \quad . \tag{3.13}$$

Умножая уравнение диффузии с коэффициентом (3.11) на $\frac{m_e v^2}{2}$ и интегрируя по $d\vec{v}$, получим

$$n_0 \frac{dT_e}{dt} = m_e n_0 \int \left(\frac{\omega_-}{k_{-z} v_{Te}}\right)^2 d \, \frac{1}{(2\pi)^{1/2} k_{-z} v_{Te}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_-}{k_{-z} v_{Te}}\right)^2} dk_1 dk_2 . \tag{3.14}$$

Как уже говорилось ранее, ширина разброса по частотам функций V_{k_1} и V_{k_2} не может превосходить Δk (при $\Delta k > k_z v_{Te}$), поэтому величина $\frac{\omega_-}{k_{-z} v_{Te}}$ может быть оценена при достаточной интенсивности в.ч. поля как $\frac{\Delta k}{k v_{Te}}$ и, следовательно, величина (4.2) экспоненциально мала, если $\frac{\Delta k}{k v_{Te}} \gg 1$.

Наибольшую интенсивность нагрев (2.14) имеет в случае, когда спектр в.ч. поля сосредоточен в области $k_0 > \frac{\omega_{oe}}{v_{Te}}$ или $\omega > \omega_{oe} \frac{c}{v_{Te}}$, при этом оценка его эффективности есть

$$n_0 \frac{dT_e}{dt} = \frac{\omega_{oe}^2}{\omega^2} \nu_{эф} W , \tag{3.13}$$

где

$$\nu_{эф} \approx \omega_{oe} \frac{\omega_{oe}}{\omega} \frac{k_0}{\Delta k_0} \frac{W}{n_0 m_e c^2} . \tag{3.14}$$

Приведем также оценки для $\nu_{эф}$ в тех случаях, когда спектр стохастического поля сосредоточен в областях

1) $\dfrac{\omega_{oi}}{v_{Te}} \ll k_0 \ll \dfrac{\omega_{oe}}{v_{Te}}$,

$$\nu_{эф} = \omega_{oe} \frac{\omega_{oe}}{\omega} \frac{k_0}{\Delta k_0} \left(\frac{k_0 v_{Te}}{\omega} \right)^4 \frac{W}{n_0 m_e c^2} ; \tag{3.15}$$

2) $k_0 \ll \dfrac{\omega_{oi}}{v_{Te}}$ (при этом $\dfrac{v_{Te}}{c} \ll \dfrac{m_e}{m_i}$),

$$\nu_{эф} = \omega_{oe} \frac{\omega_{oe}}{\omega} \frac{k_0}{\Delta k_0} \frac{m_e}{m_i} \frac{v_{Ti}}{v_{Te}} \frac{W}{n_0 m_e c^2} , \tag{3.16}$$

в этих формулах k_0 -основной масштаб в.ч. поля.

Сравнивая полученные результаты, мы видим, что, если спектр в.ч. поля сосредоточен в коротковолновой области $k_0 > \dfrac{\omega_{oe}}{v_{Te}}$, то доминирует нагрев, связанный с рассеянием волн на электронах плазмы. В длинноволновой области $k_0 < \dfrac{\omega_{oe}}{v_{Te}}$ преобладает так называемый "корреляционный нагрев" (2.16), эффективность которого может быть оценена по формуле (3.12), однако с оговорками, сделанными выше. При использовании этой формулы нужно иметь в виду, что при достаточно малой интенсивности стохастического поля

$$\frac{W}{n_0 m_e c^2} \ll \frac{\Delta k_0}{k_0} \left(\frac{k_0 v_{Te}}{\omega_{oe}} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{oe}} \right)^2$$

нагрев, определяемый формулой (2.16), обращается в нуль, в то время как формулы (3.14)-(3.16) остаются справедливыми при любой интенсивности в.ч. поля. Последнее утверждение следует из того факта, что нагрев, связанный с рассеянием волн на частицах, практически не зависит от структуры корреляционной функции (например, ширины разброса по частотам δ) $V(\omega)$ и может быть получен при замене $V(\omega)$ на δ -функцию в формуле (2.14). Другими словами, нагрев (2.14) возможен при сколь угодно малой интенсивности стохастического поля. Здесь следует отметить, что непосредственный нагрев ионов (например, из-за рассеяния на ионах) стохастическим в.ч. полем идет в $\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^3$ раз медленнее, нежели нагрев электронов $^{x)}$.

§4. Резюме

Вышепроведенное исследование позволяет сделать следующие заключения.

1. Последовательная теория показывает, что действительно возможен нагрев плазмы, связанный с корреляциями стохастического поля.

2. Получено интегральное уравнение, позволяющее найти зависимость корреляционной функции от частоты.

3. Произведены оценки характерных времен корреляций, связанных с нелинейным взаимодействием стохастического в.ч. поля.

4. Показано, что эффекты корреляций должны рассматриваться совместно с эффектами более высокого порядка по энергии стохастического поля.

5. Отмечается, что феноменологическое описание корреляционных эффектов дает лишь часть эффектов, которые имеют место в действительности. Другая часть определяет нагрев, связанный с индуцированным рассеянием электромагнитных волн на частицах плазмы.

6. Интенсивность нагрева от индуцированного рассеяния часто превосходит "квазилинейный" корреляционный нагрев.

---

x) Вопрос о нагреве ионов электромагнитным полем из-за рассеяния рассматривался также в /4/.

7. Даны оценочные формулы для эффективных частот стохастического нагрева частиц плазмы.

Авторы весьма признательны Я.Б.Файнбергу, В.Д.Шапиро и Л.И.Рудакову за полезную дискуссию по затронутым проблемам.

Литература

1. Ф.Г.Басс, Я.Б.Файнберг, В.Д.Шапиро. ЖЭТФ, 49, 329 (1965).
2. K.Bol. Preprint Plasma Phys. Lab. Princeton Univ, Matt-457, May 1966.
3. Е.К.Завойский. Атомная энергия, 14, 143 (1963); Е.К.Завойский, Л.И.Рудаков. Атомная энергия, 23, 417 (1967), а также физика плазмы (Коллективные процессы и турбулентный нагрев), издательство "Знание", М., 1967.
4. I.Alexeff, R.V.Neidigh, W.F.Peed. Phys. Rev., 136, 689 (1964).
5. В.Н.Волосов, А.В.Комин. ЖТФ, 37, 846 (1968).
6. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме. Издательство "Наука", М., 1967.
7. Л.М.Коврижных. Письма ЖЭТФ, 2, 142 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 августа 1968 года.