М-36

23/X-68

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 4042

В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович

ДИССИПАТИВНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЕРЕКАЧКИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1968

7526/2 кр.

Р9 - 4042

В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович

ДИССИПАТИВНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЕРЕКАЧКИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЫ

Направлено в "Журнал прикладной механики и технической физики"

Объединенный институт ядерных исследований

1. Известно, что спектры турбулентности плазмы определяются интенсивностью трансформации вдоль спектра турбулентных пульсаций, возбуждаемых из-за неустойчивости плазмы [1]. Если турбулентность является квазистационарной, и характерное время существования стационарной турбулентности много больше частот парных соударений, то взаимодействие турбулентных пульсаций может весьма существенно зависеть от парных соударений частиц. В [2] дан расчет эффективности таких взаимодействий в условиях, когда разность частот двух взаимодействующих пульсаций много больше $\frac{m_e}{m_i}\nu_e$ (m_e, m_i –соответственно массы электронов и ионов, плазма полностью ионизирована, ν_e – частота соударений электронов с электронами и ионами плазмы). Более точно необходимые критерии применимости результатов [2] определяются следующим образом [x)]

$$\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{k_- v_{Te}}\right|^2 \gg \frac{m_e}{m_i}, \qquad |\omega_1-\omega_2| \gg \frac{m_e}{m_i}\nu_e . \qquad (1)$$

---

x) Нарушение первого из условий (1) не приводит к существенному изменению результатов [2], оставляя их справедливыми по порядку величины.

Цель настоящей работы – анализ нелинейных взаимодействий и характерных времен спектральных перекачек в условиях, когда (1) нарушено. В этих условиях кинетическое возбуждение низкочастотных колебаний высокочастотными (из-за процессов типа распадных) оказывается невозможным, а гидродинамическое возбуждение возникает в условиях очень узких спектров высокочастотных колебаний. Однако в этой области частот возможен новый специфический вид неустойчивости, связанный с диссипативиым характером процесса.

В отличие от перекачек высокочастотных волн в условиях (1) рассматриваемые ниже спектральные перекачки являются диссипативными, т.е. действительные нелинейные поправки к частоте могут быть существенно меньше мнимых поправок.

2. Поскольку в интересующей нас области тепловое движение частиц сказывается лишь на спектрах частот турбулентных пульсаций, но не на их взаимодействии, оказывается возможным использовать двухжидкостные гидродинамические уравнения /3/ для описания такого взаимодействия. При этом мы покажем, что гидродинамические уравнения /2/ позволяют получить результаты в условиях (1), если силу трения между электронами и ионами для высокочастотных колебаний считать равной $- m_e n_e \nu_e \vec{U}$ вместо $-0{,}51\, m_e n_e \nu_e \vec{U}$.

Последнее легко понять, если учесть, что коэффициент 0,51 возникает лишь в условиях частых соударений $(\omega \ll \nu_e)$, тогда как в условиях слабых соударений $(\omega \gg \nu_e)$ непосредственный расчет силы трения дает $- m_e n_e \nu_e \vec{U}$. Выписанная ниже система уравнений, учитывающая это обстоятельство, может рассматриваться как полуфеноменологическая. Обоснованность ее использования подтверждается кинематическим расчетом /2/. Выпишем эту систему

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial n_e \vec{V}_e}{\partial \vec{r}} = 0, \qquad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} n_i \vec{V}_i = 0 \tag{2}$$

$$m_e n_e \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V}_e \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\right] V_{e,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} n_e T_e - \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} - e n_e \left[E_\alpha + \frac{1}{c}[\vec{V}_e \vec{H}]_\alpha\right] + R_\alpha \tag{3}$$

$$m_i n_i \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\right] V_{i,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} n_i T_i - \frac{\partial \pi_{i\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + e n_i \left[E_\alpha + \frac{1}{c}[\vec{V}_i \vec{H}]_\alpha\right] - R_\alpha \tag{4}$$

$$\frac{3}{2} n_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_e \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) T_e + n_e T_e \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{V}_e = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{q}_e - \pi_{e,\alpha\beta} \frac{\partial V_{e\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_e, \tag{5}$$

$$\frac{3}{2} n_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) T_i + n_i T_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{V}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{q}_i - \pi_{i\alpha\beta} \frac{\partial V_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_i, \tag{6}$$

где $\vec{R} = \vec{R}_U + \vec{R}_T$, $\vec{R}_U$ –сила трения, $\vec{R}_T$ –термосила и аналогично $\vec{q}_e = q^e_U + q^e_T$, $\vec{U} = \vec{V}_e - \vec{V}_i$, m_e, m_i –массы, n_e, n_i –концентрации, T_e, T_i –температуры электронов и ионов соответственно

$$\vec{R}_U = -n_e m_e \nu_e \vec{U} \begin{cases} 0{,}51 & \text{при} \quad \omega \ll \nu_e \\ 1 & \text{при} \quad \omega \gg \nu_e \end{cases} \tag{7}$$

$$\vec{R}_T = -0{,}71\, n_e \frac{\partial}{\partial \vec{r}} T_e \tag{8}$$

$$\vec{q}^{\,e}_U = 0{,}71\, n_e T_e \vec{U}, \qquad q^e_T = -3{,}16 \frac{n_e T_e}{m_e V_e} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} T_e \tag{9}$$

$$q_i = -3{,}9 \frac{n_i T_i}{m_i V_i} \frac{\partial}{\partial r} T_i; \qquad Q_e = -(\vec{R}\vec{U}) - Q_i \tag{10}$$

$$Q_i = 3 \frac{m_e}{m_i} n_e \nu_e (T_e - T_i) \tag{11}$$

$$\pi^e_{\alpha\beta} = -0{,}73 \frac{n_e T_e}{\nu_e} W^{(e)}_{\alpha\beta}; \qquad \pi^i_{\alpha\beta} = -0{,}96 \frac{n_i T_i}{\nu_i} W^{(i)}_{\alpha\beta} \tag{12}$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \delta_{\alpha\beta}\,\frac{2}{3}\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{V} \,. \tag{13}$$

Величины ν_e и ν_i –характерные частоты соударений электронов и ионов с остальными частицами (электронами и ионами) плазмы, зависящие известным образом от ее температуры ($\approx \frac{1}{T_\alpha^{3/2}}$) и плотности.

Используем выписанную систему уравнений для исследования нелинейных взаимодействий пульсаций высоких частот $\omega = \omega^B \gtrsim \omega_{oe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}$.

В нелинейных поляризуемостях плазмы будем учитывать члены, содержащие не выше чем вторую степень ω^B в знаменателе. Разложим все величины по степеням электрического поля вплоть до членов третьего порядка по $E\,(\approx E^3)$

$$\vec{V} = \sum_{j=1} V^{(j)} \;;\quad V^{(j)} \approx (E)^j \;;\; n_0 = n_0 + \sum n^{(j)} \;;\; n^{(j)} \approx (E)^j$$
$$T = T_0 + \sum_j T^{(j)} \;;\; T^{(j)} \approx (E)^j \,. \tag{14}$$

Здесь $n_0 = \langle n \rangle$, $T_0 = \langle T \rangle$ –среднее значение температуры и плотности в турбулентной плазме. Использовать разложение (14) можно, если выполнены неравенства

$$\frac{n^{(j)}}{n_0},\ \frac{T^{(j)}}{T_0} \ldots \ll 1 \,.$$

Отметим сразу, что наличие высокочастотных турбулентных пульсаций сказывается на усредненной функции распределения частиц плазмы и приводит к так называемому столкновительному нагреву /4/. Уравнение для изменения средней температуры плазмы в зоне высокочастотных пульсаций аналогично использованному в /4/ для нагрева монохроматической волной

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle T_e\rangle = \frac{e^2}{m_e}\nu_e\int\frac{|E_{\vec{k}}|\,d\vec{k}}{(\omega^B)^2} - 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e(\langle T_e\rangle - \langle T_i\rangle) \tag{15}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle T_i\rangle = 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e(\langle T_e\rangle - \langle T_i\rangle). \tag{16}$$

Согласно /4/, (это следует также из (15), (16)) за время $\tau \approx \frac{h}{\nu_e}$ температура электронов увеличится лишь на $\Delta T_e \simeq T_e \frac{\omega_{oe}}{(\omega^B)^2}\frac{W}{n_e T_e} \ll T_e$ а $\Delta T_i = 3\Delta T_e \frac{m_e}{m_i}$, т.к., по предположению $\frac{W}{n_e T_e} \ll 1$, $\omega_i^B \gtrsim \omega_{oe}$. За время $\tau = \tau_1 = \frac{m_i}{m_e}\frac{1}{\nu_e}$ разность средних температур электронов и ионов выходит на плато $\frac{\langle T_e\rangle - \langle T_i\rangle}{\langle T_e\rangle} \approx \frac{m_i}{3m_e}\cdot\frac{W}{n\,T_e}\cdot\frac{\omega_{oe}^2}{(\omega^B)^2}$, а температура ионов увеличится на $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{W}{n_0 T_e}\left(\frac{\omega_{oe}}{\omega^B}\right)^2 (m_i/m_e)$. Обозначим $\frac{m_e}{m_i} n\,T_e\left(\frac{\omega^B}{\omega_{oe}}\right)^2 = W_p = \frac{E_p^2}{4\pi}$, где E_p –так называемое плазменное поле, W_p –его плотность энергии. Таким образом, если $W \ll W_p$, то эффектом нагрева электронов и ионов можно пренебречь. Если плазма слабо ионизирована, то столкновения ионов с нейтралами могут не позволить им поднять температуру достаточно высоко и тогда температуру ионов можно считать постоянной и равной T, а температуру электронов, если $\tau \gg \tau_1$, равной $T(1 + \frac{W}{W_p})$. При $W \gg W_p$ имеем $T_e \gg T_i$. В такой системе возможен эффективный турбулентный нагрев за счет нелинейного возбуждения ионного звука /5/.

Вернемся к системе уравнений (2)-(6). Найдем ее решение для $V^{(2)}$, $n^{(2)}$, $T^{(2)}$ $V^{(1)}$, $n^{(1)}$, $T^{(1)}$, при помощи которых можно определить нелинейную поляризуемость второго порядка по полю $S_i(k, k_1, k_2)$, определяемую равенством

$$j_k^{H} = \int S_1(k,k_1,k_2)E_{k_1}^{B}\;E_{k_2}^{B}\,\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1\,dk_2\,. \qquad (17)$$

Оценим члены, входящие в уравнение переноса импульса. Так как для нахождения S_1 необходимо знать $V^{(1)}$, $n^{(1)}$, $T^{(1)}$, соответствующие высокой частоте ω^{B}, то, выбрасывая диссипативные члены для высокой частоты, можно получить

$$n_{k_1}^{(1)} = n_0\,\frac{k_1 V_{k_1}^{(1)}}{\omega_1}, \quad V_{k_1}^{(1)} = -i\,\frac{eE_{k_1}}{m\,\omega_1}; \quad T_{k_1}^{(1)} = \frac{2}{3}\;\frac{1{,}71\,T_0\,k_1\,V_{k_1}^{(1)}}{\omega_1}\,. \qquad (18)$$

Здесь, простоты ради, поле $E_{\vec k}$ считаем продольным. Используя (18), нетрудно показать, что сумма $m_e n_0 (\vec V_e^{(1)} \frac{\partial}{\partial \vec r}) V_{e\alpha}^{(1)} + e n^{(1)} E_\alpha = 0$. Член $-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} n_e^{(1)} T_e^{(1)}$ из (18) может быть оценен как $\approx \frac{E^2}{\omega_1^4}$, и поэтому им можно пренебречь. Аналогичным образом из $\partial/\partial x_\alpha\;\pi_{e\alpha\beta}$ должны быть выброшены все члены, за исключением $-0{,}73\,\frac{n_{oe}T_{oe}}{\nu_e T_{oe}}\,W_{\alpha\beta}^{(e)(2)}$, а величину силы трения необходимо считать равной $\vec R = -m_e n_{oe}\nu_e\cdot$ $0{,}51\,U^{(2)} - 0{,}71\,n_{oe}\frac{\partial}{\partial \vec r}\,T_e^{(2)}$. Точно таким же образом могут быть оценены члены в уравнении переноса энергии

$$n_e^{(1)} T_{0e}\,\frac{\partial}{\partial \vec r}\,\vec V^{(1)} \approx \frac{E^2}{\omega_1^3}; \qquad V^{(1)}\frac{\partial}{\partial \vec r}\,T^{(1)} \approx \frac{E^2}{\omega_1^3}; \quad n_{oe}T_e^{(1)}\frac{\partial}{\partial \vec r}\,V^{(1)} \approx \frac{E^2}{\omega_1^3}$$

$$\vec q_e \approx 0{,}71\,n_{oe}T_{oe}\;; \quad \vec U^{(2)} \approx 3{,}16\,\frac{n_{oe}T_{oe}}{m_e\nu_e\,T_{oe}}\,\frac{\partial}{\partial \vec r}\,T_e^{(2)}\;; \qquad Q_e =$$

$$= -(\vec R^{\,b}\,U^{-b}) - \frac{3m_e}{m_i}\,n_{oe}\nu_e\,T_{oe}\,(T_e^{(2)} - T_i^{(2)}) = m_e n_{oe}\nu_e T_{oe}\,\vec V_e^{(1)}\,\vec V_e^{(1)},$$

так как $(V_e^{(1)}/V_i^{(1)}) = \frac{m_i}{m_e}$.

Наконец, $\pi^{(1)}_{\alpha\alpha\beta}\dfrac{\partial V^{(1)}_{e\alpha}}{\partial x_\beta} \approx \dfrac{k^2 v^2_{Te}}{\nu_e} Q_e$ является малым при $k v_{Te} \ll \nu_e$. Оценивая аналогичным образом члены, входящие в уравнение переноса для ионов, получим окончательно уравнения для поправок второго порядка по E.

$$\left(-i\omega + i\frac{k^2 v^2_{Te}}{\omega}\right) V^{(2)}_{ke} = -0{,}51\,\nu_e U^{(2)}_k - 1{,}71\, i k v^2_{Te}\frac{T^{(2)}_{ke}}{T_{oe}} \tag{19}$$

$$\left(-\frac{3}{2} i\omega + 3{,}16\frac{k^2 v^2_{Te}}{\nu_e} + 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\right)\frac{T^{(2)}_{ke}}{T_{oe}} = -ikV^{(2)}_{ke} - 0{,}71\, ikU^{(2)}_k +$$

$$+ 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\frac{T^{(2)}_{ki}}{T_0} + m_e\nu_e\frac{1}{T_0}\int V^{(1)}_{k_1} V^{(1)}_{k_2}\, d\lambda, \quad d\lambda = \delta(k-k_1-k_2)dk_1 dk_2; \quad k = \{\vec{k}, \omega\} \tag{20}$$

$$\left(-i\omega + 1{,}28\frac{k^2 v^2_{Ti}}{\nu_i} + i\frac{k^2 v^2_{Ti}}{\omega}\right) V^{(2)}_{ki} = -ikv^2_{Ti}\frac{T^{(2)}_{ki}}{T_{oi}} + 0{,}71\, ikv^2_{Ti}\frac{T^{(2)}_{ke}}{T_{oi}} + 0{,}51\frac{m_e}{m_i}\nu_e U^{(2)}_k \tag{21}$$

$$\left(-\frac{3}{2} i\omega + 3{,}9\frac{k^2 v^2_{Ti}}{\nu_i} + 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\right)\frac{T^{(2)}_{ki}}{T_{oi}} = -ikV^{(2)}_{ki} + 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e\frac{T^{(2)}_{ke}}{T_{oi}}. \tag{22}$$

Решая эту систему, получим

$$V^{(2)}_{ke} = -\frac{ik\nu_e\int V^{(1)}_{k_1} V^{(1)}_{k_2}\, d\lambda}{\kappa_1 \Omega_{ei}\omega_{ei}} A_e \tag{23}$$

$$V^{(2)}_{ki} = \frac{ik\nu_e\int V^{(1)}_{k_1} V^{(1)}_{k_2}\, d\lambda}{\kappa_1 \Omega_{ei}\;\omega_{ii}}\;\frac{m_e}{m_i} A_i. \tag{24}$$

Здесь введёны обозначения

$$\omega_{i1} = -i\omega + i\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega} + 1,28\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\nu_i} + \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\Omega_{i1}} - \frac{T_{oe}}{T_{oi}}\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\Omega_{e1}}(0,71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_{i1}})(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_{i1}}) \qquad (25)$$

$$\omega_{e1} = -i\omega + i\frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega} + 1,71\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_{e1}}(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_{i1}}) \qquad (26)$$

$$\Omega_{i1} = -\frac{3}{2}i\omega + \delta\nu + 3,9\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\nu_i} \qquad (27)$$

$$\Omega_{e1} = -\frac{3}{2}i\omega + \delta\nu + 3,16\frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e} - \frac{(\delta\nu)^2}{\Omega_{i1}}; \quad \delta\nu = 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e \qquad (28)$$

$$\kappa_1 = 1 + (0,51\nu_e + 1,71(0,71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_{i1}})\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_{e1}})(\frac{1}{\omega_{e1}} + \frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\omega_{i1}}) \qquad (29)$$

$$A_e = 1,71 + \frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\omega_{i1}}(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_{i1}})(0,51\nu_e + 1,71(0,71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_{i1}})\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_{e1}}) \qquad (30)$$

$$A_i = 0,71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_{i1}} - \frac{1}{\omega_{e1}}(1 + \frac{\delta\nu}{\Omega_{i1}})(0,51\nu_e + 1,71(0,71 - \frac{\delta\nu}{\Omega_{i1}})\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_{e1}}) . \qquad (31)$$

Искомое выражение для S_1 имеет вид

$$S_1(k,k_1,k_2) = en_0(V_{ke}^{(2)} - V_{ki}^{(2)}) = -en_0 i\frac{k\nu_e \int(V_{k_1}^{(1)}V_{k_2}^{(1)}d\lambda/E_{k_1}E_{k_2})}{\kappa_1\Omega_{e1}}(\frac{A_e}{\omega_{e1}} + \frac{m_e}{m_i}\frac{A_i}{\omega_{i1}}). \qquad (32)$$

При $\omega \gg 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e$, kv_{Ti} результат (32) совпадает с тем, который был получен в /2/. Таким образом, (32) обобщает результаты /2/ на случай $\omega < 3\frac{m_e}{m_i}\nu_e$ и $\omega \lessgtr kv_{Ti}$.

Нелинейный ток S_2, определяемый соотношением

$$j_k^{B} = \int S_2(k,k_1,k_2) E_{k_1}^{B} E_{k_2}^{H} dk_1 dk_2 \, \delta(k-k_1-k_2), \qquad (34)$$

имеет формально тот же вид, что и в /2/.

$$S_2(k,k_1,k_2) = \frac{i e^3 n_0 k_2 (\vec{k}\vec{k}_1)}{k k_1 m_e^2 \omega \kappa \omega_{e1} \omega_2}, \qquad (35)$$

где, однако, κ, ω_{e1} определяется формулами (25)-(29). Наконец, нелинейный ток третьего порядка связан с током второго порядка соотношением, найденным в /2/.

3. Приведем пример расчета спектральных перекачек ленгмюровских волн, если разность их частот меньше $3\frac{m_e}{m_i}\nu_e$. Несложный расчет дает

$$\gamma_k = \frac{1}{|E_k|^2}\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = -\mathrm{Re}\int \frac{1{,}71\nu_e |\vec{k}-\vec{k}_1|^2 e^4 (\vec{k}\vec{k}_1)^2 n_0 \frac{m_e}{m_i}}{\omega_{oe}^3 k_1^2 k_2^2 m_e^3 \omega_{e1} \kappa \Omega_{e1} (\omega-\omega_1)} \cdot \frac{\frac{\omega_{e1}}{\omega_{i1}} |E_{\vec{k}_1}|^2 d\vec{k}_1}{(1+\frac{m_e}{m_i}\frac{\omega_{e1}}{\omega_{i1}})} \qquad (36)$$

Наиболее эффективным оказывается взаимодействие волн, разность частот которых близка к скорости звуковых колебаний $\omega_s = \sqrt{\frac{10}{3}} k v_{Ti}$, или точнее, если

$$\frac{\Delta\omega - \omega_s}{\Delta\omega} < \frac{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2 v_{Te}^2}{\Delta\omega \nu_e}; \left|\frac{\Delta\omega - \omega_s}{}\right| \gg \gamma_s. \qquad (37)$$

$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ –разность частот взаимодействующих волн. Получим оценку

$$\gamma_{\vec{k}} = \frac{1}{|E_k|^2}\frac{\partial |E_{\vec{k}}|^2}{\partial t} \simeq -\frac{W}{n_0 T_e}\frac{(\Delta\omega - \omega_s)\,\omega_0}{\left(\frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e^2}\right)^2 \nu_e}. \tag{38}$$

Если $(\Delta\omega - \omega_s)$ -порядка $\frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$, то γ_k -порядка

$$\gamma_k \simeq \frac{W}{n_0 T_e}\frac{\omega_{oe}\,\nu_e^2}{k^2 v_{Te}^2}. \tag{39}$$

Формула (39) показывает, что такие взаимодействия очень эффективны. Однако при использовании этого соотношения необходимо иметь в виду, что 1) $\frac{W}{n_0 T_e} \ll \frac{m_e}{m_i}$ и 2) взаимодействуют интенсивно лишь волны, имеющие очень близкие частоты ($\Delta\omega \simeq \omega_s \ll \frac{m_e}{m_i}\nu_e$). Фактически спектры ленгмюровских колебаний в турбулентной плазме могут быть значительно более широкими. Поэтому здесь речь идет об "эстафетной" перекачке (см. /1/).

4. Рассмотрим в качестве другого примера возможность распада высокочастотных волн (например, лазерных поперечных волн в условиях лазерной искры) на низкочастотный звук $\omega_s \ll \frac{m_e}{m_i}\nu_e$. Нетрудно проверить, что дисперсионное уравнение, описывающее такой процесс, имеет стандартный вид /5,6/

$$\omega' + i\gamma_k^s = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{U(k,k_1)\,d\vec{k}_1\,(N_{k_1}^t - |N_{k_1-k}^t|^2)}{\omega' + \Delta\omega_{kk_1} + i\delta}. \tag{40}$$

Здесь ω' -нелинейная поправка к частоте звуковых колебаний

$$\Delta\omega_{kk_1} = -\mathrm{Re}\,\omega_{k_1} + \mathrm{Re}\,\omega_{k_1-k} + \mathrm{Re}\,\omega^s_k \quad , \qquad U(k,k_1)$$

обычно являющаяся вероятностью рассматриваемого распадного процесса (в бессоударительном случае), в данном случае пропорциональна произведению нелинейных поляризуемостей S_1 и S_2

$$U(k,k_1) = (2\pi)^4 \frac{S_1(\vec{k},\Omega^t_{k_1} - \Omega^t_{\vec{k}_1-\vec{k}}; k\,\Omega^t_{\vec{k}_1}; \vec{k}-\vec{k}_1, -\Omega^t_{\vec{k}_1-\vec{k}})\, S_2(\vec{k}_1, \Omega^t_{\vec{k}_1-\vec{k}} + \mathrm{Re}\,\omega^s_{\vec{k}}; \vec{k}_1-\vec{k}, \Omega_{\vec{k}_1-\vec{k}}, k, \mathrm{Re}\,\omega^s_k)}{\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\omega\varepsilon^s(\omega,\vec{k})\Big|_{\omega=\mathrm{Re}\,\omega^s_{\vec{k}_1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2\epsilon^t(\omega,\vec{k})\Big|_{\omega=\Omega^t_{\vec{k}_1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2\epsilon^t(\omega,\vec{k}_1-\vec{k})\Big|_{\omega=\Omega^t_{\vec{k}_1-\vec{k}}}\right)} \times$$

$$\times\ 16(\Omega^t_{\vec{k}_1-\vec{k}} + \mathrm{Re}\,\omega^s_{\vec{k}}).$$

Обычно кинетическая нелинейная неустойчивость возникает, когда $\Delta\omega''_{\vec{k}\vec{k}_1} > \omega'$ (см. /5,6/) и подинтегральное выражение пропорционально $-\,i\pi\,\delta(\Delta\omega_{\vec{k}\vec{k}_1})$. В случае если $\omega^s_k < \frac{m_e}{m_i}\nu_e$, из (32) и (35) следует

$$U(k,k_1) \cong i\,\frac{1{,}71(2\pi)^2\nu_e\,\omega^4_{oe}}{8\,\Omega^t_{\vec{k}_1}\Omega^t_{\vec{k}_1-\vec{k}}4\pi n_0 T_e}\left(1 + \frac{(\vec{k}_1, \vec{k}_1-\vec{k})^2}{k_1^2\,|\vec{k}_1-\vec{k}|^2}\right). \tag{42}$$

При получении (42) мы отбрасывали малые члены порядка $\frac{k^2}{\nu_e}\frac{v^2_{Te}}{\omega^s_k}$.
Следовательно, $\frac{\mathrm{Re}\,U(k,k_1)}{\mathrm{Im}\,U(k,k_1)} \approx \frac{\gamma^s_k}{\omega^s_k}$, поэтому возбуждение низкочастотных акустических колебаний, связанное с распадным взаимодействием $\left(\frac{1}{\Delta\omega_{\vec{k}\vec{k}_1} + i\delta} \cong -i\pi\delta(\Delta\omega_{\vec{k}\vec{k}_1})\right)$, невозможно (см. /6/).

Если пучок поперечных волн имеет некий разброс по частотам $\Delta\omega$ и по углам $\Delta\vec{k}_1$, то пусть при изменении k_1 и ω_1 в указанных интервалах максимальное значение $\Delta\omega_{\vec{k}\vec{k}_1}$ есть Δ_1, а

$\max(\Delta\omega_{\vec{k},\vec{k}_1+\vec{k}}) = \Delta'_2$. Соответствующие минимальные значения обозначим δ_1 , δ_2 . Если δ_1, Δ_1 и δ_2, Δ_2 больше $Re\,\omega_k^s$, то возникает рассматриваемый новый вид нелинейной диссипативной неустойчивости.

Пусть $\delta_2 , \Delta_2 > \delta_1 , \Delta_1$, тогда $(\Delta\Omega_{\vec{k}_1} = \Omega^t_{\vec{k}_1} - \Omega^t_{\vec{k}_1-\vec{k}})$

$$\omega' + i\gamma^s_{\vec{k}} = i\frac{1{,}71\,\nu_e\,\omega^4_{oe}}{8(2\pi)^2 4\pi n_0 T_e}\int \frac{\left(1+\dfrac{(\vec{k}_1,\vec{k}_1-\vec{k})^2}{k_1^2|\vec{k}_1-\vec{k}|^2}\right)}{\Omega_{\vec{k}_1}, \Omega_{\vec{k}_1-\vec{k}}} d\vec{k}_1 \frac{N^t_{\vec{k}_1}}{\Delta\Omega_{\vec{k}_1}} \tag{43}$$

или

$$\omega' + i\gamma^s_{\vec{k}} = -\frac{i\,1{,}71\,\nu_e\,\omega^4_{oe}}{8(2\,\pi)^2 4\pi n_0 T_e}\int d\vec{k}_1 N^t_{\vec{k}_1}\left\{\frac{\vec{k}\,\dfrac{\partial\psi(\vec{k}_1)}{\partial\vec{k}_1}}{\Delta\Omega_{\vec{k}_1}} - \frac{U(\vec{k}_1)}{(\Delta\Omega_{\vec{k}_1})^2}\left(\vec{k}\,\frac{\partial\Delta\Omega_{\vec{k}_1}}{\partial\vec{k}_1}\right)\right\} \tag{44}$$

при $\delta_2 ,\ \Delta_2 \approx \delta_1, \Delta_1$ $k_1 \gg k$.

Формулы (43) и (44) позволяют оценить инкременты нелинейного возбуждения низкочастотных акустических волн, распространяющихся под острым углом к пучку поперечных волн. Оценка по формуле (43) дает $\left(\dfrac{k}{2k_1} \gg \dfrac{v_e}{c}\right)$

$$\gamma \approx \frac{\omega_{oe}}{16}\left(\frac{\omega_{oe}}{\Omega^t}\right)^3 \frac{\nu_e}{kc}\,\frac{W}{n_0 T_e}\,. \tag{45}$$

Учитывая, что $\nu_e \dfrac{m_e}{m_i}\,\omega^s_k > \gamma > \gamma^л_k$, получим условия, при которых возможно возбуждение (45):

$$\left\{ \frac{m_e}{m_i} , \frac{k v_e}{\nu_e} \right\} > \frac{\omega_{oe}}{k c} \left(\frac{\omega_{oe}}{\Omega_i} \right)^3 \frac{W}{n_0 T_e} > \frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e^2} . \qquad (46)$$

Аналогично могут быть получены оценки из (44).

Литература

1. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме. Наука, М., 1967.
2. В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 53, 1789, 1967.
3. С.И.Брагинский. Вопросы теории плазмы, 1, Атомиздат, 1963.
4. В.Л.Гинзбург, А.В.Гуревич. УФН, LXX, 202, 1960.
5. В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 1968. Доклад на конференции в Вене, 1967 (август).
6. В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович. Препринт ОИЯИ Р9-3980, Дубна 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 августа 1968 года.