ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 4040

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

В.Г.Маханьков, Б.Г.Щинов

ВЛИЯНИЕ КУЛОНОВСКИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ЧАСТИЦ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

1968

7481/2 ир.

Р9 - 4040

В.Г.Маханьков, Б.Г.Щинов

ВЛИЯНИЕ КУЛОНОВСКИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ЧАСТИЦ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

В последнее время в ряде работ /1-3/ был развит метод и исследован вопрос о влиянии кулоновских столкновений частиц на нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн в плазме. Было показано, что существуют области параметров плазмы, где учет столкновений является принципиальным. Так, соударения могут изменить направление спектральной перекачки в сторону уменьшения частот турбулентных пульсаций, в противоположность бессоударительному случаю. Было также показано, что соударения могут изменить дисперсионные свойства взаимодействующих волн. В изотропной плазме без магнитного поля могут распространяться и взаимодействовать между собой и с ленгмюровскими волнами поперечные (t) волны. Следовательно, возникает вопрос о влиянии столкновений на эти взаимодействия. Метод, развитый в /1/, может быть применен и для исследования взаимодействия указанных волн.

В настоящей работе рассматривается влияние кулоновских соударений частиц на нелинейные взаимодействия $(t\,t)$ волн. Следует отметить некоторые особенности $(t\,t)$ взаимодействия в отличие от взаимодействия ленгмюровских волн. Линейная дисперсия t -волн определяется выражением

$$\omega = \sqrt{\omega_{oe}^2 + k^2 c^2}\,, \qquad (1)$$

где ω_{oe} –ленгмюровская частота, k –волновой спектр, c –скорость света.

Следовательно, для того чтобы столкновения стали существенными, необходимо (см. [1]), чтобы

$$\omega_- = \omega - \omega_1 = \sqrt{\omega_{oe}^2 + k^2 c^2} - \sqrt{\omega_{oe}^2 + k_1^2 c^2} \ll \nu_{эф.}, \tag{2}$$

Здесь $\nu_{эф.}$ –эффективная частота парных соударений частиц.

Для простоты, как обычно, будем рассматривать два предельных случая

$$\text{I.} \quad \omega_{oe} \ll kc \tag{3}$$

$$\text{II.} \quad \omega_{oe} \gg kc\ . \tag{4}$$

Тогда в первом случае имеем

$$\omega_- \approx (\Delta k) c < \nu_{эф.}, \qquad \Delta k = |\vec{k}| - |\vec{k}_1|, \tag{5}$$

т.е. взаимодействовать могут только волны с $\Delta k \ll k$ ("эстафета"), а во втором

$$\omega_- \approx \Delta k\, c \left(\frac{ck}{\omega_{oe}}\right) < \nu_{эф.}. \tag{6}$$

В этом случае $\frac{ck}{\omega_{oe}} \ll 1$, поэтому могут взаимодействовать, вообще говоря, волны с $\Delta k \approx k$.

Как известно, для t –волн в изотропной плазме $v_ф > c$, поэтому возможно лишь затухание из-за соударений (в.ч. нагрев [3]), которое оценивается формулой

$$\gamma \approx \nu_e \left(\frac{\omega_{oe}^2}{\omega}\right) = \nu_e \frac{\omega_{oe}^2}{\omega_{oe}^2 + k^2 c^2}, \tag{7}$$

т.е. в $\left(\frac{\omega_{oe}}{\omega}\right)^2$ раз меньше, чем затухание ленгмюровских волн. В указанных выше двух предельных случаях (3) и (4) имеем из (7) соответственно

$$\text{I}. \quad \gamma \cong \nu_e \left(\frac{\omega_{oe}}{kc}\right)^2$$

и, следовательно, затухание может быть сколь угодно малым;

$$\text{II}. \quad \gamma \cong \nu_e ,$$

т.е. в случае малых k ($k < \frac{\omega_{oe}}{c}$) затухание, как и для ленгмюровских колебаний, имеет тот же порядок, что и ν_e.

Малость затухания волн в случае (3) позволяет, в принципе, исследовать взаимодействие достаточно широких пакетов волн, в отличие от противоположного предельного случая (4), где для получения количественных результатов необходимо рассматривать взаимодействие бесконечно узких пакетов волн.

Уравнения Максвелла с учетом нелинейных токов второго и третьего порядка имеют вид:

$$(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \epsilon_{ij}(k,\omega)) E_{kj} = 4\pi i (j_i^{(2)} + j_i^{(3)}), \tag{8}$$

где

$$j_i^{(2)}(k) = \int S_{ij\ell}(k, k_1, k_2) E_{k_1 j} E_{k_2 \ell} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \tag{9}$$

$$j_i^{(3)}(k) = \int \Sigma_{ij\ell s}(k,k_1,k_2,k_3) E_{k_1 j} E_{k_2 \ell} E_{k_3 s} \delta(k-k_1-k_2-k_3) dk_1 dk_2 dk_3 . \tag{10}$$

Выражения для нелинейных поляризуемостей $S_{ij\ell}$ и $\Sigma_{ij\ell s}$ легко могут быть получены из выражений, найденных в /1/. Это связано с тем, что мы ограничиваемся рассмотрением "рассеяния" лишь через продольную виртуальную волну. В этом случае возникает свертка S_1 и S_2 с продольными ортами $\frac{k_{-i}}{|\vec{k}_-|}$. Отсюда следует, что можно воспользоваться решениями для $V_k^{(2)}$, полученными в /1/, и следует лишь уточнить выражения для токов через $V_k^{(2)}$. В результате получим:

$$\frac{k_{-i}}{|\vec{k}_-|} S_{ij\ell}(k_-,k_1,-k_2) = -i \frac{|\vec{k}_-| n_0 e^3 \; 1{,}71 \, \nu_e}{m_e^2 \omega_1 \omega_2 \Omega \Omega_e} \delta_{j\ell} \tag{11}$$

$$\frac{k_{-\ell}}{|\vec{k}_-|} S_{ij\ell}(k_1,k_2,k_-) = i \frac{e^3 n_0 |\vec{k}_-|}{m_e^2 \omega_1 \kappa \omega_3 \omega_-} \delta_{ij} \tag{12}$$

(относительно всех обозначений см /1/).

При вычислении $\Sigma_{ij\ell s}$ возникает опять-таки продольная компонента $V_k^{(2)}$. Окончательно получим

$$\frac{1}{2}\left(\epsilon(k_1,k_2,k_1,-k_2) + \Sigma(k_1,k_2,-k_2,k_1)\right) = \frac{n_0 e^4 k_-^2 \; 1{,}71 \, \nu_e}{\omega_- m_e^2 \omega_1^2 \omega_2 \Omega \Omega_e} \delta_{ij} \delta_{es}, \tag{13}$$

Свертывая (11), (12) и (13) с поперечными ортами и усредняя по поляризациям, получим, что взаимодействие (tt) волн отличается от

$(\ell\ell)$ волн заменой $\left(\frac{\vec{k},\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2$ на $\frac{1}{2}\left(1+\frac{(\vec{k}\vec{k}_1)^2}{k^2 k_1^2}\right)$. Введем определение

$$\langle E_{k'p} E_{kj} \rangle = \left\{ \frac{k_p k_j}{k^2} |E^{\ell}_k|^2 + \frac{1}{2}\left(\delta_{pj} - \frac{k_p k_j}{k^2}\right) |E^t_k|^2 \right\} \delta(k+k'), \tag{14}$$

где $\langle\ \rangle$ означает усреднение по статистическому ансамблю. Умножим (8) на $E_{k'p}$, проектируя его на направление, перпендикулярное $\vec{k}$ и усредняя по статистическому ансамблю, используя (14). Получим окончательно, учитывая, что распады t -волн запрещены законами сохранения,

$$(k^2 - \omega^2 \epsilon^t(k)) |E^t_k|^2 = -4\pi i\omega |E^t_k|^2 \int R^{tt}(k,k_1) |E^t_{k_1}|^2 dk_1, \tag{15}$$

где

$$R^{tt}(k,k_1) = 2\Big[\sum_{i\ell ms}(k,k_1,k,-k_1) \frac{4\pi i}{\omega_- \epsilon(k_-)} S_{rms}(k_-,k,-k_1) S_{i\ell p}(k,k_1,k_-) \frac{k_r k_p}{k^2}\Big] \cdot$$

$$\cdot \left(\delta_{i\ell} - \frac{k_i k_\ell}{k^2}\right)\left(\delta_{ms} - \frac{k_{1m} k_{1s}}{k_1^2}\right). \tag{16}$$

В силу предположения о слабой нелинейности получим следующее дисперсионное уравнение, описывающее эффекты нелинейного взаимодействия поперечных волн.

$$\delta\omega + i\gamma = i\int \left(1+\left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2\right) \frac{1{,}71\,\nu_e k_-^2 e^2}{\omega_{oe}\omega_-^t \Omega\Omega_e m_e^2} \left(1-\frac{\epsilon_e(k_-)}{\epsilon(k_-)}\right) |E^t_{k_1}|\, dk_1 . \qquad (17)$$

Действительная и мнимая части $\delta\omega$ определяют дисперсионные свойства и интенсивность спектральной перекачки t -волн. (Полученные выражения справедливы при $\omega_- \ll \vec{k}_- \vec{v}_{Te}$). Разобьем область изменения ω_- на две области:

$$1)\ \omega_- \ll k_- v_{Ti} \quad \text{и} \quad 2)\ \omega_- \gg k_- v_{Ti} ,$$

каждую из которых для удобства разобьем еще на две:

$$а)\ \omega_- \ll \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e} , \qquad б)\ \omega_- \gg \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e} .$$

Исследуем здесь лишь одну из указанных областей, представляющую наибольший интерес, а именно:

$$\frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e} \ll \omega_- \ll k_- v_{Te} ,\quad k_- v_{Ti} . \qquad (18)$$

Для действительной части уравнения (17) получим

$$\delta\omega_{\vec{k}} = \omega_{oe} \int \frac{3{,}84\,|E^t_{\vec{k}_1}|^2}{4\pi n_0 T_e} \left(1+\left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2\right) \frac{k_-^2 v_{Te}^2\, d\vec{k}_1}{\omega_-^2 (2{,}14 + Ti/Te)} . \qquad (19)$$

Мнимая часть (17) будет в $\frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e \omega_-} \ll 1$ раз меньше (19).

Если спектр шумов сосредоточен в области около $k_1 \approx k_{10}$ и $k \gg k_{10}$, то в предположении $\delta\omega_{\vec k} \gg \delta\omega_{\vec k_1}$ при $T_e \approx T_i$ инкремент нелинейной неустойчивости имеет порядок

$$\gamma \approx \omega_{oe} \left(\frac{k\, v_{Te}}{\omega_{oe}}\right)^{2/3} \left(\frac{W^t}{n_0 T_e}\right)^{1/3}. \qquad (20)$$

Условие (18) справедливо при

$$\frac{k\, v_{Ti}}{\omega_{oe}} \frac{v_{Ti}^2}{v_{Te}^2} \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{\nu_e^3}{k^2 v_{Te}^2 \omega_{oe}}. \qquad (21)$$

Оценка инкремента (20) справедлива при выполнении условия (4). Если же мы находимся в условиях области (3), то $\omega_-^{л} \approx \Delta k\, c$ и, так как $\delta\omega_k > \omega_-^{л}$, из (18), получим:

$$\frac{\Delta k}{k} \ll \frac{v_{Te}}{c},$$

т.е. эстафетная перекачка происходит в бесконечно близкие значения волновых векторов.

В этом случае мы можем написать

$$\delta\omega_{\vec k_1} \approx \delta\omega_{\vec k} + \frac{d\delta\omega_{\vec k}}{dk} \Delta \vec k .$$

Используя последнее выражение и заменяя k_- на $\Delta \vec k$, получим вместо (19) следующее дифференциальное уравнение:

$$\delta\omega_{\vec k} \left(\frac{d\delta\omega_{\vec k}}{dk}\right)^2 \approx \omega_{oe} \frac{W}{n_0 T_e} v_{Te}^2 .$$

Получающийся отсюда инкремент нелинейной неустойчивости в точности равен инкременту, определяемому (20):

$$\gamma \approx \omega_{oe} \left(\frac{k v_{Te}}{\omega_{oe}} \right)^{2/3} \left(\frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/3}.$$

Итак, мы видим, что результаты, полученные в /1/, легко переносятся на случай рассеяния (tt) волн. Аналогичным образом это относится к и результатам, полученным в /2,3/. Наконец, заметим, что мы ограничились рассмотрением взаимодействия (tt) волн, но нетрудно получить оценки и для процессов с участием (t) и (ℓ) волн.

Литература

1. В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович. ЖЭТФ 53, №5, 1967.
2. В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович. Препринт ОИЯИ Р9-3373-2, Дубна,1967.
3. В.Г.Маханьков, Б.Г.Щинов. Препринт ОИЯИ Р9-3689, Дубна, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 августа 1968 года.