ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 4041

В.Г.Маханьков

О НЕЛИНЕЙНЫХ НИЗКОЧАСТОТНЫХ СПЕКТРАХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1968

Р9 - 4041

В.Г.Маханьков

О НЕЛИНЕЙНЫХ НИЗКОЧАСТОТНЫХ СПЕКТРАХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ

Направлено в ЖЭТФ

В последнее время большой интерес вызывают исследования, связанные с проблемой нелинейного взаимодействия различных коллективных степеней свободы в плазме. Уже в работе /1/ на примере ионо-звуковых колебаний было выяснено, сколь существенное влияние на дисперсионные свойства плазмы в области низких частот (н.ч.) может оказать наличие высокочастотной (в.ч.), в частности ленгмюровской, турбулентности. В последующих исследованиях /2,3/, касавшихся возбуждения спонтанных магнитных полей в.ч. турбулентностью и нелинейно-дрейфовых неустойчивостей, этот факт был со всей очевидностью подтвержден; там же был предложен общий метод исследования подобных задач.

Известно, что в плазме, обладающей анизотропией температур, например, электронов возникает апериодическая н.ч. неустойчивость в области $\omega < k v_{Te}$ (обозначения см. ниже). В результате развития этой неустойчивости, как показано в /4/, плазма релаксирует к изотронному состоянию. С другой стороны, известно, что в межпланетной плазме наблюдается довольно значительная анизотропия температур. Цель данной работы - выяснить влияние ленгмюровской в.ч. турбулентности на дисперсионные свойства анизотропной плазмы в области частот $\omega \ll k v_{Te}$.

1. Выше было отмечено, что метод получения нелинейной диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} при довольно общих предположениях был развит в /2,3/, поэтому здесь мы лишь вкратце остановимся на нем. Разобьем функцию распределения электронов $\tilde{f}^{(e)}(v)$, а также

электрическое поле E на турбулентную и регулярную составляющие.

$$\tilde{f}^{(e)} = f^{(0)} + \phi^{(e)} \qquad \langle \phi^{(e)} \rangle = 0 \tag{1.1}$$

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{E} + \vec{e} \qquad \langle \vec{e} \rangle = 0 . \tag{1.2}$$

В исходном турбулентном состоянии $E = 0$. Будем искать отклик турбулентной плазмы на н.ч. поле E, возникающее в результате слабого изменения функций распределения частиц и в.ч. пульсаций. Тогда уравнение, линейное по E, для функции f_{1k}, описывающей этот отклик, имеет вид:

$$-i(\omega - \vec{k}\vec{v}) f_{1k} + \vec{F}_k \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij,0} \frac{\partial}{\partial v_j} f_{1k} + F_{k,j} \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij\ell} \frac{\partial f_0}{\partial v_\ell} + \frac{\partial}{\partial v_i} (D_{ij,1} + D_{ij,2}) \frac{\partial}{\partial v_j} f_0 . \tag{1.3}$$

Здесь

$$\vec{F}_k = \frac{e}{m_e} (\vec{E}_k + [\vec{v}\vec{H}] \frac{1}{c}) = \frac{e}{m_e} [\vec{E}_k (1 - \frac{\vec{k}\vec{v}}{\omega}) + \frac{\vec{k}}{\omega} (\vec{v}\vec{E})],$$

ω, $\vec{k}$ –частота и волновой вектор н.ч. колебаний, ω_1, $\vec{k}_1$ –частота и волновой вектор в.ч. пульсации, f_0 –функция распределения основного (турбулентного) состояния. Коэффициенты D имеют вид $(k_1 = (\vec{k}_1, \omega_1)$

$$D_{ij,0} = \frac{e^2}{m_e^2} i \int \frac{|e_{k_1}|^2 dk_1 k_{1i} k_{1j} (\omega - \vec{k}\vec{v})}{k_1^2 (\omega_1 - \omega - (\vec{k}_1 - \vec{k})\vec{v} - i\delta)} \frac{1}{(\omega_1 + \omega - (\vec{k}_1 + \vec{k})\vec{v} + i\delta)} \tag{1.4}$$

$$D_{ij,1} = i\frac{e^2}{m_e^2}\frac{\omega_{oe}}{n_0}\int\frac{|e_{k_1}|^2 dk_1}{\epsilon^{л}(k-k_1)}\left[\frac{k_{1i}(k_i-k_{1i})}{\omega_1-\vec{k}_1\vec{v}+i\delta}-\frac{k_{1i}(k_j-k_{1j})}{\omega_1-\omega-(\vec{k}_1-\vec{k})\vec{v}-i\delta}\right]$$

$$\cdot\frac{1}{k_1^2(k-k_1)^2}\int\frac{d\vec{v}'\,(\vec{k}_1\frac{\partial}{\partial\vec{v}'})f_{1k}(\vec{v}')}{\omega_1-\omega-(\vec{k}_1-\vec{k})\vec{v}-i\delta};$$

$$D_{ij,2} = -\frac{e^2}{m_e^2}\frac{\omega_{oe}^2}{n_0}\int\frac{|e_{k_1}|^2 dk_1}{\epsilon^{л}(k-k_1)}\left[\frac{k_{1i}(k_{1j}-k_j)}{\omega_1-\omega-(\vec{k}_1-\vec{k})\vec{v}-i\delta}-\frac{k_{1j}(k_{1i}-k_i)}{\omega_1-\vec{k}_1\vec{v}+i\delta}\right]$$

$$\cdot\frac{1}{k_1^2(\vec{k}-\vec{k}_1)^2}\int\frac{d\vec{v}'}{\omega-\omega_1-(\vec{k}-\vec{k}_1)\vec{v}-i\delta}(\vec{F}_k\frac{\partial}{\partial\vec{v}'})\frac{(\vec{k}_1\frac{\partial}{\partial\vec{v}'})f_0(\vec{v}')}{\omega_1-\vec{k}_1\vec{v}'+i\delta}; \qquad (1.6)$$

$$D_{ij\ell} = -\frac{e^2}{m_e^2}\int\frac{|e_{k_1}|^2 dk_1\, k_{1i}\, k_{1\ell}}{k_1^2(\omega_1-\omega-(\vec{k}_1-\vec{k})\vec{v}-i\delta)}\frac{\partial}{\partial v_j}\frac{1}{\omega_1-\vec{k}_1\vec{v}-i\delta}.$$

Коэффициенты (1.4)-(1.6) выписаны с точностью до $|e_{k_1}|^2$, члены более высоких порядков отброшены x).

Наиболее простой вид коэффициенты D приобретают в области $\omega \ll \omega_{k_1}$ и $k \ll k_1$

$$D_{ij,1} = i(\omega-\vec{k}\vec{v})\frac{\eta^{(1)}_{ke}}{n_0\omega_{oe}}\frac{\pi e^2}{m_e^2}\int d\vec{k}_1\frac{k_{1i}k_{1j}}{k_1^2}\frac{(\vec{k}\frac{\partial}{\partial\vec{k}_1})W_{\vec{k}_1}}{\omega-\vec{k}\vec{v}_{g1}+i\delta} \qquad (1.7)$$

---

x) Оценку члена следующего порядка см. ниже.

$$D_{ij,2} = -\frac{6\pi e^3}{m_e^2 \omega_{oe}^3}(\omega - \vec{k}\vec{v})\int d\vec{k}_1 \frac{k_{1i}k_{1j}}{k_1^2}\frac{(\vec{k}\vec{E}_k)W_{\vec{k}_1}}{\omega - \vec{k}\vec{v}_{g1} + i\delta} - \frac{\pi e^3(\omega - \vec{k}\vec{v})}{m_e^3 \omega\,\omega_{oe}^2}\cdot$$

$$\cdot \int d\vec{k}_1 \frac{k_{1i}k_{1j}}{k_1^2} k^2 \frac{(\vec{k}_1\vec{E}_k - \frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k^2}(\vec{k}\vec{E}_k))(\vec{k}\frac{\partial}{\partial \vec{k}_1})W_{\vec{k}_1}}{\omega - \vec{k}\vec{v}_{g1} + i\delta}, \qquad (1.8)$$

где $W_{\vec{k}_1} = \frac{|e_{\vec{k}_1}|^2}{4\pi}$, $n_{ke}^{(1)} = \int f_{1k}^{(e)} d\vec{v}$, $\vec{v}_{g1} = \frac{d\omega_{\vec{k}_1}}{d\vec{k}_1}$ –групповая скорость в.ч. колебаний, а $\omega_{\vec{k}_1}$ –решение их линейного дисперсионного уравнения x). $W = \int W_{\vec{k}_1} d\vec{k}_1$, T_e –температура электронов. Бесконечно малая величина $i\delta$ указывает правило обхода полюса.

Остальные коэффициенты дают пренебрежимо малый вклад при $\frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$.

Введем следующие обозначения:

$$D_{ij,1} = -i(\omega - \vec{k}\vec{v})\, d_{ij}\, n_{ke}^{(1)} \qquad (1.9)$$

$$D_{ij,2} = -(\omega - \vec{k}\vec{v})\frac{e}{m_e} d_{ij,\ell} E_{k,\ell}. \qquad (1.10)$$

Тогда вместо (1.3) имеем

---

x) Здесь можно ограничиться для $\omega_{\vec{k}_1}$ решением линейного дисперсионного уравнения. Действительно, даже для ленгмюровских волн, групповая скорость которых весьма мала, поправки к частоте, связанные с их нелинейным взаимодействием, не вносят вклад в v_{g1} для изотропной турбулентности. (См. /6,7/). Однако в достаточно плотной плазме, где важен учет соударений, этот результат может измениться /6/.

$$f_{1k} = \frac{1}{i(\omega - \vec{k}\vec{v})} \left(\vec{F}_k \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) f_0 + \frac{\frac{\partial}{\partial \vec{v}_j}(\omega - \vec{k}\vec{v})}{i(\omega - \vec{k}\vec{v})} \frac{\partial f_0}{\partial v_j} \left(i d_{ij} n^{(1)}_{ke} + \frac{e}{m} d_{ij\ell} E_{k,\ell} \right) . \qquad (1.11)$$

Используя уравнения Максвелла, (1.11) и формулу

$$j^{(1)}_{k,i} = e \int v_i f_{1k} d\vec{v} = \frac{(\epsilon^{(e)}_{ij} - \delta_{ij})\omega}{4\pi i} E_{k,j} \quad ,$$

получим нелинейную диэлектрическую проницаемость плазмы x)

$$\epsilon^{(e)}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi e^2}{\omega m_e} \int \frac{v_i [\delta_{\ell j}(1 - \frac{\vec{k}\vec{v}}{\omega}) + \frac{k_\ell v_j}{\omega}]}{\omega - \vec{k}\vec{v} + i\delta} \frac{\partial f_0}{\partial v_\ell} d\vec{v} +$$

$$\frac{4\pi e^2}{m_e \omega} \int \frac{v_i d\vec{v}}{\omega - \vec{k}\vec{v} + i\delta} \frac{\partial}{\partial v_\ell}(\omega - \vec{k}\vec{v}) \frac{\partial f_0}{\partial v_s} \{ d_{\ell s} \int \frac{d\vec{v}'}{\omega - \vec{k}\vec{v}' + i\delta} [(\delta_{mj}(1 - \frac{\vec{k}\vec{v}'}{\omega}) +$$

$$+ \frac{k_m v'_j}{\omega}) \frac{\partial f_0(\vec{v}')}{\partial v_m} + d_{mnj} \frac{\partial}{\partial v'_m}(\omega - kv') \frac{\partial}{\partial \vec{v}'_n} f_0(v')][1 - d_{rp} \int \frac{d\vec{v}''}{\omega - \vec{k}\vec{v}'' + i\delta} \qquad (1.12)$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial v''_r}(\omega - \vec{k}\vec{v}'') \frac{\partial f_0(\vec{v}'')}{\partial v_p}]^{-1} + d_{\ell s j} \} .$$

2. Перейдем к исследованию дисперсионного уравнения. Целесообразно выбрать систему координат так, чтобы $\vec{k} = \{k, 0, 0\}$, $\vec{E} = \{0, 0, E\}$, а функция распределения

---

x) Этот результат полностью совпадает с полученным в /2/.

$$f_0 = \frac{n_0}{2\pi v_{||} v_{\perp}} e^{-\left(\frac{v_z^2}{2v_{\perp}^2} + \frac{v_x^2}{2v_{||}^2}\right)} \qquad v_{||} = \sqrt{\frac{T_{||}}{m_e}}\,, \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{T_{\perp}}{m_e}}\,, \tag{2.1}$$

тогда дисперсионное уравнение коллективных движений, приводящее в линейном приближении к анизотропной неустойчивости, есть /6/

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_{33} = 0\,. \tag{2.2}$$

Найдем компоненту тензора ϵ_{33}. Для этого вычислим d_{ij} и d_{ij3}, полагая в.ч. пульсации ленгмюровскими и изотропными

$$d_{ij3} = \frac{\pi e^3}{\omega_{oe}^2 \omega m_e^2} \int d\vec{k}_1 \frac{k_{1i} k_{1j}}{k_1^2} k^2 k_{1z} \frac{k \frac{\partial}{\partial k_{1x}} W_{\vec{k}_1}}{\omega - k v_{g1x} + i\delta} \tag{2.3}$$

$$d_{ij} = -\frac{\pi e^2}{\omega_{oe} n_0 m_e^2} \int d\vec{k}_1 \frac{k_{1i} k_{1j}}{k_1^2} \frac{k \frac{\partial}{\partial k_{1x}} W_{\vec{k}_1}}{\omega - k v_{g1x} + i\delta}\,. \tag{2.4}$$

Вычисляя интеграл $d\vec{v}$ в формуле (1.12), нетрудно показать, что (для изотропных в.ч. пульсаций) в ϵ_{33} вносит вклад лишь коэффициент d_{133}, который определяется формулой

$$d_{133} = \frac{\pi e^2}{\omega_{oe}^2 \omega m_e^2} \int d\vec{k}_1 \frac{k_{1x}^2 k_{1z}^2 k^3}{k_1^5} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial k_1} W_{\vec{k}_1}}{\omega - k k_{1x} 3 \frac{v_{Te}^2}{\omega_{oe}} + i\delta}\,, \tag{2.5}$$

Будем рассматривать (2.5) в двух областях

1) $\omega \gg k v_{g1}$ и 2) $\omega \ll k v_{g1}$. В первой области частот (2.5) легко вычисляется

$$d_{133} = -\frac{k^3 \pi}{9 n_0 m_e \omega^2} \int_0^\infty W_{k_1} dk_1 \quad . \qquad (2.6)$$

При этом

$$\epsilon_{33} = 1 + \frac{\omega_{oe}^2}{\omega^2}\left(\frac{T_\perp}{T_\parallel} - 1\right) + \frac{T_\perp}{T_\parallel}\frac{\omega_{oe}^2}{\omega^2} i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_\parallel}\left[1 + \frac{\pi}{9}\left(\frac{kv_\parallel}{\omega}\right)^2 \frac{k^2}{n_0 T_\perp}\int W_{k_1} dk_1\right]. \qquad (2.7)$$

Подставим (2.7) в (2.2) и решим получающееся квадратное уравнение

$$\frac{\omega}{kv_\parallel} = \frac{-i\left[k^2c^2 + \omega_{oe}^2\left(1 - \frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)\right] \pm i\sqrt{\left[k^2c^2 + \omega_{oe}^2\left(1 - \frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)\right]^2 + 4\left(\frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)^2 \omega_{oe}^4 \frac{\pi^2}{18}\frac{k^2}{n_0 T_\perp}\int W_{k_1} dk_1}}{2\frac{T_\perp}{T_\parallel}\omega_{oe}^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \qquad (2.8)$$

Из этого выражения следует, что неустойчивость, связанная с анизотропией температур, не существенна, если

$$2\left(\frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)^2 \frac{\pi^2}{9} k^2\left(\frac{1}{n_0 T_\perp}\int W_{k_1} dk_1\right) \gg \left|\frac{k^2c^2}{\omega_{oe}^2} - \frac{T_\parallel - T_\perp}{T_\parallel}\right|^2 . \qquad (2.9)$$

В этом случае происходит (аналогично /2/) генерация спонтанных магнитных полей ленгмюровской турбулентностью, поэтому в результате релаксации такой неустойчивости должна изменяться функция распределения плазмонов.

В области $\omega \ll k v_{g1}$ для вычисления интеграла в (2.5) необходимо знать вид стационарного спектра в.ч. турбулености W_{k_1}.

Если предположить, что в.ч. пульсации распределены по Гауссу, то x)

$$d_{133} = \frac{1}{12} \frac{k\, W\, \omega_{oe}^2}{n_0 T_{||}} \left[-1 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, i \beta \,(C_1 + \ln \beta) \right], \tag{2.10}$$

где $\beta = \frac{\omega}{k v_{||}} \cdot \frac{\omega_{oe}}{k_{10} v_{||}} \frac{1}{3\sqrt{2}} \ll 1$ в силу $\omega \ll k v_{g1}$. Оставляя в (2.10) старший член и решая (1.3), получим

$$\frac{k^2 c^2}{\omega_{oe}^2} + \left(1 - \frac{T_\perp}{T_{||}}\right) = i \frac{T_\perp}{T_{||}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{||}} \left[1 - \frac{1}{108} \frac{k^2}{k_{10}^2} \left(\frac{v_{\phi 1}}{v_{||}} \right)^2 \frac{W}{n_0 T_\perp} \right]. \tag{2.11}$$

Из этого выражения видно, что влияние в.ч. турбулентности становится существенным при

$$\frac{1}{108} \frac{k^2}{k_{10}^2} \left(\frac{v_{\phi 1}}{v_{||}} \right)^2 \frac{W}{n_0 T_\perp} > 1, \tag{2.12}$$

при этом знак инкремента изменяется, и неустойчивость развивается за счет энергии в.ч. турбулентности. Поэтому анизотропия температур может сохраняться.

При нарушении (2.12) имеет место обычная анизотропная неустойчивость.

Автор весьма признателен В.Н.Цытовичу и Б.Г.Щинову за полезные обсуждения.

---

x) При получении (2.10) было использовано разложение в ряд функций $E_1(x)$ при малых x с точностью до линейных членов $E_1(-x) = c + \ln x - x$. Здесь C –постоянная Эйлера, а C_1 в формуле (2.10) есть $C_1 = C + 1$.

Л и т е р а т у р а

1. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН, 159, 767, 1964. А.А.Веденов, А.В.Гордеев, Л.И.Рудаков. Plasma Physics 9,719, 1967.

3. В.Н.Цытович. ДАН, 80, 1968.

3. Э.Н.Криворуцкий, В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович. Препринт ОИЯИ Р9-3982, Дубна 1968. Ядерный синтез.

4. В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. ЖЭТФ, 45, 1612, 1963.

5. В.Г.Маханьков, В.И.Шевченко. Препринт ОИЯИ Р-1652, Дубна 1964. Сб. физика плазмы, т.4, стр. 179, "Наукова Думка", Киев 1965.

6. В.Г. Маханьков, В.Н.Цытович. ЖТФ, XXXVII, 1381, 1967.

7. А.М.Горбунов, А.М.Тимербулатов. ЖЭТФ, 53, 1492, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел

14 августа 1968 года.