ЖТФ, 1969, т.39, 26/III-68
в.10, с.1795-1798

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 3690

В.Г.Маханьков, Б.Г.Щинов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ.II.

1968

P9 - 3690

В.Г.Маханьков, Б.Г.Щинов

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ.II.

Направлено в ЖТФ

В[1] на основе квазилинейной теории была прослежена картина развития апериодической пучковой неустойчивости[2,3] вплоть до ее срыва. При этом, однако, оставался открытым вопрос о влиянии нелинейного взаимодействия гармоник на рассмотренный процесс релаксации. Здесь мы исследуем этот вопрос.

1. Чтобы оценить влияние следующих членов разложения по полю в уравнениях Максвелла, в данном случае достаточно вычислить нелинейный ток второго порядка[x] (см., например, также[4])

$$j^{(2)}_{\vec{k}i} = \sum_{\alpha} \int S^{\alpha}_{iqr}(k, k_1, k_2) E_{\vec{k}_1 q} E_{k_2 r} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 , \qquad (1.1)$$

где $\alpha = 1,2$ индекс 1 относится к пучку, 2 – к плазме. При получении соотношения (1.1) мы использовали следующее представление для полей[xx]

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}'_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r} + \gamma_k t} d\vec{k} = \int \vec{E}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} . \qquad (1.2)$$

С учётом нелинейного тока (1.1) уравнения Максвелла могут быть записаны в виде:

---

[x] Это обстоятельство связано с апериодическим характером рассматриваемой неустойчивости.

[xx] Представление такого вида естественно сужает круг исследуемых возмущений.

$$\left(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j + \frac{\gamma^2}{c^2} \epsilon^{л}_{ij} \right) E_{\vec{k}j} = - \frac{4\pi \gamma_{\vec{k}}}{c^2} j^{(2)}_{\vec{k}i} \quad , \tag{1.3}$$

где

$$\epsilon^{л}_{ij} = \delta_{ij} - \sum_a \left[\delta_{ij} + \frac{v^{(a)}_{0i} v^{(a)}_{0j}}{\omega^2} k^2 + \frac{k_i v^{(a)}_{0j} + v^{(a)}_{0j} k_j}{\omega} \right] \left(\frac{\omega^{(a)}_L}{\omega} \right)^2 ,$$

ω_L – ленгмюровская частота

$$\vec{k} = (k_x , 0 , 0) , \quad \vec{v}_0 = (0, 0, v_{0z}) \; .$$

Здесь ось z – направление относительного движения пучка и плазмы.

В целях упрощения решения (1.3) перейдем в движущуюся систему координат, в которой (см. [3])

$$\sum_a (\omega^{(a)}_L)^2 \, \vec{v}^{(a)} = 0 \; . \tag{1.4}$$

В этой системе все недиагональные элементы $\epsilon^{л}_{ij}$ равны нулю. Таким образом, получим

$$\left(k^2 - k^2_x + \frac{\gamma^2}{c^2} + \sum_a \frac{(\omega^{(a)}_L)^2}{c^2} \right) E_{\vec{k}x} = - \frac{4\pi \gamma_{\vec{k}}}{c^2} j^{(2)}_{\vec{k}x}$$

$$\left(k^2 + \frac{\gamma^2_{\vec{k}}}{c^2} + \sum_a \frac{(\omega^{(a)}_L)^2}{c^2} \right) E_{\vec{k}y} = - \frac{4\pi \gamma_{\vec{k}}}{c^2} j^{(2)}_{\vec{k}y} \tag{1.5}$$

$$\left(k^2_x + \frac{\gamma^2_{\vec{k}}}{c^2} - \sum_a \frac{(\omega^{(a)}_L)^2}{c^2} \left(k^2_x \frac{(v^{(a)}_{0z})^2}{\gamma^2} - 1 \right) \right) E_{kz} = - \frac{4\pi \gamma_{\vec{k}}}{c^2} j_{kz} ,$$

Предполагая нелинейность малой, будем решать систему (1.5) методом последовательных приближений. Из решения линейной задачи следует, что неустойчивыми могут быть только волны с электрическим вектором, направленным вдоль пучка [5]. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся исследованием таких колебаний, у которых $\vec{E} = (0, 0, E_z)$. В нелинейном приближении мы будем рассматривать лишь взаимодействие поперечных колебаний E^t (предполагая амплитуду продольных линейных колебаний E^{ℓ} малой, что может иметь место, например, в ограниченной вдоль z системе с открытыми концами).

В соответствии с этим имеем:

$$\frac{\partial E^t_{\vec{k}z}}{\partial t} = \gamma_{\vec{k}} E^t_{\vec{k}z} - \frac{4\pi\gamma_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \int S^{(\alpha)}_{zzz}(k, k_1, k_2) E^t_{\vec{k}_1 z} E^t_{\vec{k}_2 z} \delta(\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{2\gamma_{\vec{k}} + \dfrac{\sum_{\alpha} 2(\omega^{(\alpha)}_L)^2 (v^{(\alpha)}_{oz})^2 k^2}{\gamma^3_{\vec{k}}}} \tag{1.6}$$

2. Обратимся к вычислению нелинейной поляризуемости $S_{lqr}(k, k_1, k_2)$. Разлагая кинетическое уравнение для функций распределения пучка и плазмы с точностью до членов второго порядка по полю, получим (см., например, [6])

$$S^{(\alpha)}_{lqr} = -e^3 \int \frac{v_l}{\gamma_{\vec{k}} + i\vec{k}\vec{v}} \left[\left(1 + \frac{i}{\gamma_1}(\vec{k}_1\vec{v})\right)\frac{\partial}{\partial p_q} - \frac{i v_q}{\gamma_1}\left(\vec{k}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)\right] \times \tag{2.1}$$

$$\times \frac{1}{\gamma_2 + i\vec{k}_2\vec{v}} \left[\left(1 + \frac{i}{\gamma_2}(\vec{k}_2\vec{v})\right)\frac{\partial}{\partial p_r} - \frac{i v_r}{\gamma_2}\left(\vec{k}_2 \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)\right] f^{(\alpha)}_0 \frac{\partial \vec{p}}{(2\pi)^3},$$

или в интересующем нас гидродинамическом пределе:

$$S^{(\alpha)}_{lqr} = -\frac{(\omega^{(\alpha)}_L)^2 e}{8\pi m \omega_1 \omega_2} \left[\left(\frac{k^2}{\omega^2} v^{(\alpha)}_{0l} \delta_{qr} + \frac{k_1^2}{\omega_1^2} v^{(\alpha)}_{0q} \delta_{lr} + \frac{k_2^2}{\omega_2^2} v^{(\alpha)}_{0r} \delta_{lq} \right) + \right. \tag{2.2}$$

$$\left. + \left(\frac{k^2}{\omega^2} \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)}{\omega_1\omega_2} + \frac{k_1^2}{\omega_1^2} \frac{(\vec{k}\vec{k}_2)}{\omega\omega_2} + \frac{k_2^2}{\omega_2^2} \frac{(\vec{k}\vec{k}_1)}{\omega\omega_1} \right) v^{(\alpha)}_{0l} v^{(\alpha)}_{0q} v^{(\alpha)}_{0r} \right].$$

Учитывая, что выполнено условие $(v_0^{(2)})^2 \ll \frac{n_1}{n_2}(v_0^{(1)})^2$ (которое следует из формулы (1.4)), выражение для нелинейной поляризуемости плазмы можно легко упростить[x/]:

---

x/ Отметим, что, так как $S^{(2)}_{lqr} \sim v_0^{(2)}$, то в системе координат, где плазма покоится, ее нелинейный ток не входит в уравнение для поля E^t_{kz}.

$$S^{(2)}_{lqr} = -\frac{(\omega^{(2)}_L)^2 e}{8\pi m\,\omega_1\omega_2}\left(\frac{k^2}{\omega^2} v^{(2)}_{0l}\delta_{qr} + \frac{k_1^2}{\omega_1^2} v^{(2)}_{0q}\delta_{lr} + \frac{k_2^2}{\omega_2^2} v^{(2)}_{0r}\delta_{lq}\right). \qquad (2.3)$$

Как показано в работе /1/, линейный инкремент апериодической пучковой неустойчивости может быть записан в следующей форме:

$$\gamma_{\vec{k}} = \omega^{(2)}_L \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/2} \frac{v^{(1)}_{0z}}{c} \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + (\omega^{(2)}_L)^2}}. \qquad (2.4)$$

Сравнивая $k_x v^{(1)}_{0z}$ и инкремент $\gamma_{\vec{k}}$, определяемый формулой (2.3), можно легко получить следующее неравенство

$$\frac{\gamma_{\vec{k}}}{k v^{(1)}_0} \lessapprox \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/2}. \qquad (2.5)$$

Используя это обстоятельство, можно упростить выражение для поляризуемости:

$$S^{(1)}_{lqr} = \frac{(\omega^{(1)})^2 e}{8\pi m\,\gamma_1\gamma_2}\left(\frac{k^2}{\gamma^2}\frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)}{\gamma_1\gamma_2} + \frac{k_1^2}{\gamma_1^2}\frac{(\vec{k}\vec{k}_2)}{\gamma\gamma_2} + \frac{k_2^2}{\gamma_2^2}\frac{(\vec{k}\vec{k}_1)}{\gamma\gamma_1}\right) v^{(1)}_{0l} v^{(1)}_{0q} v^{(1)}_{0r}. \qquad (2.6)$$

3. В /1/ была оценена величина магнитной энергии W_H к моменту срыва неустойчивости, обязанная ей своим происхождением

$$W_H \lessapprox n_1 m (v^{(1)}_0)^2 \frac{n_1}{n_2} \frac{(\omega^{(2)}_L)^2}{k^2c^2 + (\omega^{(2)}_L)^2}. \qquad (3.1)$$

Оценим влияние нелинейного члена в уравнении для поля E^{t}_{kz} при величине поля, определяемой соотношением (3.1).

Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial E^{t}_{\vec{k}z}}{\partial t} = \gamma_{\vec{k}} E^{t}_{\vec{k}z} + \frac{4\pi\gamma_{\vec{k}} \int \left(S^{(1)}_{zzz} + S^{(2)}_{zzz} \right) E^{t}_{\vec{k}_1 z} E^{t}_{\vec{k}_2 z}\, \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)\, d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2}{- \dfrac{2 (\omega_L^{(1)})^2 (v_{0z}^{(1)})^2}{\gamma_k^3}\, k^2}, \qquad (3.2)$$

где $S^{(1)}_{zzz}$ определяется формулой (2.6), а $S^{(2)}$ – формулой (2.3). В тех же предположениях нетрудно показать, что $(S^{(1)} / S^{(2)}) \approx \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{1/2}$. Поэтому для оценок мы везде будем оставлять в нелинейном токе функцию $S^{(1)}_{zzz}$.

Максимальным инкрементом обладают гармоники, у которых k заключено в интервале

$$\frac{\omega_L}{c} < k < \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2} \left(\frac{v_0^{(1)}}{v_T(t)} \right) \frac{\omega_L}{c} , \qquad (3.3)$$

а интервал этот с течением времени сокращается $v_T \to v_T^{*} = v_0^{(1)} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{1/2}$ (неустойчивость переходит в квазилинейную стадию, рассмотренную в /7/). Поэтому в оценках мы будем использовать для $|H_{\vec{k}}|^2$ формулу $|H_{\vec{k}}|^2 = |H|^2 \delta(\vec{k} - \vec{k}_0)$, где $k_0 = \frac{\omega_L}{c}$.

Имея в виду вышесказанное и формулу (3.1), получим к концу квазилинейной релаксации, что отношение нелинейного числа к линейному – порядка a, где a равно:

$$a = \left(W_H / n_1 m (v_0^{(1)})^2 \right) \frac{n_2}{n_1} < 1 .$$

Отсюда следует, что учёт нелинейных эффектов не может заметно изменить результаты, полученные в первой части работы.

Оценим, наконец, величину амплитуды продольного поля $E^{\ell}((\vec{E}^{\ell}\,\vec{k}) \neq 0)$, возникающего в результате нелинейного взаимодействия к моменту срыва неустойчивости. Используя первое уравнение системы (1.5), в приближении слабой нелинейности легко получить

$$\frac{E^{\ell}}{E^{t}} = \frac{\omega_L}{c k} \left(\frac{n_1}{n_2} \right) \ll 1 .$$

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В.Н.Цытовичу за плодотворные дискуссии.

Литература

1. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме, Изд-во НАУКА, Москва, 1967г.
2. S.Neufield, P.H.Doyle. Phys. Rev. 121, 654 (1961), 127, 846 (1962).
3. В.Г.Маханьков, А.А.Рухадзе. Ядерный синтез 2, 177 (1962).
4. В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. ЖЭТФ 45, 1613 (1963).
5. В.Г.Маханьков. Препринт ОИЯИ 1180, Дубна, 1963.
6. В.Н.Цытович. УФН, 90, 435 (1966).
7. В.Г.Маханьков, В.И.Шевченко. Препринт ОИЯИ Р-1652, 1964 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1968 года.