

Д-183

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



P9 - 3875

В.И.Данилов, М.Ианович

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ
РАВНОМЕРНО НАМАГНИЧЕННЫХ
ПО РАДИАЛЬНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ОБЪЕМОВ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

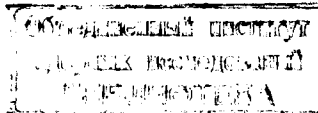
1968

P9 - 3875

В.И.Данилов, М.Ианович

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ
РАВНОМЕРНО НАМАГНИЧЕННЫХ
ПО РАДИАЛЬНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ОБЪЕМОВ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Направлено в "Revue Roumaine de Physique"



7391/3 нр.

В в е д е н и е

В данной работе в первом приближении определены выражения для составляющих магнитного поля от намагниченного по радиальному направлению цилиндрического кольцевого сектора, как одного из общих случаев равномерно намагниченных цилиндрических конфигураций^{х/}. При этом под первым приближением понимаем такое магнитное состояние тела, когда намагниченность внутри объема рассматриваемого образца постоянна по величине и направлению.

Полученные выражения для компонент поля могут быть использованы для расчётов магнитных полей как внутри, так и вне катушек соответствующих форм (эквивалентных по распределению поля радиальным намагниченным цилиндрическим конфигурациям) с током, протекающим по их контуру в бесконечно малом слое.

1. Скалярный потенциал

Выражение скалярного потенциала в пространстве, свободном от токов проводимости, имеет вид^{/2/}

^{х/} В предыдущей работе рассмотрено намагничивание цилиндрического кольцевого сектора по вертикальному направлению^{/1/}.

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') \operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\vec{\rho}|} \right) dV', \quad (1.1)$$

где $|\vec{\rho}| = |\vec{r}' - \vec{r}|$ — вектор-расстояние от точки наблюдения P до элементарного объема dV' (см. рис. 1).

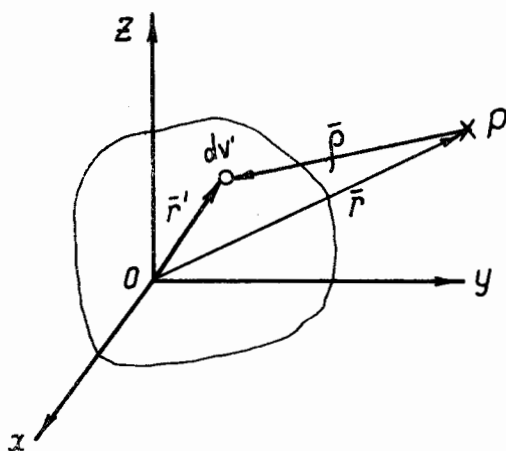


Рис. 1.

\vec{r}' и \vec{r} — векторы-положения элементарного объема и точки наблюдения, а $\vec{M}(\vec{r}')$ — магнитный момент или намагниченность элемента объема dV' .

В цилиндрической системе координат подынтегральное выражение (1.1) можно представить как

$$\vec{M}(\vec{r}') \operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\vec{\rho}|} \right) = (M_r \cos \phi' - M_\phi \sin \phi') \frac{r' \cos \phi' - r \cos \phi}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} +$$

$$+ (M_r \sin \phi' + M_\phi \cos \phi') \frac{r' \sin \phi' - r \sin \phi}{|\vec{r}' - \vec{r}|} + M_z \frac{z' - z}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \quad (1.2)$$

При условии, что $M_\phi = M_z = 0$, выражение потенциала (1.1) с учётом (1.2) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{1r} &= M_r \Psi_{1r} = M_r \int_{v'} [\cos \phi' \frac{r' \cos \phi' - r \cos \phi}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} + \\ &+ \sin \phi' \frac{r' \sin \phi' - r \sin \phi}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}] dv' = \\ &= M_r \int_{v'} \frac{r' - r \cos(\phi' - \phi)}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} dv', \end{aligned} \quad (1.3)$$

где M_r по предположению является постоянной по величине и не зависящей от точки наблюдения.

Учитывая, что

$$\frac{r' - r \cos(\phi' - \phi)}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} = - \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right), \quad (1.4)$$

выражение потенциала Ψ_{1r} для цилиндрического кольцевого сектора (см. рис. 2) можно переписать для дальнейших преобразований в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{1r} &= - \frac{\partial}{\partial r'} \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \int_{\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int_{-h}^h \frac{dz'}{[(z' - z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{3/2}} \dots \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} dr' \int_{\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int_{-h}^h \frac{dz'}{[(z' - z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{3/2}} = \end{aligned}$$

$$= \left[- \left[r' \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int_{-h}^h \frac{dz'}{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{3/2}} \right] \right]_{R_1}^{R_2} + \int_{R_1}^{R_2} dr' \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int_{-h}^h \frac{dz'}{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{3/2}}, \quad (1.5)$$

где $R_1, R_2, 2\phi_0, 2h$ - внутренний и внешний радиусы, угловая протяженность и высота соответственно, r, ϕ, z - координаты точки наблюдения, r', ϕ', z' - координаты переменной точки элементарного объема $dv' = r' dr' d\phi' dz'$.

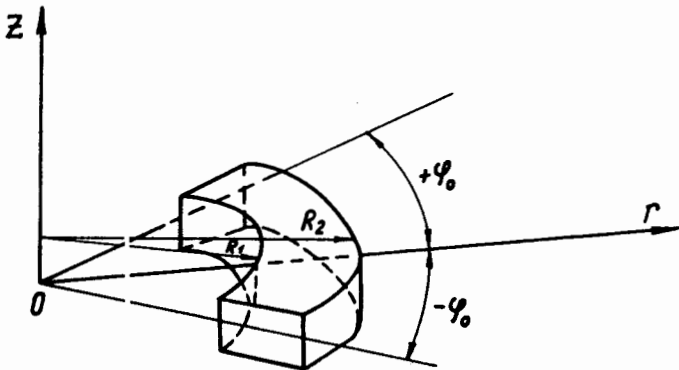


Рис. 2.

В дальнейшем ограничим рассмотрение скалярного потенциала и компонент случаям, когда $z < -h$ и $-\phi_0 < \phi < \phi_0$, представляющим определенный практический интерес.

Определение поля в других точках пространства может быть сделано аналогично описываемому случаю.

В нашем случае

$$\begin{aligned}
\Psi_{1r} = & - \left[r' \left\{ - \int_{\alpha_1}^0 d\alpha \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{A^{1/2}} + \int_0^{\alpha_2} d\alpha \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{A^{1/2}} - \right\} \right] \Big|_{R_1}^{R_2} + \\
& + \int_{R_1}^{R_2} dr' \left\{ - \int_{\alpha_1}^0 d\alpha \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{A^{1/2}} + \int_0^{\alpha_2} d\alpha \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{A^{1/2}} \right\} = \\
= & - \left\{ \left(\left[r' \int_0^{\alpha_1} d\alpha \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{A^{1/2}} \right] \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} dr' \int_0^{\alpha_1} d\alpha \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{A^{1/2}} \right) + \right. \\
& \left. + (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \right\} ,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$\gamma = z' - z, \quad \text{т.е.} \quad \gamma_1 = -h - z; \quad \gamma_2 = h - z \tag{1.7}$$

$$\alpha = \phi' - \phi \quad \text{или} \quad \alpha = \phi - \phi' \quad \text{т.е.} \quad \alpha_1 = \phi_0 + \phi; \quad \alpha_2 = \phi_0 - \phi, \tag{1.8}$$

$$A = \gamma^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha. \tag{1.9}$$

Математический символ $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)$ означает вторую скобку, которая получается из первой при замене в ней α_1 на α_2 .

После интегрирования первого интеграла выражения (1.6) по " γ ", а второго по " r' " имеем:

$$\begin{aligned}
\Psi_{1r} = & - \left\{ \left(\left[r' \int_0^{\alpha_1} \text{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} d\alpha \right] \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} - \int_0^{\alpha_1} d\alpha \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \text{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{1/2}} d\gamma \right) + \right. \\
& \left. + (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \right\} \Big|_{R_1}^{R_2},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$B = r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha; \quad C = \gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha. \tag{1.11}$$

Учитывая соотношения

$$\int \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{\frac{1}{2}}} d\gamma = \gamma \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{\frac{1}{2}}} + (r' - r \cos \alpha) \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{\frac{1}{2}}} -$$

$$- r \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma (r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{\frac{1}{2}}} \quad (1.12)$$

$$\int \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{\frac{1}{2}}} d\alpha = \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{\frac{1}{2}}} - \frac{\gamma \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}}{2r'r} E(k, \beta) +$$

$$(1.13)$$

$$+ \gamma \frac{2r'^2 + 2r^2 + \gamma^2}{2r'r \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} F(k, \beta) - \frac{\gamma (r' - r)^2}{2r'r \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} \Pi(n_3, k, \beta)$$

$$\int \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma (r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{\frac{1}{2}}} d\alpha = - \cos \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma (r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \frac{\gamma \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}}{2r'r} E(k, \beta) + \gamma \frac{4r'^2 - 2r^2 - \gamma^2}{2r'r \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} F(k, \beta) -$$

$$(1.14)$$

$$- \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2}}{r} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta)] -$$

$$- \frac{\gamma (r' - r) (r'^2 + r^2)}{2r'r (r' + r) \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} \Pi(n_3, k, \beta),$$

выражение скалярного потенциала в окончательном виде можно представить так:

$$\begin{aligned}
\Psi_{1r} = & \left\{ \int_0^{\alpha_1} \gamma \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha - \left[\frac{3r'\gamma}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \right]^{\frac{1}{2}} F(k, \beta) + \right. \\
& + \sqrt{\gamma^2 + r^2} \{ Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta) \} + \\
& \left. + \frac{\gamma r'(r'-r)}{(r'+r)\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \Pi(n_3, k, \beta) \right]_{\alpha_0}^{\alpha_1} + (\alpha_1 - \alpha_2) \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right\}_{R_1}^{R_2}
\end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$k^2 = \frac{4r'r}{(r'+r)^2 + \gamma^2}; \quad n_1 = -\frac{2r}{\sqrt{\gamma^2 + r^2} - r}; \quad n_2 = \frac{2r}{\sqrt{\gamma^2 + r^2} + r}; \quad n_3 = -\frac{4r'r}{(r'+r)^2} \quad (1.16)$$

$$\beta = \frac{\alpha - \pi}{2} \quad (1.17)$$

$$Q(n) = \sqrt{(1-n)(1 - \frac{k^2}{n})}, \quad (1.18)$$

а

$$F(k, \beta) = \int \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}; \quad E(k, \beta) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta; \quad \Pi(n, k, \beta) = \int \frac{d\beta}{(1 - n \sin^2 \beta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \quad (1.19)$$

эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода в форме Лежандра, соответственно.

Из свойств скалярного потенциала отметим следующие:

1. Потенциал антисимметричен относительно плоскостей $r = R_2$ и $r = R_1$, которые ограничивают намагничивание тело, т.е.

$$\Psi_{1r}(r, \phi, z) \Big|_{r < R_1} = -\Psi_{1r}(r, \phi, z) \Big|_{r > R_2}. \quad (1.20)$$

2. Потенциал симметричен относительно плоскостей $z = h$ и $z = -h$, либо $\phi = \phi_0$ и $\phi = -\phi_0$, которые ограничивают намагниченное тело, т.е.

$$\begin{aligned} \Psi_{1r}(r, \phi, z) &= \Psi_{1r}(r, \phi, -z) \\ \Psi_{1r}(r, \phi, z) &= \Psi_{1r}(r, -\phi, z). \end{aligned} \quad (1.21)$$

2. Компоненты поля

Выражение для компонент магнитного поля найдем из соотношения

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \text{grad } \Psi_{1r}(r, \phi, z), \quad (2.1)$$

где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. Индекс "(1)" означает первое приближение.

В рассматриваемом случае компоненты поля имеют вид:

$$H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\partial \Psi_{1r}}{\partial z}; \quad H_{r\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\partial \Psi_{1r}}{\partial r} \quad (2.2)$$

$$H_{r\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi_{1r}}{\partial \phi},$$

а в переменных "γ" и "α"

$$H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\partial \Psi_{1r}}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z}; \quad H_{r\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi_{1r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \phi}, \quad (2.3)$$

где при

$$\gamma = z - z', \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z} = +1 \quad \text{и при} \quad \gamma = z' - z, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -1 \quad (2.4)$$

$$\text{при} \quad \alpha = \phi - \phi', \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = +1 \quad \text{и при} \quad \alpha = \phi' - \phi, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = -1. \quad (2.5)$$

На основе (2.3), (1.16) и (2.4) для вертикальной составляющей имеем:

$$H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[-r' \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{A^{\frac{1}{2}}} \right] \Big|_{R_1}^{R_2} + \int_{R_1}^{R_2} dr' \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{A^{\frac{1}{2}}} + (\alpha_1 + \alpha_2) \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}. \quad (2.6)$$

После интегрирования первого члена в (2.6) по "α", а второго по "r'" получим

$$H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \left(\left[\frac{2r' F(k, \beta)}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \right]_0^{\alpha_1} - \int_0^{\alpha_1} \text{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha \right) + \right. \\ \left. + (\alpha_1 + \alpha_2) \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Big|_{R_1}^{R_2}, \quad (2.7)$$

где γ_1, γ_2 и α_1, α_2 определяются из (1.7) и (1.8), параметр k^2 — из (1.16), β — из (1.17), а $F(k, \beta)$ — из (1.19).

Выражение радиальной составляющей можно представить, согласно (2.2), (1.10) и (1.12), в виде:

$$H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \int_0^{\alpha_1} \left[\gamma \frac{\partial}{\partial r} \text{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{\frac{1}{2}}} - \cos \alpha \text{Arsh} \frac{\gamma}{B^{\frac{1}{2}}} - \right. \right. \\ \left. - r \cos \alpha \frac{\partial}{\partial r} \text{Arsh} \frac{\gamma}{B^{\frac{1}{2}}} - \sin \alpha \arctg \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{\frac{1}{2}}} - \right. \\ \left. - r \sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} \arctg \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{\frac{1}{2}}} \right] d\alpha + (\alpha_1 + \alpha_2) \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Big|_{R_1}^{R_2} \quad (2.8)$$

или после преобразования:

$$H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[\sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \cos \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \right] + \right. \\ \left. + \gamma(\gamma^2 + r^2) \int_0^{\alpha_1} -\frac{\cos \alpha}{CA^{1/2}} d\alpha - \gamma r' r \int_0^{\alpha_1} \frac{\cos^2 \alpha}{CA^{1/2}} d\alpha + (\alpha_1 + \alpha_2) \right\} \left| \gamma_2 \right|_{\gamma_1}^{R_2} \quad (2.9)$$

Приводя полученные интегралы в (2.9) к эллиптическим, получим окончательное выражение для радиальной составляющей

$$H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[\sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \cos \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\gamma_1^2 + r^2}}{r} \{ Q(n_1, k, \beta) - Q(n_2, k, \beta) \} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma r' F(k, \beta)}{r \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} \right\} \left| \gamma_2 \right|_{\gamma_1}^{R_2} \quad (2.10)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$ определяются из (1.7) и (1.8) соответственно, A находится из (1.9), B - из (1.11), β - из (1.17), параметры k, n_1, n_2 - из (1.16), $Q(n)$ из (1.18), а $F(k, \beta), \Pi(n, k, \beta)$ - из (1.19).

На основании (2.2), (1.10), (1.12) для азимутальной составляющей поля имеем:

$$H_{r\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{1}{r} \left\{ \left[\gamma \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{1/2}} - r \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -r \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma (r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^{\alpha_1} - (\alpha_1 + \alpha_2) \Big| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \Big| \frac{R_2}{R_1} = \\
& = \frac{M_r}{4 \pi \mu_0} \left\{ \frac{\gamma}{r} \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} - \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{\frac{1}{2}}} - \right. \\
& \left. - \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma (r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{\frac{1}{2}}} \Big| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \Big| \frac{R_2}{R_1} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$ определяются (1.17) и (1.18) соответственно, A - из (1.9), а B и C - из (1.11).

Из свойств компонент магнитного поля следует отметить следующие:

$$\begin{aligned}
H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z) &= -H_{rz}^{(1)}(r, \phi, -z) \\
H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z) &= H_{rz}^{(1)}(r, -\phi, z)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z) &= H_{rr}^{(1)}(r, \phi, -z) \\
H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z) &= H_{rr}^{(1)}(r, -\phi, z)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
H_{r\phi}^{(1)}(r, \phi, z) &= H_{r\phi}^{(1)}(r, \phi, -z) \\
H_{r\phi}^{(1)}(r, \phi, z) &= -H_{r\phi}^{(1)}(r, -\phi, z).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Указанные свойства составляющих поля $H_{rz}^{(1)}, H_{rr}^{(1)}, H_{r\phi}^{(1)}$ можно получить, если в соотношениях (2.7) и (2.11) произвести замену координат

"z" и "φ" на "-z" и "-φ" при учёте пределов $\gamma_1, \gamma_2, a_1, a_2$ для соответствующих областей пространства.

3. Частные случаи

Из выражений (2.7), (2.10) и (2.11) для компонент магнитного поля цилиндрического кольцевого сектора легко получить выражения для нескольких частных случаев (радиально намагниченные цилиндрические секторы, цилиндры, цилиндрические кольца, бесконечные, полубесконечные и "тонкие"^{x/} цилиндрические конфигурации). Способы получения компонент поля для подобных частных случаев приведены в работе /1/.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев, которые могут быть использованы при расчёте компонент поля наиболее широко применяемых типов катушек.

Для цилиндра, положив в формулах (2.7), (2.10) и (2.11) $R_1 = 0$, $R_2 = R$ и $a_1 = a_2 = \pi$, получим, что

$$H_{rz}^{(1)}(r, z) = -\frac{M_r}{2\mu_0} \left\{ \frac{R F_0(\alpha)}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} + \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + r^2}) - \right. \quad (3.1)$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln(R - r \cos \alpha + \sqrt{\gamma^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}) d\alpha \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}$$

^{x/}Под термином "тонкие" цилиндрические конфигурации понимаем такие конфигурации, у которых один из размеров значительно меньше остальных.

$$H_{rr}^{(1)}(r, z) = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{R}{r} \cdot \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) - \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2}}{r} [\Lambda_0(\alpha, \beta_1) - \Lambda_0(\alpha, \beta_2)] \right\} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (3.2)$$

$$H_{r\phi}^{(1)}(r, z) \equiv 0. \quad (3.3)$$

$$\frac{k^2}{P} = \frac{2R\gamma}{(\sqrt{\gamma^2 + r^2} + R) \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}}, \quad (3.4)$$

а $F_0(\alpha)$, $\Lambda_0(\alpha, \beta)$ - табулированные функции ^{/3/}, где

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2 + \gamma^2}}; \quad \beta_1 = \arcsin \frac{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2} + R}; \quad (3.5)$$

$$\beta_2 = \arcsin \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2} - R}{\sqrt{(R-r)^2 + \gamma^2}}.$$

Соотношение (3.1) может быть представлено в следующей форме:

$$H_{rz}^{(1)}(r, z) = -\frac{M_r}{2\mu_0} \left\{ \frac{R F_0(\alpha)}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} + \ln \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + r^2}}{[\gamma^2 + R^2 + r^2 + \sqrt{(\gamma^2 + R^2 + r^2)^2 - 4R^2 r^2}]^{1/2}} \right. \quad (3.6)$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \left(1 + \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right) d\alpha \right\} \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Интеграл в соотношении (3.6) после разложения подынтегрального выражения в ряд для первых трех членов может быть представлен как

$$H_{rz}^{(1)}(r, z) = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{R}{r} \cdot \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) - \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2}}{r} [\Lambda_0(\alpha, \beta_1) - \Lambda_1(\alpha, \beta_2)] \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \quad (3.2)$$

$$H_{r\phi}^{(1)}(r, z) \equiv 0. \quad (3.3)$$

$$\frac{k^2}{P} = \frac{2R\gamma}{(\sqrt{\gamma^2 + r^2} + R) \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}}, \quad (3.4)$$

а $F_0(\alpha)$, $\Lambda_0(\alpha, \beta)$ - табулированные функции ^{/3/} , где

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2 + \gamma^2}}; \quad \beta_1 = \arcsin \frac{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + R}}; \quad (3.5)$$

$$\beta_2 = \arcsin \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2} - R}{\sqrt{(R-r)^2 + \gamma^2}}.$$

Соотношение (3.1) может быть представлено в следующей форме:

$$H_{rz}^{(1)}(r, z) = -\frac{M_r}{2\mu_0} \left\{ \frac{R F_0(\alpha)}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} + \ln \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + r^2}}{[\gamma^2 + R^2 + r^2 + \sqrt{(\gamma^2 + R^2 + r^2)^2 - 4R^2 r^2}]^{1/2}} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \left(1 + \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right) d\alpha \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}. \quad (3.6)$$

Интеграл в соотношении (3.6) после разложения подынтегрального выражения в ряд для первых трех членов может быть представлен как

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi} \ln \left(1 + \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right) d\alpha = \frac{1}{R} \left[\frac{R^2 - r^2 - \gamma^2}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} K(k) + \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} E(k) \right] - \\
& - \pi \left[1 + \frac{(\gamma^2 + R^2 + r^2)^2}{4R^2 \sqrt{(\gamma^2 + R^2 + r^2)^2 - 4R^2 r^2}} - \frac{\gamma^2 + R^2 + r^2}{4R^2} \right] + \\
& + \frac{E(k)}{3 \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} \left\{ \frac{\gamma^2 + R^2 + r^2}{3R^3} [5R^4 - r^4 - \gamma^4 + 10R^2 r^2 + 7R^2 \gamma^2 - 2r^2 \gamma^2] - \right. \\
& \left. - 2R(4r^2 + \gamma^2) \right\} + \frac{K(k)}{R \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} \left\{ \frac{2(\gamma^2 + R^2 + r^2)^2 - 4R^2 r^2}{9R^2} - r^2 - \gamma^2 \right\} + \dots,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$-1 < \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}} < 1,$$

а $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

После перехода к новой системе координат (начало в точке $z = -h$, $r = 0$) в области $z < 0$, при $2h \rightarrow \infty$ выражения для вертикальной и радиальной составляющей поля полубесконечного цилиндра можно представить как

$$\begin{aligned}
H_{rz}^{(1)}(r, z) = \frac{M_r}{2\mu_0} \left\{ \frac{RF_0(\alpha)}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} + \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + r^2}}{2} - \right. \\
\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(R - r \cos \alpha + \sqrt{z^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}) d\alpha \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi} \ln \left(1 + \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right) d\alpha = \frac{1}{R} \left[\frac{R^2 - r^2 - \gamma^2}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} K(k) + \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} E(k) \right] - \\
& - \pi \left[1 + \frac{(\gamma^2 + R^2 + r^2)^2}{4R^2 \sqrt{(\gamma^2 + R^2 + r^2)^2 - 4R^2 r^2}} - \frac{\gamma^2 + R^2 + r^2}{4R^2} \right] + \\
& + \frac{E(k)}{3 \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} \left\{ \frac{\gamma^2 + R^2 + r^2}{3R^3} [5R^4 - r^4 - \gamma^4 + 10R^2 r^2 + 7R^2 \gamma^2 - 2r^2 \gamma^2] - \right. \\
& \left. - 2R(4r^2 + \gamma^2) \right\} + \frac{K(k)}{R \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} \left\{ \frac{2(\gamma^2 + R^2 + r^2)^2 - 4R^2 r^2}{9R^2} - r^2 - \gamma^2 \right\} + \dots,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$-1 < \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}} < 1,$$

а $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

После перехода к новой системе координат (начало в точке $z = -h$, $r = 0$) в области $z < 0$, при $2h \rightarrow \infty$ выражения для вертикальной и радиальной составляющей поля полубесконечного цилиндра можно представить как

$$\begin{aligned}
H_{rz}^{(1)}(r, z) = \frac{M_r}{2\mu_0} \left\{ \frac{RF_0(\alpha)}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} + \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + r^2}}{2} - \right. \\
\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(R - r \cos \alpha + \sqrt{z^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}) d\alpha \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$H_{rr}^{(1)}(r, z) = \frac{M_r}{4\mu_0} \left\{ \frac{R}{r} - \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) - \frac{\sqrt{z^2 + r^2}}{r} [\Lambda_0(\alpha, \beta_1) - \Lambda_0(\alpha, \beta_2)] \right\} \quad (3.9)$$

Для полубесконечной и "тонкой по радиусу" кольцевой шиммы в области $z < 0$ (начало системы координат перенесено в точку $z = -h$, $r = 0$), разлагая в ряд (2.7) и (2.10), ограничиваясь первыми членами и положив $R_1 = 0$, $R_2 = R$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$, получим, что

$$H_{rz}^{(1)}(r, z) = - \frac{M_r \Delta R}{4\mu_0 \sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left\{ F_0(\alpha) + \frac{R^2 - r^2 - z^2}{(R-r)^2 + z^2} E_0(\alpha) \right\} \quad (3.10)$$

$$H_{rr}^{(1)}(r, z) = \frac{M_r z \Delta R}{4\mu_0 r \sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left\{ \frac{R^2 + r^2 + z^2}{(R-r)^2 + z^2} E_0(\alpha) - F_0(\alpha) \right\}, \quad (3.11)$$

где $E_0(\alpha)$ табулированная функция^{/3/}.

В соотношениях (3.8) - (3.11) $\frac{k^2}{P}$, α , β_1 , β_2 определяются (3.4) и (3.5) при замене y на z .

4. Производные компоненты магнитного поля

по пространственным координатам

В этом разделе получены выражения $\frac{\partial H_{rz}^{(1)}}{\partial z}$, $\frac{\partial H_{rz}^{(1)}}{\partial r}$ и $\frac{\partial H_{rr}^{(1)}}{\partial \phi}$, $\frac{\partial H_{rr}^{(1)}}{\partial z}$, $\frac{\partial H_{rr}^{(1)}}{\partial r}$ и $\frac{\partial H_{rr}^{(1)}}{\partial \phi}$. Формулы для $\frac{\partial H_{rz}^{(1)}}{\partial z}$, $\frac{\partial H_{rz}^{(1)}}{\partial r}$ и $\frac{\partial H_{rr}^{(1)}}{\partial \phi}$ могут быть непосредственно найдены дифференцированием выражения (2.7) по "z", "r" и "φ" для области $z < -h$

и $-\phi_0 < \phi < \phi_0$ получим, что

$$\frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial z} = \frac{\partial H_{rz}^{(1)}}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -\frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \left(\frac{2\gamma r' E(k, \beta)}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} [(r'-r)^2 + \gamma^2]} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + r^2}} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta)] \right) + \right. \quad (4.1)$$

$$\left. + \frac{4r'^2 r \sin \alpha}{[(r'+r)^2 + \gamma^2][(r'-r)^2 + \gamma^2] A^{\frac{1}{2}}} \right) \alpha_1 + (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \left\{ \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \right. \\ \left. \right|_{R_1}^{R_2}$$

$$\frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \left(\frac{r' F(k, \beta)}{r \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{r'(r'^2 + \gamma^2 - r^2) E(k, \beta)}{r \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} [(r'-r)^2 + \gamma^2]} - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma}{r \sqrt{\gamma^2 + r^2}} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta)] \right) + \quad (4.2)$$

$$\left. + \frac{2r'^2 (r'^2 + \gamma^2 - r^2) \sin \alpha}{[(r'+r)^2 + \gamma^2][(r'-r)^2 + \gamma^2] A^{\frac{1}{2}}} \right) \alpha_1 + (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \left\{ \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \right. \\ \left. \right|_{R_1}^{R_2}$$

$$\frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial \phi} = \frac{\partial H_{rz}^{(1)}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} =$$

$$= \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{r'}{A^{1/2}} - \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \left| \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \end{array} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (4.3)$$

Производные радиальной составляющей поля имеют вид

$$\frac{\partial H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial z} = \frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} &= \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \left(\frac{2\gamma r' E(k, \beta)}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} [(r'-r)^2 + \gamma^2]} - \frac{2\gamma r' F(k, \beta)}{r'^2 \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \right) + \right. \\ &+ \frac{\gamma^2}{r^2 \sqrt{\gamma^2 + r^2}} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta)] + \\ &+ \left. \frac{\gamma \sin \alpha}{A^{1/2}} \left[\frac{(r'^2 + r^2 + \gamma^2)^2}{r [(r'+r)^2 + \gamma^2] [(r'-r)^2 + \gamma^2]} - \frac{r}{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha} \right] \right\} \frac{\alpha_1}{0} + \\ &+ (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \left| \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \end{array} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial \phi} &= \frac{\partial H_{rr}^{(1)}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\gamma r' (r - r' \cos \alpha)}{A^{1/2}} - \right. \\ &- \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma (r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \left. \right\} \left| \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \end{array} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$= \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{r'}{A^{1/2}} - \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \left| \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array} \right|_{R_1}^{R_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (4.3)$$

Производные радиальной составляющей поля имеют вид

$$\frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial z} = \frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} &= \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{2\gamma r' E(k, \beta)}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} [(r'-r)^2 + \gamma^2]} - \frac{2\gamma r' F(k, \beta)}{r^2 \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \right. \\ &+ \frac{\gamma^2}{r^2 \sqrt{\gamma^2 + r^2}} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta)] + \\ &+ \frac{\gamma \sin \alpha}{A^{1/2}} \left[\frac{(r'^2 + r^2 + \gamma^2)^2}{r [(r'+r)^2 + \gamma^2] [(r'-r)^2 + \gamma^2]} - \frac{r}{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha} \right] \frac{\alpha_1}{0} + \\ &+ (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \left| \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array} \right|_{R_1}^{R_2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial \phi} &= \frac{\partial H_{rz}^{(1)}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\gamma r' (r - r' \cos \alpha)}{3A^{1/2}} \right. \\ &- \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \left. \right\} \left| \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array} \right|_{R_1}^{R_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$= \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{r'}{A^{1/2}} - \text{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \left| \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \end{array} \frac{a_2}{a_1} \quad (4.3)$$

Производные радиальной составляющей поля имеют вид

$$\frac{\partial H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial z} = \frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} &= \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{2\gamma r' E(k, \beta)}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} [(r'-r)^2 + \gamma^2]} - \frac{2\gamma r' F(k, \beta)}{r' \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \right. \\ &+ \frac{\gamma^2}{r^2 \sqrt{\gamma^2 + r^2}} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta)] + \\ &+ \frac{\gamma \sin \alpha}{A^{1/2}} \left[\frac{(r'^2 + r^2 + \gamma^2)^2}{r [(r'+r)^2 + \gamma^2] [(r'-r)^2 + \gamma^2]} - \frac{r}{r'^2 + r^2 - 2r' r \cos \alpha} \right] \frac{a_1}{0} + \\ &+ (a_1 \rightarrow a_2) \left| \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \end{array} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{rr}^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial \phi} &= \frac{\partial H_{rr}^{(1)}}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \phi} = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\gamma r' (-r' \cos \alpha)}{r A^{1/2}} \right. \\ &- \cos \alpha \text{Arsh} \frac{\gamma}{r A^{1/2}} - \sin \alpha \text{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \left. \right\} \left| \begin{array}{c} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \end{array} \frac{a_2}{a_1} \quad (4.6) \end{aligned}$$

При получении формул (4.4) и (4.5) воспользовались соотношениями (2.10), $\text{div } \vec{H} = 0$, $\text{rot } \vec{H} = 0$

Для производных азимутальной составляющей имеем

$$\frac{\partial H_r^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial z} = \frac{M_r}{4\pi\mu_0 r} \left\{ \frac{r'}{A^{1/2}} - \text{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 & R_2 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & R_1 & \alpha_1 \end{matrix} \right| \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial H_r^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial r} = \frac{M_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\gamma r'(r - r' \cos \alpha)}{B A^{1/2}} - \frac{\gamma}{r} \text{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 & R_2 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & R_1 & \alpha_1 \end{matrix} \right| \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r^{(1)}(r, \phi, z)}{\partial \phi} = & - \frac{I_r}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[\sin \alpha \text{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \cos \alpha \arctg \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma r'^2 \sin \alpha}{B A^{1/2}} \right\} \left| \begin{matrix} \alpha_1 \\ 0 + (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \end{matrix} \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 & R_2 \\ \gamma_1 & R_1 \end{matrix} \right|. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Формулы (4.7) - (4.9) могут быть непосредственно найдены дифференцированием выражения (2.11) по "z", "r" и "φ".

В соотношениях (4.1) - (4.9), $E(k, \beta)$, $F(k, \beta)$, $Q(n)$, $\Pi(n, k, \beta)$, k , n_1 , n_2 , β и A определяются из (1.19), (1.16), (1.17), (1.18) и (1.9) соответственно, γ_1, γ_2 и α_1, α_2 - из (1.7) и (1.8).

Для цилиндра имеем:

$$\frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, z)}{\partial z} = - \frac{M_r}{2\pi\mu_0} \left\{ \frac{2\gamma R E(k)}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} \right\}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + r^2}} \left[Q(n_1) \Pi(n_1, k, \frac{\pi}{2}) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \frac{\pi}{2}) \right] \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial H_{rr}^{(1)}(r, z)}{\partial r} = \frac{M_r}{2\pi\mu_0} \left\{ \frac{2\gamma RE(k)}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} - \frac{2\sqrt{RK}(k)}{r \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} + \right. \quad (4.11)$$

$$\left. + \frac{\gamma^2}{r^2 \sqrt{\gamma^2 + r^2}} \left[Q(n_1) \Pi(n_1, k, \frac{\pi}{2}) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \frac{\pi}{2}) \right] \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}$$

$$\frac{\partial H_{rz}^{(1)}(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial H_{rr}^{(1)}(r, z)}{\partial z} = - \frac{M_r}{2\pi\mu_0} \left\{ \frac{R(R^2 + r^2 + \gamma^2)E(k)}{r \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} + \right. \quad (4.12)$$

$$\left. + \frac{RK(k)}{r \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} - \frac{\gamma}{r \sqrt{\gamma^2 + r^2}} \left[Q(n_1) \Pi(n_1, k, \frac{\pi}{2}) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \frac{\pi}{2}) \right] \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}$$

*5. Распределение компонент магнитного поля
от радиально намагниченных цилиндрических
конфигураций*

С помощью ЭВМ было рассчитано распределение составляющих магнитного поля от радиально намагниченных цилиндрических кольцевых секторов цилиндров и кольцевых шимм для разных значений R_1 , R_2 , h в плоскости $z = -2h$ (см. рис. 2).

На рис. 3,4,5 представлены распределения вертикальной составляющей поля от радиально намагниченного цилиндрического кольцевого сектора при $2\phi_0 = 30^\circ$, $\phi = 0$ и разных значений $r = \frac{r}{R_2}$. На рис. 6,7,8 даны графики вертикальной составляющей поля от радиально намагниченных цилиндров и кольцевых шимм разной высоты. При этом параметры $\frac{R_1}{R_2}$ и $q = \frac{2h}{R_2}$ варьировались в следующих пределах:

$$\frac{R_1}{R_2} = 0; 0,25; 0,5; 0,75 \quad \text{и} \quad q = 1; 2; 4.$$

Распределение радиальной составляющей магнитного поля для радиально намагниченного цилиндрического кольцевого сектора представлено на рис. 9,10,11 также при $2\phi_0 = 30^\circ$ и $\phi = 0$, а для цилиндров и кольцевых шимм разной высоты на рис. 12,13,14 - для параметров $\frac{R_1}{R_2} = 0; 0,25; 0,5; 0,75$ и $q = 1; 2; 4$.

Из анализа приведенных графиков следует, что:

- 1) Для цилиндрического кольцевого сектора для одних и тех же параметров $\frac{2h}{R_2}$, $\frac{z}{h}$ и $\frac{R_1}{R_2}$ максимальные значения вертикальной и радиальной составляющих поля являются относительно близкими по величине. Эти максимумы располагаются в непосредственной близости от точки $r = \frac{r}{R_2} = 1$.

На оси при $r = 0$ вертикальная составляющая поля для радиально намагниченного кольцевого сектора имеет отрицательное значение, а радиальная составляющая поля может быть как отрицательной, так и положительной в зависимости от значений параметров $q = \frac{2h}{R_2}$ и $\frac{R_1}{R_2}$.

- 2) Для радиально намагниченных цилиндров и кольцевых шимм, при $r = 0$, $H_{r,r}^{(1)}(0, z) = 0$ и производной вертикальной составляющей поля по радиусу $\frac{\partial H_z^{(1)}(0, z)}{\partial r} = 0$.

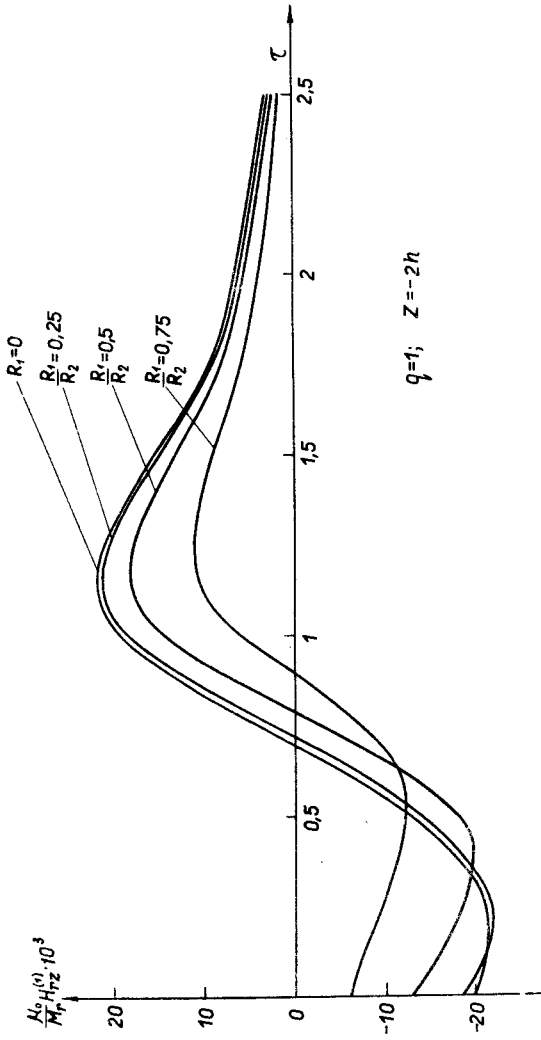


Рис. 3.

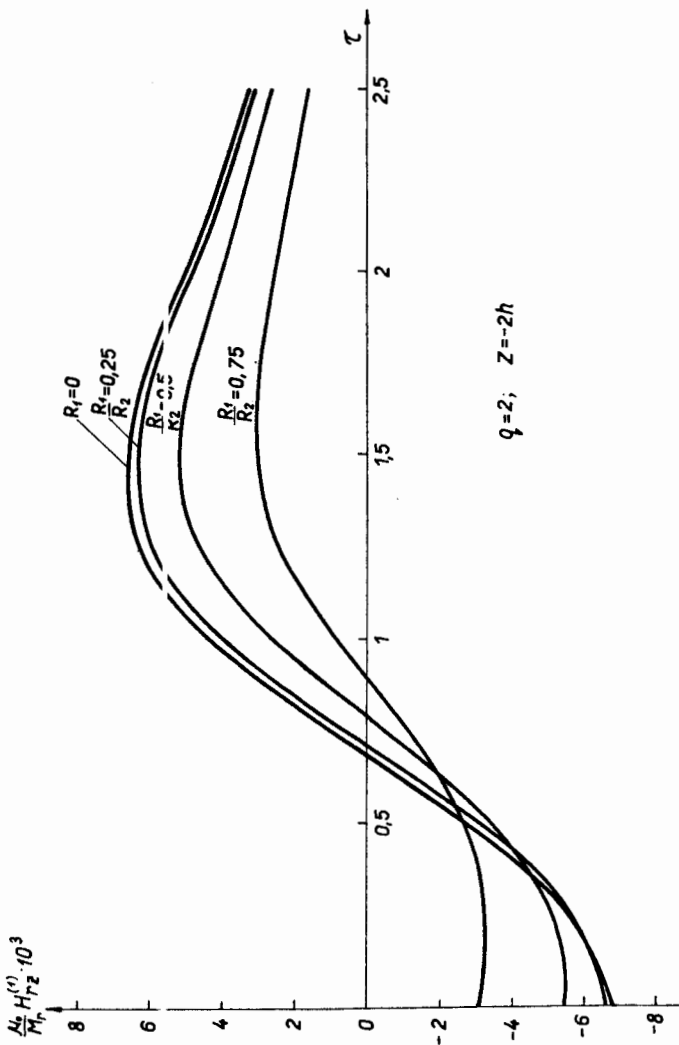


Рис. 4.

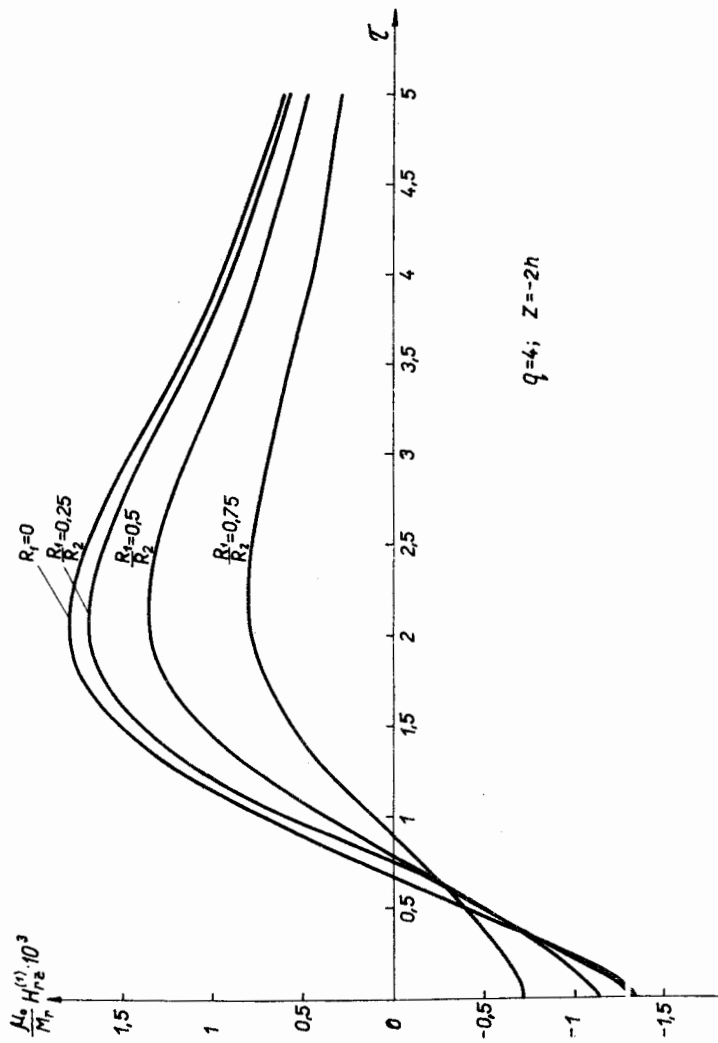


Рис. 5.

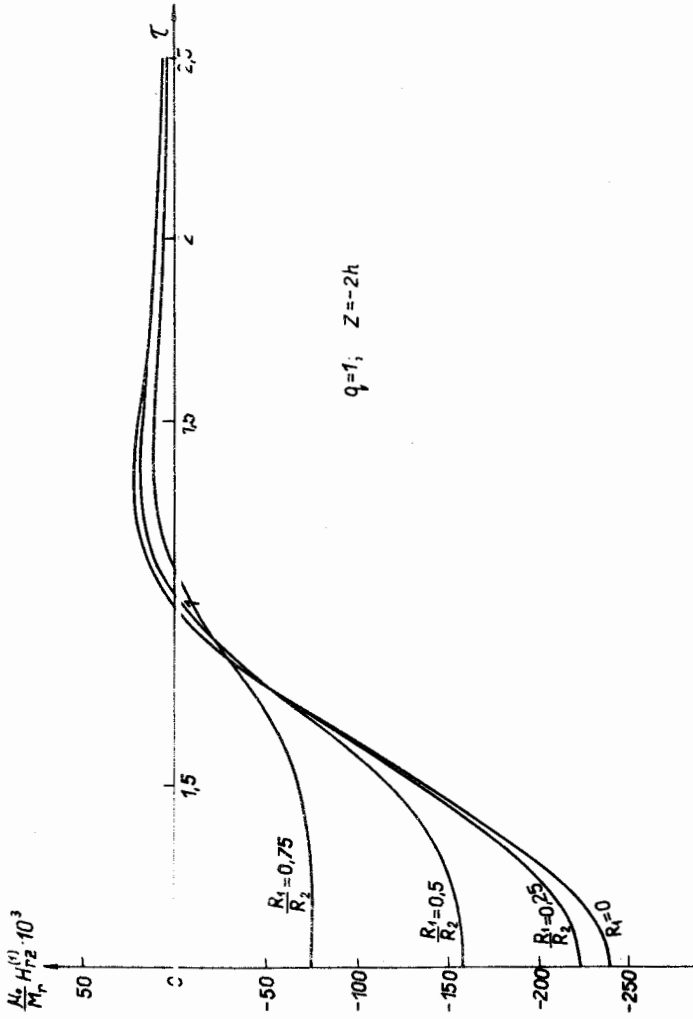


Рис. 6.

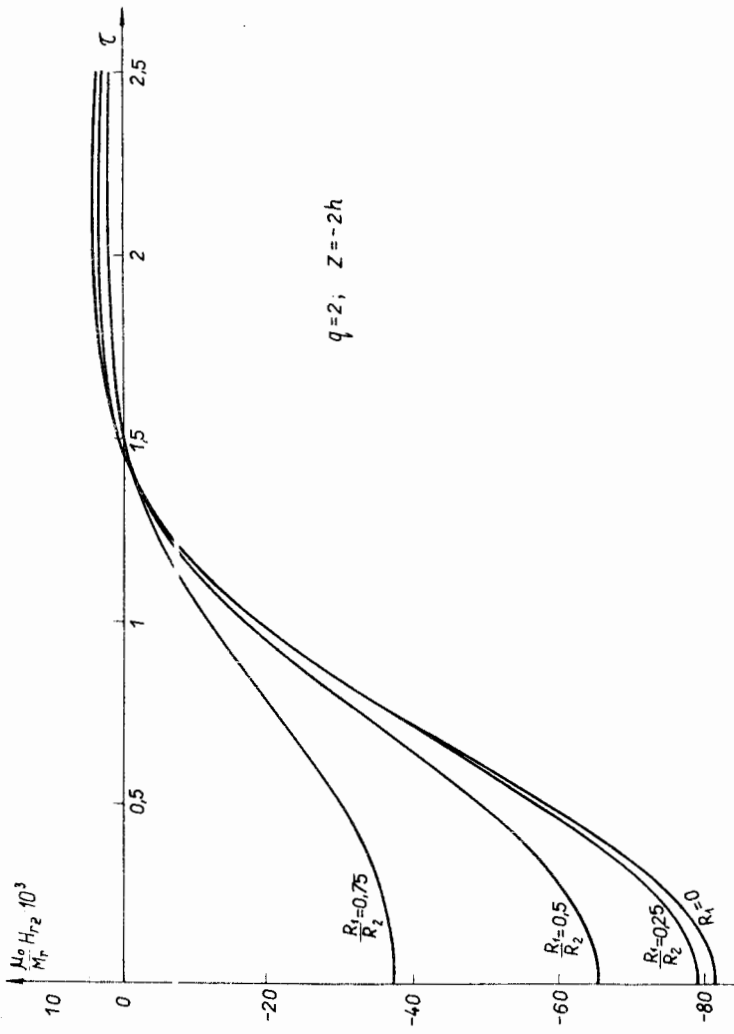


Рис. 7.

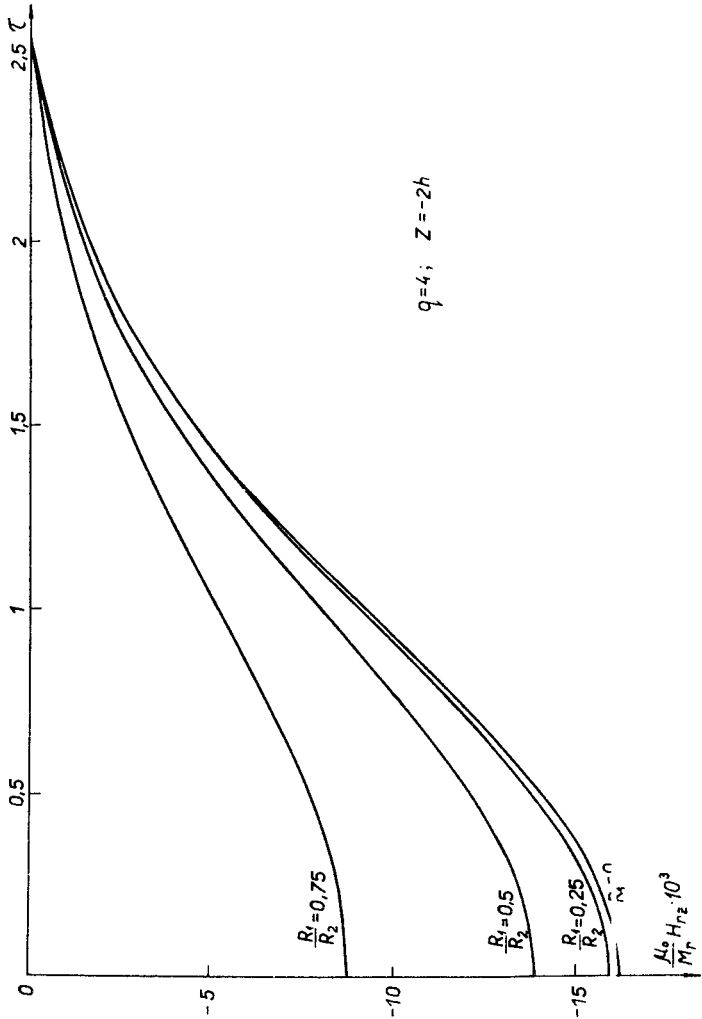


Рис. 8.

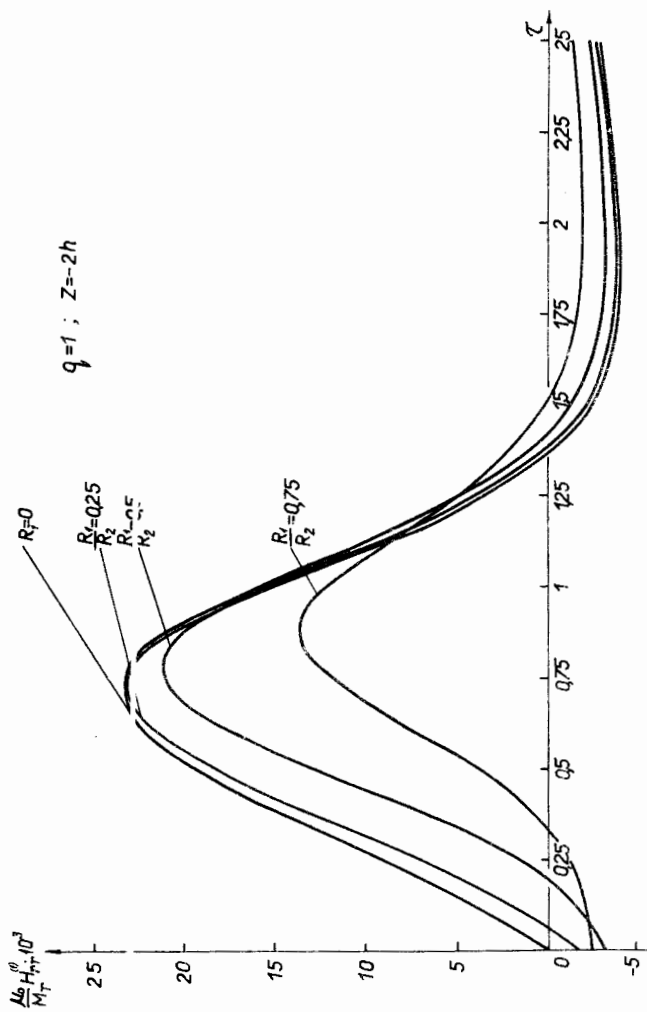


Рис. 9.

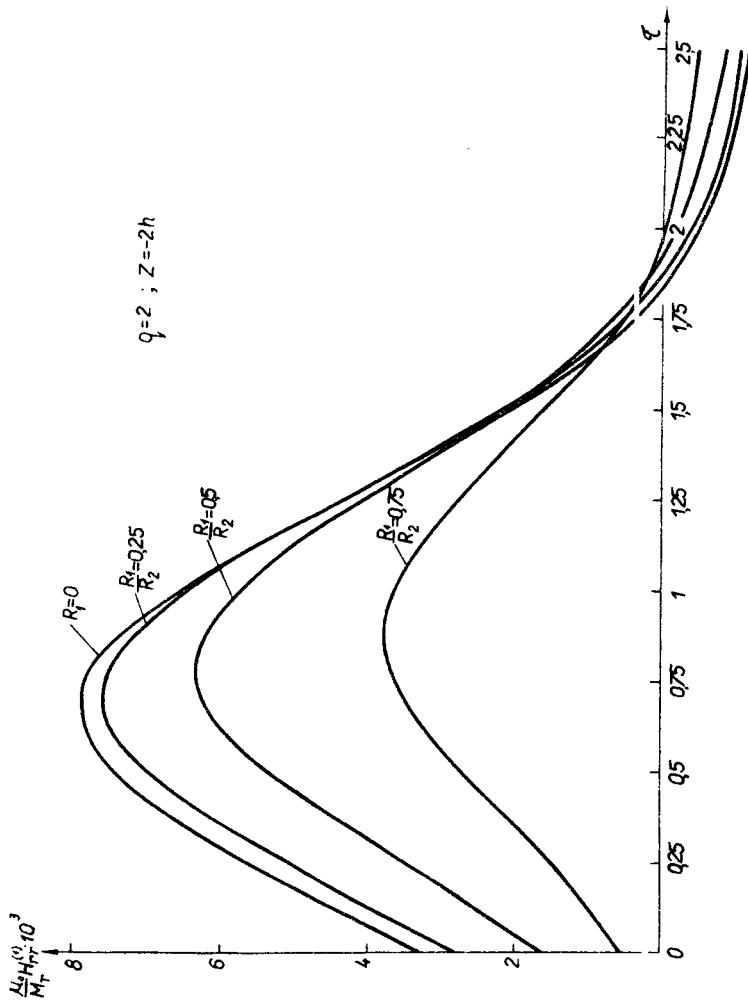


Рис. 10.

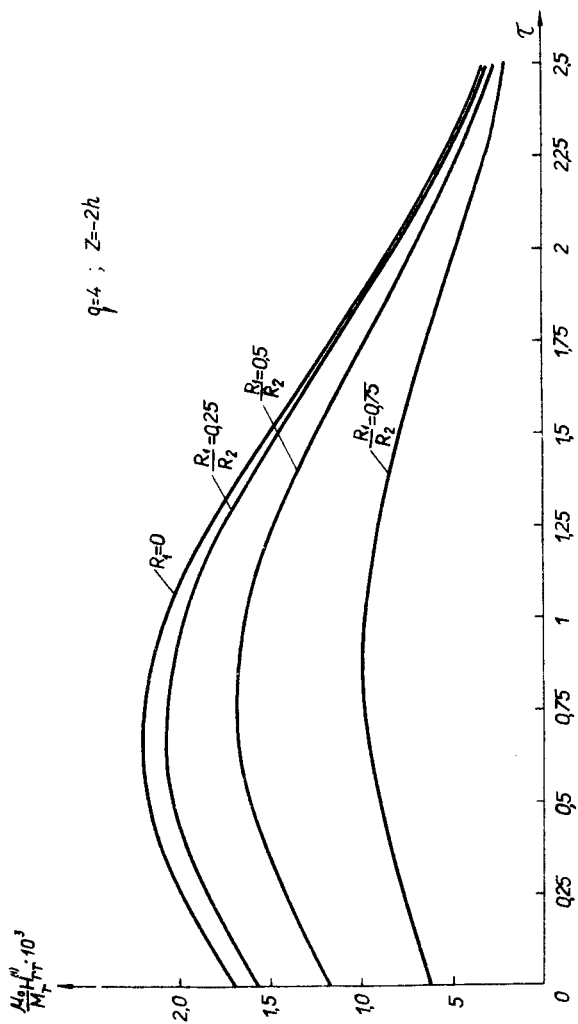


Рис. 11.

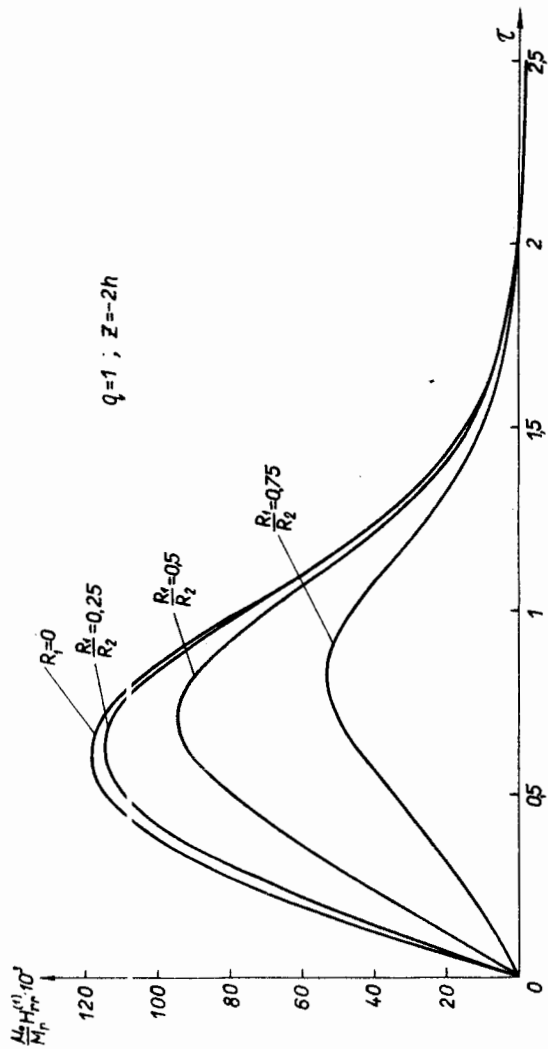


Рис. 12.

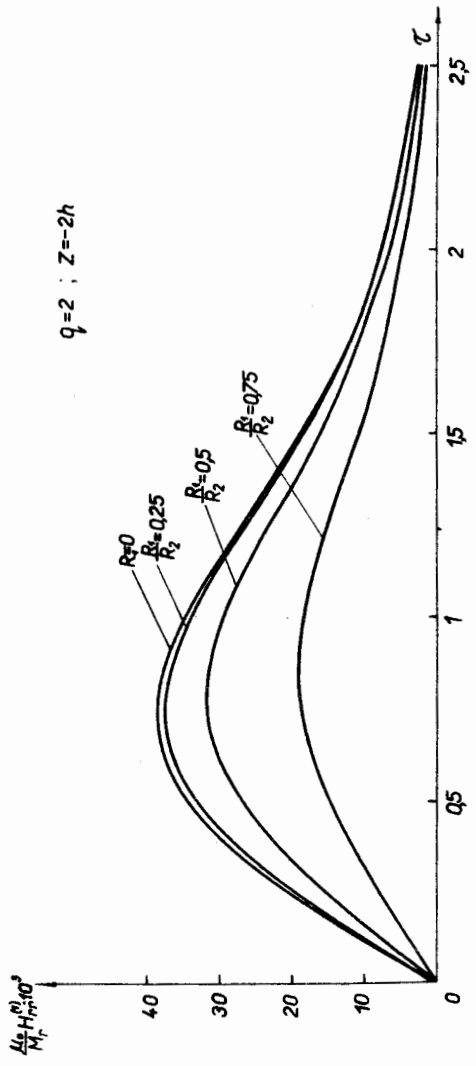


Рис. 13.

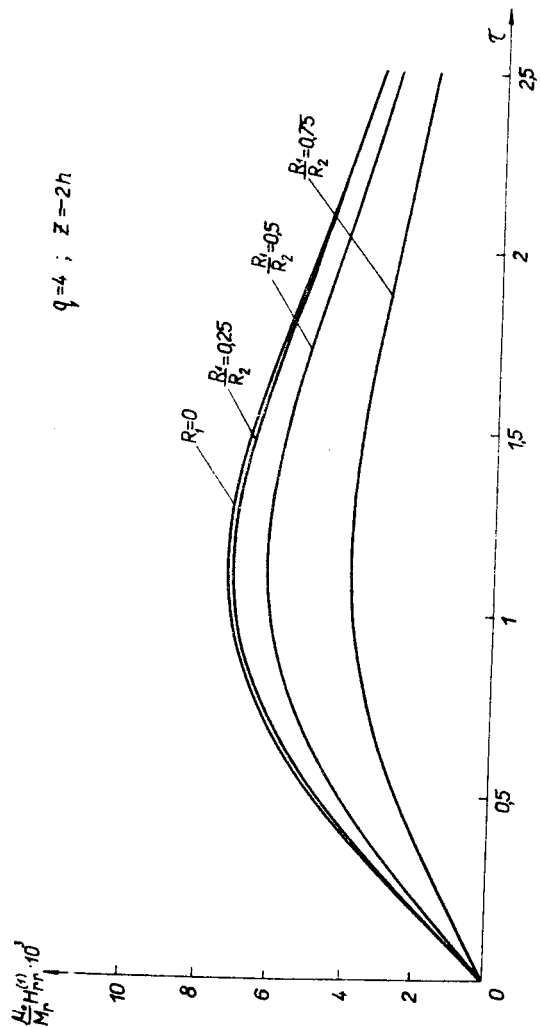


Рис. 14.

**6. Магнитное поле токовых конфигураций,
эквивалентных цилиндрическим конфигурациям,
намагниченным по радиальному направлению**

Как было показано в предыдущей работе^{/1/}, из выражения магнитного поля равномерно намагниченных цилиндрических конфигураций можно получить составляющие магнитного поля от соответствующих эквивалентных токовых конфигураций, если магнитные моменты единичной поверхности (M_{rs}) или единицы объема (M_r) связаны с током I следующими соотношениями:

Для радиально намагниченной и тонкой по радиусу шиммы и соответствующей ей токовой конфигурации, показанной на рис. 15:

$$M_{rs} = \mu_0 I \quad (6.1)$$

$$M_r = \mu_0 i, \quad (6.2)$$

где μ_0 - магнитная проницаемость вакуума; I - ток, протекающий в токовой катушке; $i = \frac{I}{\Delta R}$ - линейная плотность тока.

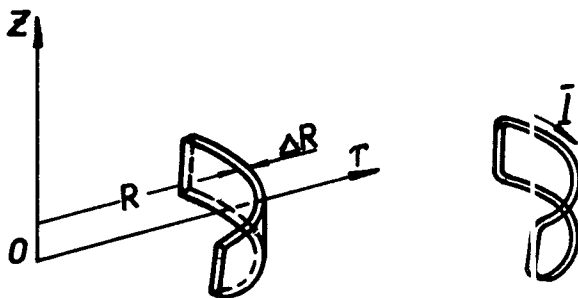


Рис. 15.

Для радиально намагниченного цилиндрического кольцевого сектора и эквивалентной ему токовой конфигурации, показанной на рис. 16:

$$M_r = \mu_0 \frac{NI}{R_2 - R_1} \quad (6.3)$$

где N - число витков.

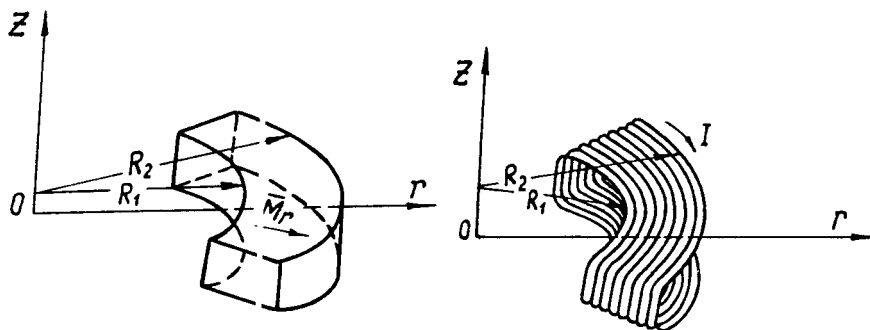


Рис. 16.

Так как индукция поля B и напряженность магнитного поля $H = \frac{B}{\mu_0}$ от равномерно намагниченного тела вне его объема равны полю B и H от соответствующей токовой катушки то, на основе (2.7) (2.10), (2.11) и (6.3), для компонент поля в области $z < -h$ и $-\phi_0 < \phi < \phi_0$ имеем

$$H_{rz\phi k}^{(1)}(r, \phi, z) = - \frac{NI}{4\pi(R_2 - R_1)} \left\{ \left[\frac{2r' F(k, \beta)}{\sqrt{(r' + r)^2 + y^2}} \right]_0^{\alpha_1} - \right.$$

$$-\int_0^{\alpha_1} \text{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha + (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \left\{ \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \frac{R_2}{R_1} \right. \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} H_{r\phi k}^{(1)}(r, \phi, z) = & \frac{NI}{4\pi(R_2 - R_1)} \left\{ (\sin \alpha \text{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \right. \\ & - \cos \alpha \text{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} + \frac{2\gamma r' F(k, \beta)}{r \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} - \\ & \left. - \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2}}{r} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta)] \right\} \frac{\alpha_1}{0} + \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$+ (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \left\{ \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \frac{R_2}{R_1} \right.$$

$$\begin{aligned} H_{r\phi k}^{(1)}(r, \phi, z) = & \frac{NI}{4\pi(R_2 - R_1)} \left\{ \frac{\gamma}{r} \text{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} - \cos \alpha \text{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \right. \\ & \left. - \sin \alpha \text{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \right\} \left\{ \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \frac{R_2}{R_1} \right\} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $\gamma_1 = -h - z$, $\gamma_2 = h - z$; $\alpha_1 = \phi_0 + \phi$, $\alpha_2 = \phi_0 - \phi$

Внутри намагниченного тела индукция поля B_1 равна индукции поля B_{1k} внутри соответствующей токовой катушки, а напряженности магнитного поля отличны друг от друга, так как внутри намагниченного тела необходимо учесть действие вектора намагниченности \vec{M} , т.е.

$$H_{ik} = H_i + \frac{\vec{M}}{\mu_0} \quad (6.7)$$

При этом следует иметь в виду, что $M_r = M$ и $M_z = M \phi = 0$. Поэтому выражения компонент магнитного поля внутри катушки с током I в области $-h < z < h$ и $-\phi_0 < \phi < \phi_0$ имеют вид

$$H_{rzk}^{(1)}(r, \phi, z) = - \frac{NI}{4\pi(R_2 - R_1)} \left\{ \left[\frac{2r' F(k, \beta)}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \right]_0^{a_1} - \right. \quad (6.8)$$

$$\left. - \int_0^{a_1} \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha + (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \right\} \left| \begin{matrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{matrix} \right| \frac{R_2}{R_1},$$

$$H_{rzk}^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{NI}{4\pi(R_2 - R_1)} \left\{ \left[\sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \cos \alpha \operatorname{actg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} + \right. \right. \quad (6.9)$$

$$\left. + \frac{2\gamma r' F(k, \beta)}{r \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} - \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2}}{r} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta)] \right]_0^{a_1} +$$

$$\left. + (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \right]_{\gamma = \gamma_1} + [\gamma_1 \rightarrow \gamma_2] \left| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \right| + \frac{NI}{R_2 - R_1}$$

$$H_{r\phi ik}^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{NI}{4\pi(R_2 - R_1)} \left\{ \left[\frac{\gamma}{r} \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} - \right. \quad (6.10)$$

$$\left. - \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{B^{1/2}} - \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma(r' - r \cos \alpha)}{r \sin \alpha A^{1/2}} \right]_{\gamma = \gamma_1} +$$

$$\left. + [\gamma_1 \rightarrow \gamma_2] \right\} \left| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \right| \frac{a_2}{a_1},$$

где $\gamma_1 = z + h$ $\gamma_2 = h - z$.

Из (6.8) + (6.10) легко получить, положив в них $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$ и $R_1 = 0$, $R_2 = R$, выражения компонент поля двух плоских цилиндрических соленоидов в области $-h < z < h$ (рис. 17а).

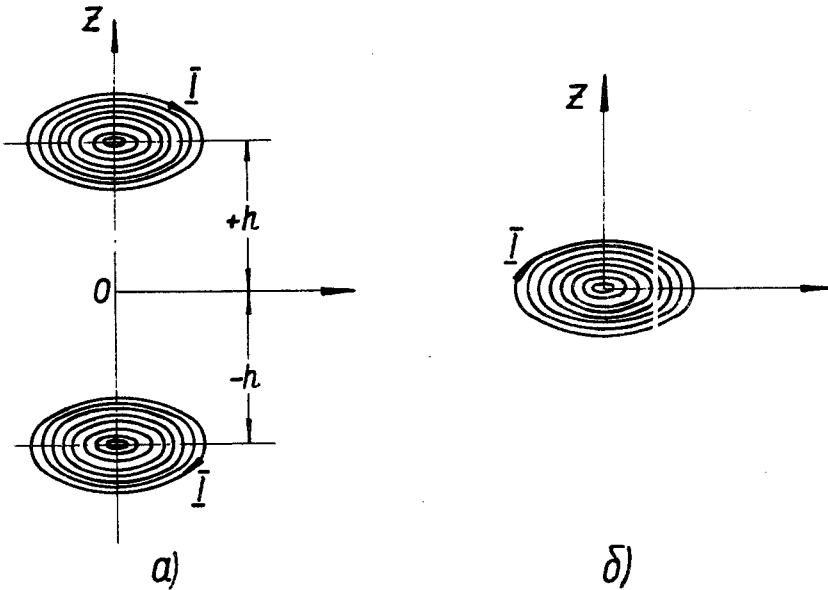


Рис. 17.

Тогда получим

$$H_{z10}^{(1)}(r, z) = -\frac{NI}{2R} \left\{ \frac{R F_0(\alpha)}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} + \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + r^2}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln(R - r \cos \alpha + \sqrt{\gamma^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}) d\alpha \right\} \Big|_\gamma^z \quad (6.11)$$

$$H_{r r i o}^{(1)}(r, z) = \frac{N I}{4 R} \left\{ \left(\frac{R}{r} \cdot \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) - \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2}}{r} [\Lambda_0(\alpha, \beta_1) - \Lambda_0(\alpha, \beta_2)] \right) \gamma + \gamma_1 + \right. \\ \left. + (\gamma_1 + \gamma_2) \right\} + \frac{N I}{R} \quad (6.12)$$

$$H_{r \phi i o}^{(1)}(r, z) = 0. \quad (6.13)$$

Удаляя на бесконечность один из соленоидов (см. рис. 176), для компонент поля в области $z < 0$ из (3.8), (3.9) и (6.3) имеем

$$H_{r z o}^{(1)}(r, z) = \frac{N I_0}{2 R} \left\{ \frac{R F_0(\alpha)}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} + \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + r^2}}{2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln (R - r \cos \alpha + \sqrt{z^2 + R^2 + r^2 - 2 R r \cos \alpha}) d \alpha \right\} \quad (6.14)$$

$$H_{r r o}^{(1)}(r, z) = \frac{N I_0}{4 R} \left\{ \frac{R}{r} \cdot \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) - \frac{\sqrt{z^2 + r^2}}{r} [\Lambda_0(\alpha, \beta_1) - \Lambda_0(\alpha, \beta_2)] \right\}. \quad (6.15)$$

Соотношения (6.14) и (6.15) могут быть получены также интегрированием по r' следующим формулам (предполагается, что $\frac{N I_0}{R} = \text{const}$):

$$H_{rzo}^{(1)}(r, z) = \int_0^R I_{zb}^{(1)}(r', z) dr' = -\frac{I_b}{4} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{(r'+r)^2 + z^2}} [F_0(\alpha) + \frac{r'^2 - r^2 - z^2}{(r' - r)^2 + z^2} E_0(\alpha)] dr', \quad (6.16)$$

$$H_{rzo}^{(1)}(r, z) = \int_0^R H_{zrb}^{(1)}(r, z) dr' = \frac{I_b z}{4r} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{(r'+r)^2 + z^2}} [F_0(\alpha) - \frac{r'^2 + r^2 + z^2}{(r' - r)^2 + z^2} E_0(\alpha)] dr', \quad (6.17)$$

где подинтегральные выражения описывают компоненты магнитного поля /4/ одиночного витка, которые также легко получить из (3.10), (3.11), заменяя в них $M, \Delta R = M_{rs}$ на $\mu_0 I_b$ в соответствии с (6.1), где I_b - ток, протекающий в витке.

Для компонент поля плоского кольцевого соленоида из формул (6.14), (6.15) получим:

$$H_{rzo}^{(1)}(r, z) = \frac{NI}{2(R_2 - R_1)} \left\{ \frac{r' F_0(\alpha)}{\sqrt{(r'+r)^2 + z^2}} + \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + r^2}}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ell_1 (r' - r \cos \alpha + \sqrt{z^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha}) d\alpha \right\} \Big|_{R_1}^{R_2} \quad (6.18)$$

$$H_{r r_0}^{(1)}(r, z) = \frac{NI}{4(R_2 - R_1)} \left\{ \frac{r'}{r} \cdot \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) - \frac{\sqrt{z^2 + r^2}}{r} [\Lambda_0(\alpha, \beta_1) - \Lambda_0(\alpha, \beta_2)] \right\} \Big|_{R_1}^{R_2} \quad (6.19)$$

При $r = 0$ выражения (6.18) и (6.19) имеют вид

$$H_{r z_0}^{(1)}(0, z) = \frac{NI}{2(R_2 - R_1)} \left\{ -\frac{r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} - \ln \frac{r' + \sqrt{r'^2 + z^2}}{z} \right\} \Big|_{R_1}^{R_2} \quad (6.20)$$

$$H_{r r_0}^{(1)}(0, z) \equiv 0. \quad (6.21)$$

Приведенное выражение (6.20) совпадает с формулой, полученной на основе закона Био-Савара в работе /5./

Л и т е р а т у р а

1. В.И.Данилов, М.Ианович. Препринт ОИЯИ Р9-3542, Дубна 1967.
2. Дж.А.Стрэттон. Теория электромагнетизма, ГИЗ, Москва, 1948.
3. С.Неuman. Tables of Complete Elliptic Integrals, J.Math. and Phys., 20 127 (1942).
4. В.Смайт. Электростатика и электродинамика, И.Л., Москва, 1954.
5. E.Durand, Electrostatique et Magnetostatique, Masson, Paris, 1953.

Рукопись поступила в издательский отдел

16 мая 1968 года.