ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 3979

В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович, Б.Г.Щинов

НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В ОБЛАСТИ ЧАСТЫХ КУЛОНОВСКИХ СОУДАРЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1968

Р9 - 3979

В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович, Б.Г.Щинов

НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В ОБЛАСТИ ЧАСТЫХ КУЛОНОВСКИХ СОУДАРЕНИЙ

Направлено в ЖТФ

1. В работе [1] были найдены общие формулы для нелинейных токов плазмы в области частых соударений

$$|\omega_- - k_- v_{T\alpha}| \ll \nu_e \ , \nu_i \ll |\omega_{1,2} - k_{1,2} \ v_{T\alpha}| \ , \qquad (1)$$

где $k_1, k_2, \omega_1, \omega_2$ – волновые векторы и частоты взаимодействующих волн, а $\omega_- = \omega_1 - \omega_2$, $\vec{k}_- = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, ν_e – частота электрон-электронных и электрон-ионных соударений, и, наконец, $\nu_i = \nu_e (\frac{m_e}{m_i})^{\frac{1}{2}} (\frac{T_e}{T_i})^{\frac{3}{2}}$ – частота ион-ионных соударений. Там же были исследованы нелинейные взаимодействия ленгмюровских волн в области $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$. Именно эта область обычно представляет интерес в бессоударительном случае, так как из законов сохранения следует, что эффективное нелинейное рассеяние на ионах возможно лишь в этой области. В [1] было выявлено, что эффективность нелинейных взаимодействий при учёте влияния кулоновских соударений может возрастать. Вместе с тем условие $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$ при наличии соударений частиц не является определяющим для эффективности нелинейного взаимодействия. Это связано с тем, что в условиях частых соударений нелинейные взаимодействия не могут быть интерпретированы просто как индуцированное рассеяние на частицах и не подчиняются закону сохранения $\omega_- = \vec{k}_- \vec{v}$. Кроме того, нелинейные взаимодействия изменяют дисперсию волн и увеличивают ω_-, что может приводить к возникновению гидродинамических нелинейных неустойчивостей.

Настоящая работа посвящена подробному исследованию случая $\omega_- \gg k_- v_{Ti}$, т.е. случая, когда в бессоударительном режиме нелинейные взаимодействия ослаблены, и рассеяние происходит только на электронах. При этом возникает значительный эффект компенсации. Любопытно отметить, что хотя интерпретация нелинейных взаимодействий как рассеяния в нашем случае неправомерна, тем не менее компенсация имеет место и при частых столкновениях. Здесь также возникают эффекты, пропорциональные диссипативным процессам из-за кулоновских соударений. Эти диссипативные процессы могут быть связаны как с электронами (электронная теплопроводность, вязкость и др), так и с ионами (ионная вязкость, трение и др.). В бессоударительном случае такая диссипация соответствовала затуханию Ландау для разностной волны ω_- В данном случае по характеру диссипации мы будем так же подразделять нелинейные взаимодействия на электронные и ионные. Условность этого подразделения видна хотя бы из того, что в электронные члены входят квадраты модулей ионных частей. Кстати, аналогичная ситуация имела место и в бессоударительном случае и интерпретировалась как влияние поляризации ионов на нелинейное рассеяние на электронах при [2] $v_{\phi} > v_{Te}\sqrt{m_i/m_e}$.

2. Нелинейная поправка к частоте ленгмюровских колебаний определяется формулой:

$$\omega - \omega_k^l = \delta\omega_k + i\gamma_k = \int \Sigma(k, k_1)\,|E_{\vec{k}_1}|^2\, d\vec{k}_1\,, \tag{2}$$

где ω_k^l – линейный спектр, $\delta\omega_k$ – действительная поправка к частоте, связанная с нелинейным взаимодействием, γ_k – инкремент спектральной перекачки, $|E_{\vec{k}}|^2$ – квадрат амплитуды поля ленгмюровских колебаний. Заметим, что это уравнение было получено для стационарной турбулентности ленгмюровских волн [1]. В этом случае $|E_{k_1}|^2$ описывает спектр стационарных турбулентных пульсаций. Однако уравнение (2) может быть получено для очень узкого (в пределе δ – образного) спектра интенсивных ленгмюровских волн и описывает эффекты нелинейной неустойчивости слабых ленгмюровских волн, локализованных в других областях спектра [3]. В этом случае в (2) следует положить $|E_{k_1}|^2 =$
$= |E_{k_{10}}|^2\,\delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_{10})$,

где $|E|^2/4\pi$ – энергия интенсивной ленгмюровской волны. Конкретные выражения для Σ были получены в работе /1/:

$$\Sigma(k,k_1) = -i\left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2 \frac{1{,}71\,\nu_e|\vec{k}_-|^2 e^2}{\omega_{0e}\omega_-\, m_e^2\,\Omega\,\Omega_e}\left(1-\frac{\epsilon_e(k_-)}{\epsilon(k_-)}\right), \tag{3}$$

где

$$\epsilon(k_-) = 1+\epsilon_e(k_-)+\epsilon_i(k_-) \tag{4}$$

$$\epsilon(k_-) = 1 + i\,\frac{\omega_{0e}^2}{\kappa\,\omega_-\,\omega_e} + i\,\frac{\omega_{0i}^2}{\kappa\,\omega_-\,\omega_i} \tag{5}$$

$$\Omega = 0{,}51\,\nu_e + i\,\frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_-}\left(1-2{,}96\,i\,\frac{\omega_-}{\Omega_e}\right) \tag{6}$$

$$\Omega_e = -\frac{3}{2}\,i\,\omega_- + 3{,}16\,\frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e} \tag{7}$$

$$\Omega_i = -\frac{3}{2}\,i\,\omega_- + 3{,}9\,\frac{k_-^2\, v_{Ti}^2}{\nu_i} \tag{8}$$

$$\kappa = 1 + \left(0{,}51\,\nu_e + 1{,}22\,\frac{k_-^2\, v_{Te}^2}{\Omega_e}\right)\left(\frac{1}{\omega_e} + \frac{m_e}{m_i}\,\frac{1}{\omega_i}\right) \tag{9}$$

$$\omega_e = i\,\frac{k_-^2\, v_{Te}^2}{\omega_-}\left(1-1{,}71\,\frac{\omega_-}{\Omega_e}\right) \tag{10}$$

$$\omega_i = -i\,\omega_- + i\,\frac{k_-^2\, v_{Ti}^2}{\omega_-}\left(1-\frac{i\omega_-}{\Omega_i}-1{,}28\,\frac{i\omega_-}{\nu_i}+0{,}71\,i\,\frac{T_e}{T_i}\,\frac{\omega_-}{\Omega_e}\right) \tag{11}$$

---

x/ Следует заметить, что выражения (3)–(11) справедливы в пределе $\omega_- \gg \frac{m_e}{m_i}\nu_e$.

Область применимости выписанных выражений ограничена неравенством $\omega_- < k_- v_{Te}$. Приводимые ниже результаты справедливы при $\omega_- > k\, v_{Ti}$ в двух предельных случаях 1) $\omega_- \ll \dfrac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$ и 2) $\omega_- \gg \dfrac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$.

3. Рассмотим нелинейные взаимодействия в области $\omega_- \ll k_-^2 v_{Te}^2/\nu_e$. При этом, используя соотношения (3) - (11), получим

$$\Sigma(\vec{k},\vec{k}_1) = \left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2 \frac{0{,}54\,\nu_e\, e^2}{\omega_{0e}\omega_-\, m_e^2\, v_{Te}^2}\Big\{-\frac{\nu_e\,\omega_-}{k_-^2 v_{Te}^2}\Bigg(\frac{\dfrac{m_e}{m_i}}{\dfrac{m_e}{m_i}-\dfrac{\omega_-^2}{k_-^2 v_{Te}^2}}\Bigg). \tag{12}$$

$$\cdot\Big(1+1{,}93\,i\,\frac{\omega_-\nu_e}{k^2 v_{Te}^2}+\frac{\dfrac{\omega_-^2}{k^2 v_{Te}^2}\,i}{\dfrac{m_e}{m_i}-\dfrac{\omega_-^2}{k^2 v_{Te}^2}}\Big[0{,}54\frac{\omega_-\nu_e}{k^2 v_{Te}^2}+\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\nu_i\,\omega_-}\Big(1{,}28-0{,}22\frac{T_e}{T_i}\,\frac{\nu_i\,\nu_e}{k^2 v_{Te}^2}\Big)\Big]\Big\}.$$

В случае изотермической плазмы (точнее $(T_e/T_i)\gtrsim 1$) выражение (12) легко можно упростить, используя неравенство $(\omega_-^2/k_-^2 v_{Te}^2) \gg m_e/m_i$, поэтому

$$\Sigma(\vec{k},\vec{k}_1) = 0{,}54\left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2 \frac{e^2\nu_e}{\omega_{0e}\omega_-\, m_e^2\, v_{Te}^2}\,\frac{m_e}{m_i}\,\frac{\nu_e}{\omega_-}\Big(1+1{,}39\,i\,\frac{\omega_-\nu_e}{k_-^2 v_{Te}^2}-i\,1{,}28\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i\,\omega_-}\Big).$$

Рассмотрим случай, когда вклад ионных диссипативных членов в нелинейное взаимодействие при $\omega_- \ll \dfrac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$ пренебрежимо мал. Тогда нелинейное взаимодействие целиком определяется электронными членами. При этом инкремент "кинетической" неустойчивости есть

$$\gamma_k = \mathrm{Jm}\int \Sigma(k,k_1)\,|E_{k_1}|^2\, dk_1 = 0{,}75\,\omega_{0e}\frac{\nu_e^2}{\omega_-^2}\,\frac{m_e}{m_i}\int\left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2\frac{\omega_-\nu_e}{k_-^2 v_{Te}^2}\,W_{\vec{k}_1}\,d\vec{k}_1 \tag{14}$$

$$W_{\vec{k}_1} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{|E_{k_1}|^2}{n_0 T_e}.$$

Нужно отметить важный эффект, состоящий в том, что направление спектральной перекачки, определяемой соотношением (14), противоположно направлению бессоударительной спектральной перекачки. Изменение направления спектральной перекачки при наличии частых соударений для виртуальной волны было обнаружено в /1/. Однако нелинейная неустойчивость, обнаруженная в /1/, носила гидродинамический характер. Здесь же (14) описывает кинетическую неустойчивость. В /1/ было показано, что в области $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$ кинетическая неустойчивость обычно задавлена линейным затуханием. Покажем, что в рассмотренной здесь области $\omega_- \gg k_- v_{Ti}$ кинетическая нелинейная неустойчивость может намного превосходить линейное затухание даже в области, когда нелинейным изменением дисперсии можно пренебречь. Инкремент (14) по порядку величины может быть оценен, как $(W = \int W_{\vec{k}}\, d\vec{k})$

$$\gamma \approx \omega_{0e} \frac{\nu_e^2}{\omega_-^2} \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_- \nu_e}{k_-^2 v_{Te}^2} W. \tag{15}$$

Оценим ширину области, в которой спектральная перекачка определяется инкрементом (14). Из условия $\omega_- < \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$ и $\omega_- > k_- v_{Ti}$ следует, что область изменения ω_- существует, если

$$\frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e} \gg k_- v_{Ti} \tag{16}$$

или (или $k_- \approx k$)

$$N_D < \frac{v_ф}{v_{Te}} \ll N_D \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} . \tag{16a}$$

Из последнего соотношения следует, что область изменения ω_- существует даже для изотермической водородной плазмы.

Подчеркнем, что в случае, когда ω_- определяется линейной дисперсией, связанной с тепловым движением, область возможных значений $v_ф$ сокращается и определяется неравенством

$$N_D < \frac{v_ф}{v_{Te}} < \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \tag{17}$$

или

$$N_D \ll \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Отметим, кроме того, что в этом случае действительная часть уравнения (2) определяет несущественные действительные поправки к частоте.

В случае, когда мы пренебрегаем нелинейным изменением дисперсии, оценка нелинейного инкремента (15) имеет вид

$$\gamma \approx \nu_e \left(\frac{v_ф}{v_{Te}}\right)^4 \frac{1}{N_D^2} \frac{m_e}{m_i} W . \tag{19}$$

Этот инкремент превосходит частоту соударений ν_e при

$$\frac{v_ф}{v_{Te}} > N_D^{1/2}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} W^{-1/4}. \tag{20}$$

Сопоставляя это с (17), мы получаем

$$W > N_D^2 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2 . \tag{21}$$

Из $W \ll 1$ получаем, что

$$N_D < \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} \frac{T_e}{T_i} . \tag{22}$$

Заметим теперь, что нелинейная электронная перекачка превалирует над ионной, если

$$1 > \frac{\omega_-^2 \nu_e^2}{k_-^4 \; v_{Te}^4} > \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \tag{23}$$

или для слабого нелинейного изменения дисперсии

$$N_D < \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/4} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} . \tag{24}$$

Наиболее жесткое из условий (18), (22), (24) определяет область параметров, для которых происходит изменение направления перекачки.

Заметим, что изменение направления рассмотренной спектральной перекачки целиком связано с эффектами компенсации и поэтому отсутствует (для линейной дисперсии) в области $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$. Отметим также, что изменение направления перекачки происходит только при достаточно сильной интенсивности W, удовлетворяющей условию (21), и в достаточно плотной плазме.

Рассмотрим случай, когда интенсивность ленгмюровских пульсаций настолько велика, что ω_- определяется нелинейными эффектами. Представляет интерес исследовать действительную часть уравнения (2) с учётом (13).

$$\delta\omega_k + i\nu_e = \mathrm{Re}\int\Sigma\,|E_{\vec k_1}|^2\, d\vec k_1 = 0{,}54\,\omega_{0e}\frac{m_e}{m_i}\int\left(\frac{\vec k\,\vec k_1}{k k_1}\right)^2\frac{\nu_e^2}{\omega_-^2}\left(1+1{,}38\,i\,\frac{\omega_-\nu_e}{k_-^2 v_{Te}^2}\right)W_{\vec k_1}\,d\vec k_1 \quad (25)$$

Полученное уравнение аналогично рассмотренному в [1] и имеет комплексные решения, причем $\mathrm{Re}\,\delta\omega \approx \mathrm{Im}\,\delta\omega$. Неустойчивость, связанную с такого рода решениями, будем называть "гидродинамической" в отличие от (14).

Рассмотрим более подробно случай, когда интенсивная волна представляет собой весьма узкий пакет ленгмюровских волн[x]. В этом случае

$$\delta\omega_{\vec k} + i\nu_e = \left[\,0{,}54\,\frac{\omega_{0e}\dfrac{m_e}{m_i}}{(\delta\omega_{\vec k} + \omega^\ell_{\vec k} - \omega_{\vec k_0})^2}\right]\left(\frac{\vec k\,\vec k_0}{k k_0}\right)^2\nu_e^2\, W_{\vec k_0} + \quad (26)$$

$$+\, i\,0{,}75\,\omega_{0e}\,\frac{\nu_e}{(\delta\omega_{\vec k} + \omega^\ell_{\vec k} - \omega_{\vec k_0})}\,\frac{m_e}{m_i}\,\frac{\nu_e^2}{(\vec k - \vec k_0)^2\, v_{Te}^2}\,W_{\vec k_0}\left(\frac{\vec k\,\vec k_0}{k k_0}\right)^2 .$$

Учитывая, что второй член в правой части уравнения (26) меньше первого, будем решать (26) методом последовательных приближений.

Пусть $\delta\omega_k \gtrsim \omega^\ell_k - \omega_{k_0}$ и $\delta\omega_k \ll \nu_e$, тогда возникает нелинейная диссипативная неустойчивость слабых ленгмюровских волн в поле интенсивных, при этом

---

[x] Как было отмечено выше, уравнение (25) справедливо и для не случайных волн, поэтому ширина интенсивного пакета может быть сколь угодно малой.

$$\gamma_\nu = \frac{\omega_{0e}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\nu_e}{\omega_{0e}}\, 0{,}54\, \frac{m_e}{m_i}\, W_{\vec{k}_0} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}_0}{k k_0}\right)^2\right)^{1/2} . \qquad (27)$$

В том случае, когда $\delta\omega \gg \nu_e$ ищем решение в виде $\delta\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}_0} - \omega^{\ell}_{\vec{k}} + \kappa$ (где $\kappa \ll |\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{\ell}_{\vec{k}}|$), получаем

$$\kappa^2 = \frac{1}{\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{\ell}_{\vec{k}}}\, 0{,}54\, \omega_{0e} \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}_0}{k k_0}\right)^2 \nu_e^2\, W_{\vec{k}_0} . \qquad (28)$$

Отсюда видно, что если $\omega^{\ell}_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_0} > 0$, то имеет место нелинейная гидродинамическая неустойчивость с инкрементом

$$\gamma = \left(\frac{\omega_{0e}}{\omega^{\ell}_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_0}}\, 0{,}54\, \nu_e^2\, \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}_0}{k k_0}\right)^2 W_{\vec{k}_0}\right)^{1/2} . \qquad (29)$$

В противоположном случае $\omega^{\ell}_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_0} < 0$ уравнение (28) определяет нелинейную поправку к частоте того же порядка, что и γ в (29). Решая (26) по методу возмущений, получим:

$$\mathrm{Im}\,\kappa = 0{,}37\, \frac{\nu_e^3}{(\vec{k} - \vec{k}_0)^2\, v_{Te}^2} \left(\frac{\omega_{0e}}{\omega'_{k_0} - \omega^{\ell}_{\vec{k}}}\right) \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}_0}{k k_0}\right)^2 W_{\vec{k}_0} \pm$$
$$\pm \frac{i}{2}\, \frac{\nu_e^2}{\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{\ell}_{\vec{k}}} \left[0{,}54\, \frac{\omega_{0e}}{\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{\ell}_{\vec{k}}}\, \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{k k_0}{k k_0}\right)^2 W_{\vec{k}_0}\right]^{1/2} . \qquad (30)$$

Отсюда следует, что слабый пакет с $\omega^{\ell}_{\vec{k}} < \omega_{\vec{k}_0}$ также неустойчив, но инкремент этой неустойчивости в $\frac{\omega_- \nu_e}{k_-^2 v_{Te}^2}$ или $\frac{\nu_e}{\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{\ell}_{\vec{k}}}$ раз меньше инкремента неустойчивости слабого пакета с $\omega^{\ell}_{\vec{k}} > \omega_{\vec{k}_0}$ (см. (29)).

Таким образом, в случае гидродинамической нелинейной неустойчивости $\delta\omega_{\vec{k}} \gg \nu_e$ интенсивный узкий пакет неизотропно расплывается с преимущественным направлением в сторону больших волновых чисел, при этом развитие неустойчивости происходит и в области частых соударений. Однако инкремент такой неустойчивости меньше частоты соударений ν_e.

4. Рассмотрим нелинейное взаимодействие в пределе

$$\omega_- \gg \frac{k_-^2 \; v_{Te}^2}{\nu_e} . \tag{31}$$

После несложных, но довольно громоздких выкладок можно получить

$$\Sigma(\vec{k},\vec{k}_1) = \left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k\,k_1}\right)^2 2{,}24 \frac{k_-^2 e^2}{\omega_-^2 m_e^2 \omega_{0e}} \frac{\frac{m_e}{m_i}}{\frac{m_e}{m_i} - 0{,}47 \frac{\omega_-^2}{k_-^2 v_{Te}^2}\left(1 + 0{,}48 \frac{T_e}{T_i} \frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-^2}\right)} \left(\left\{1 - 7{,}9 \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_- \nu_e} + \right.\right. \tag{32}$$

$$\left.\left. + i \frac{0{,}47 \frac{\omega_-^2}{k_-^2 v_{Te}^2}}{\frac{m_e}{m_i} - 0{,}47 \frac{\omega_-^2}{k_-^2 v_{Te}^2}\left(1 + 0{,}48 \frac{T_e}{T_i} \frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-^2}\right)} \left[1{,}28 \frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_- \nu_i} + 1{,}01 \frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-^2} \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_- \nu_e} \frac{T_e}{T_i} - 1{,}12 \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e \omega_-}\right]\right\}.$$

Из неравенства (31) следует, что выражение (21) (при $k_- \approx k$), имеет место только в том случае, когда интенсивность ленгмюровских волн достаточно велика, чтобы ω_- определялась нелинейным взаимодействием.

Действительно, в противном случае $\hat{\omega}_- \approx \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_{0e}}$, или $\frac{\omega_-}{k_-^2 v_{Te}^2} \approx \frac{1}{\omega_{0e}}$, что несовместимо с $\omega_- \gg \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$ при $k_- \approx k$. Из выражения (2) с учётом (32) легко может быть оценена минимальная интенсивность ленгмюровских колебаний, при которой может быть выполнено неравенство (31)

$$W \gtrsim \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{v_{Te}}{v_ф} \right)^8 .$$

Для простоты исследуем наиболее интересный случай $\omega_-^2 \gg k_-^2 v_{Te}^2 \frac{m_e}{m_i}$. При этом формула (32) значительно упрощается

$$\Sigma(\vec{k}, \vec{k}_1) = -\frac{4{,}8\,(\vec{k}\,\vec{k}_1)^2\, k_-^2 e^2 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)}{k^2\, k_1^2\, \omega_-^2\, m_e^2\, \omega_{0e}} \; \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_-^2} \left\{ 1 - 6{,}78\, i\, \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_- \nu_e} \right\} . \qquad (33)$$

Уравнение, описывающее нелинейные неустойчивости, имеет в этом случае вид

$$\delta\omega_{\vec{k}} + i\nu_e = \frac{-4{,}8\, \omega_{0e} \frac{m_e}{m_i} v_{Te}^4}{(\delta\omega_{\vec{k}} + \omega^{\ell}_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_0})^4} \left(\frac{\vec{k}\,\vec{k}_0}{k\,k_0} \right)^2 (\vec{k} - \vec{k}_0)^4\, W_{\vec{k}_0} \cdot \qquad (34)$$

$$\cdot \left(1 - 6{,}78\, i\, \frac{(\vec{k} - \vec{k}_0)^2 v_{Te}^2}{(\delta\omega_{\vec{k}} + \omega^{\ell}_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_0})\, \nu_e} \right) .$$

При этом предполагается, что интенсивная волна представляет собой весьма узкий пакет (аналогично п.3). Если $\nu_e \gg \delta\omega_{\vec{k}} > \omega^{\ell}_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}}$, то инкремент нелинейной диссипативной неустойчивости равен

$$\gamma_\nu = 0{,}92 \left(\frac{\vec{k}\,\vec{k}_0}{k\,k_0} \right)^{1/2} \left(\frac{(\vec{k} - \vec{k}_0)^4\, v_{Te}^4}{\nu_e} \; \frac{m_e}{m_i} W_{\vec{k}_0}\, \omega_{0e} \right)^{1/4} . \qquad (35)$$

В случае, когда $\delta\omega \gg \nu_e$, решение имеет вид $\delta\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}_0} - \omega^{l}_{\vec{k}} + \kappa$, где $\kappa \ll |\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{l}_{\vec{k}}|$ и равна

$$\kappa^4 = -\frac{4{,}8\ \omega_{0e}}{\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{l}_{\vec{k}}}\left(\frac{\vec{k}\vec{k}_0}{k k_0}\right)^2 (\vec{k} - \vec{k}_0)^4\, v^4_{Te}\left(\frac{m_e}{m_i}\right) W_{\vec{k}_0} . \tag{36}$$

При $\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{l}_{\vec{k}} > 0$ возникает неустойчивость с инкрементом

$$\gamma = \frac{1{,}49}{\sqrt{2}}\left[\frac{\omega_{0e}}{\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{l}_{\vec{k}}}\left(\frac{\vec{k}\vec{k}_0}{k k_0}\right)^2 (\vec{k} - \vec{k}_0)^4\, v^4_{Te}\frac{m_e}{m_i} W_{\vec{k}_0}\right]^{1/4} . \tag{37}$$

Если же $\omega^{l}_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_0} > 0$, то инкремент неустойчивости в $\sqrt{2}$ раз больше инкремента, определяемого выражением (37). Заметим, что в данном случае кинетический инкремент в $\frac{k_-^2 v^2_{Te}}{\omega_- \nu_e}$ или $\frac{\nu_e}{\omega_{\vec{k}_0} - \omega^{l}_{\vec{k}}}$ раз меньше гидродинамического независимо от знака разности.

5. До сих пор везде предполагалось, что $\omega_- > k_- v_{Ti}$. Рассмотрим теперь случай, когда $\omega_- \approx k_- v_{Ti}$.

При этом $\mathrm{Re}\,\epsilon(k_-) \approx 0$, но $\mathrm{Im}\,\epsilon(k_-) \neq 0$ (см. /1/)). После несложных выкладок получим

$$\Sigma(\vec{k},\vec{k}_1) = \frac{0{,}54\, e^2 \nu_e^2}{\omega_{0e}\, m_e^2 k_-^2 v^2_{Te}}\left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2 \frac{\frac{m_e}{m_i}}{\frac{m_e}{m_i} - \frac{\omega_-^2}{k_-^2 v^2_{Te}}\left(1 - \frac{k_-^2 v^2_{Ti}}{\omega_-^2}\,\frac{5}{3}\right)\cdot B}$$

---

x/ Учитывая, что в формуле (7) мы пренебрегли величиной $\frac{m_e}{m_i}\nu_e$ в сравнении с $(k_-^2 v^2_{Te}/\nu_e)$, мы можем получить следующее соотношение (используя (31)): $\omega_- > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\,\nu_e$, при выполнении которого справедливы формулы (34)-(37).

$$B=\left\{1+0{,}54\,i\frac{\omega_-\nu_e}{k_-^2 v_{Te}^2}+\frac{\frac{5}{3}\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-^2}}{1-\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-^2}\cdot\frac{5}{3}}\left[-1{,}73\,i\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i\,\omega_-}-1{,}28\,i\frac{\omega_-}{\nu_i}+i\frac{T_e}{T_i}0{,}22\,\frac{\nu_e\,\omega_-}{k_-^2 v_{Te}^2}\right]\right\}, \tag{39}$$

в первом пределе при $\omega_- \ll \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$, и

$$\Sigma(\vec{k},\vec{k}_1)=\frac{4{,}74}{2{,}14}\frac{e^2 k_-^2}{\omega_{0e} m_e^2 \omega_-^2}\left(\frac{\vec{k}\vec{k}_1}{k k_1}\right)^2\frac{\frac{m_e}{m_i}}{\left(\frac{m_e}{m_i}-\frac{\omega_-^2}{2{,}14\,k_-^2 v_{Te}^2}\right)\left[1-\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-^2}\left(\frac{5}{3}-0{,}48\frac{T_e}{T_i}\right)\right]B_1} \tag{40}$$

$$B_1=\left\{1+1{,}12\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-\nu_e}+\frac{\left(\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-^2}\right)\left(\frac{5}{3}-0{,}48\frac{T_e}{T_i}\right)}{1-\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-^2}\left(\frac{5}{3}-0{,}48\frac{T_e}{T_i}\right)}\left[-1{,}73\,i\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i\,\omega_-}-1{,}28\,i\frac{\omega_-}{\nu_i}+i\frac{T_e}{T_i}1{,}01\,\frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e\,\omega_-}\right]\right\}$$

во втором пределе при $\omega_- \gg \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$.

Приравнивая действительную часть ϵ нулю /3/, имеет в первом случае

$$\omega_- = k_- v_{Ti}\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{T_e}{T_i}} \tag{41}$$

и

$$\omega_- = k_- v_{Ti}\sqrt{\frac{10}{3}} \tag{42}$$

во втором случае.

Выражение (41) для ω_- – необходимо подставить в $\mathrm{Im}\,\Sigma$, из которой получим порядок инкремента возникающей нелинейной неустойчивости

$$\gamma \approx \frac{m_e}{m_i}\left(\frac{\nu_e}{\omega_-}\right)^2 \frac{\omega_{0e} W_{\vec{k}_0}}{-\dfrac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i\,\omega_-} + \dfrac{\nu_e\,\omega_-}{k_-^2 v_{Te}^2}\,\dfrac{T_e}{T_i}} \qquad \text{при} \quad \omega_- \ll \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e} . \tag{43}$$

В условиях $\omega_-\nu_e \gg k_-^2 v_{Te}^2$ и ω_-, определяемой из (42) кинетическая неустойчивость рассматриваемого типа не возникает (см., например, /4/). Из (43) видно, что перекачка (в области $\omega_-\nu_e \ll k_-^2 v_{Te}^2$) может идти как в сторону уменьшения частот турбулентных пульсаций, так и в обратном направлении в зависимости от того, какая диссипация больше – ионная или электронная.

6. Проведенный анализ показывает, что в рассмотренной области $\omega_- > k_- v_{Ti}$ направление спектральной перекачки может измениться уже в результате кинетической нелинейной неустойчивости, следовательно, для не очень интенсивных ленгмюровских колебаний[x/]. Заметим, что обнаруженное изменение знака перекачки при кинетической неустойчивости представляет собой новый качественный эффект, возникающий лишь при учёте парных соударений частиц. Этот результат не зависит от характера распределения колебаний по спектру и других тонких моментов, от которых может зависеть гидродинамическая неустойчивость.

Здесь, как и в /1/, мы не учитывали возм[illegible]тной перекачки. Однако полученные результаты позволяют оценить ее эффективность.

Следует отметить, что возникающая в определенных условиях гидродинамическая неустойчивость приводит к расплыванию узкого интенсивного пакета ленгмюровских волн, причём расплывание это не изотропно и имеет тенденцию к перекачке энергии в сторону увеличения волновых чисел.

---

x/ В /1/ было показано, что в области $\omega_- < k_- v_{Ti}$ нелинейные кинетические неустойчивости в условиях частых соударений для виртуальных волн обычно задавлены линейным затуханием.

Как уже отмечалось в [1], обычное деление нелинейных взаимодействий (в области частых соударений для виртуальной волны) на процессы индуцированного рассеяния и распадные, вообще говоря, теряет смысл. Вместе с тем в нелинейных взаимодействиях (в частности, спектральной перекачки) проявляются характерные резонансные эффекты, соответствующие стремлению к нулю знаменателя (точнее $\mathrm{Re}\,\epsilon(k_-) \to 0$) в формуле (3).

В случае достаточно широких стационарных спектров ленгмюровских волн имеет место соотношение (см., например: [3]).

$$\mathrm{Im}\,\Sigma(\vec{k},\vec{k}_1) \approx \mathrm{Im}\frac{1}{\epsilon(k_-)} \approx -i\pi\delta[\,\mathrm{Re}(\epsilon_e(k_-)+\epsilon_i(k_-))\,]\frac{\omega_-}{|\omega_-|}\,. \tag{45}$$

Однако для узких спектров ленгмюровских волн[x], рассмотрением которых мы здесь ограничились (в цепях простоты исследования), можно полагать

$$\mathrm{Im}\frac{1}{\epsilon(k_-)} = -\frac{1}{\mathrm{Im}\,\epsilon(k_-)}\,.$$

Л и т е р а т у р а

1. В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 53, №5 (1967).

2. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме. М. Изд-во "Наука" 1967г.

3. В.Г.Маханьков, В.Н.Цытович, Препринт ОИЯИ Р-9 3978, Дубна 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июля 1968 года.

[x] Следует считать, что ширина спектра ленгмюровских волн меньше ширины резонансной кривой (4.5).