ПТЭ, 1967, N6, с. 40-41

20/XII-67

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 3552

И.М. Баженова, Л.П. Зиновьев, Р.Н. Федорова

ОШИБКИ ЮСТИРОВКИ В ЭЛЕМЕНТАХ ИОНО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1967.

Бажинова И.М., Зиновьев Л.П., Федорова Р.Н. Р9-3552

Ошибки юстировки в элементах ионно-оптической системы и их влияние на уравнение движения частицы

Выведены уравнения движения частицы через произвольную ионно-оптическую систему с учётом влияния основных ошибок установки. На основе полученных формул даны соотношения, определяющие изменение выходящего пучка, вызванные ошибками установки. Общая теория проиллюстрирована частными задачами и практическим примером расчёта новой системы инжекции в синхрофазотрон.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1967.

Bazhenova I.M., Zinoviev L.P., Fedorova R.N. P9-3552

Adjustment Errors in the Ion-Optical System Units and Their Effect on the Particle Motion Equation

The equations of particle motion through the arbitrary ion-optical system are derived taking into account the effect of the main errors of this device. On the basis of the equations obtained the ratio is given, which determines the transformations of the exit beam, which are due to these errors. General theory is proved by private problems and by a practical example of calculation of a new system of injection into the synchrophasotron.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1967.

P9 - 3552

И.М. Баженова, Л.П. Зиновьев, Р.Н. Федорова

ОШИБКИ ЮСТИРОВКИ В ЭЛЕМЕНТАХ ИОНО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

Выведены уравнения движения частицы через произвольную ионо-оптическую систему с учётом влияния основных ошибок установки. На основе полученных формул даны соотношения, определяющие изменения размеров выходящего пучка, вызванные ошибками установки. Общая теория проиллюстрирована частными задачами и практическим примером расчёта новой системы инжекции в синхрофазотрон ОИЯИ.

При проектировании и расчёте допусков на установку магнитных фокусирующих систем, имеющих значительную протяженность и большое количество элементов (линз, магнитов, электростатических конденсаторов), необходимо учитывать влияние различных отклонений действительных значений параметров системы от расчётных.

В отличие от /1/, где для периодической структуры линейного ускорителя дано влияние ошибок установки его линз на параметры выходящего пучка, рассмотрим в общем виде видоизмененные решения линеаризованных уравнений движения частицы через произвольную поворотно-фокусирующую систему с учётом всех отклонений основных ее параметров.

В дальнейшем будет использована декартова система координат (x, y, z) и рассмотрены уравнения движения частицы в горизонтальной (x, z) и вертикальной (y, z) плоскостях, где ось z направлена вдоль оси системы.

1. Отклонения в параметрах одного элемента системы (градиент, длина линзы и т.д.) и их влияние на уравнение движения через данный элемент

Пусть $M_{ij} = \| m_{ij} \|$ $(i, j = 1,2,3)$ есть матрица преобразования через p-ый элемент системы. Каждый член матрицы M_{ij} зависит от параметров $q_1, q_2, \dots q_n$, характеризующих p-ый элемент: $m_{ij} = m_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Найдем матрицу $M'_{ij} = \| m'_{ij} \|$, описывающую движение частицы с учётом отклонений $\pm \delta q_1, \dots, \pm \delta q_n$ его параметров, для чего разложим m'_{ij} в ряд:

$$m'_{ij}(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n) = m_{ij}(q_1, \dots, q_n) + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_n} \delta q_p + \dots (i=1,2; \; j=1,2,3.).$$

Следовательно,

$$M'_{ij} = M_{ij} + \delta M_{ij}, \tag{1.1}$$

где δM_{ij} – матрица поправки, элементы которой имеют вид:

$$\delta m_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_p} \delta q_p .$$

В качестве примера применения формулы (1.1) определим матрицу поправки δM для квадрупольной линзы, у которой параметр $k = \sqrt{\frac{1}{H r} \frac{\partial H_x}{\partial y}}$ отличается от номинала на некоторую величину δk.

Как известно [2], матрица M для квадрупольной линзы имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} \cos k\ell & \frac{1}{k} \sin k\ell \\ -k \sin k\ell & \cos k\ell \end{pmatrix} .$$

Тогда

$$\delta M = \begin{pmatrix} -\ell \sin k\ell & \frac{1}{k^2}(k\ell \cos k\ell - \sin k\ell) \\ -k\ell \cos k\ell - \sin k\ell & -\ell \sin k\ell \end{pmatrix} \delta k .$$

II. Ошибки установки элемента системы и их влияние на уравнение движения через данный элемент

Предположим, что при установке поворотно-фокусирующей системы допущен поворот p -ого элемента ее на малую величину $\delta\vec{\phi}\,(\delta\phi_1, \delta\phi_2, \delta\phi_3)$ и смещение его на величину $\vec{r}\,(r_x, r_y, r_z)$ (см.рис.1). Пусть система координат (X, Y, Z) связана с действительным положением p -ого элемента, а система координат (x, y, z) – с его идеальным положением.

Запишем формулы преобразования координат, соответствующие пространственному повороту на величину $\delta\vec{\phi}$ и смещению на величину $\vec{r}$:

$$
\begin{aligned}
X &= x + y\,\delta\phi_3 - z\,\delta\phi_2 + r_x; \\
Y &= -x\,\delta\phi_3 + y + z\,\delta\phi_1 + r_y; \qquad \text{(II,1)} \\
Z &= x\,\delta\phi_3 - y\,\delta\phi_1 + z + r_z.
\end{aligned}
$$

Дифференцируя соотношение (II.1) по Z и отбрасывая величины второго порядка малости, после соответствующих преобразований получим следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
X' &= x' + y'\,\delta\phi_3 - \delta\phi_2 \\
Y' &= -x'\,\delta\phi_3 + y' + \delta\phi_1 \qquad \text{(II,2)} \\
1 &= x'\,\delta\phi_2 - y'\,\delta\phi_1 + 1,
\end{aligned}
$$

где

$$
x' = \frac{dx}{dz}, \quad y' = \frac{dy}{dz}, \quad X' = \frac{dX}{dZ}, \quad Y' = \frac{dY}{dZ}.
$$

Заряженная частица в пространстве (x, y, z) характеризуется вектором $\vec{k}$, а в пространстве (X, Y, Z) – вектором $\vec{k}$

$$\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{k} = \begin{pmatrix} X \\ X' \\ Y \\ Y' \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Используя формулы (II.1) и (II,2), запишем следующее соотношение между $\vec{k}$ $\vec{\kappa}$ в матричном виде:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta\phi_3 & 0 & -\delta\phi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta\phi_3 & 0 & -\delta\phi_2 \\ -\delta\phi_3 & 0 & 1 & 0 & \delta\phi_1 & 0 \\ 0 & -\delta\phi_3 & 0 & 1 & 0 & \delta\phi_1 \\ \delta\phi_2 & 0 & -\delta\phi_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta\phi_2 & 0 & -\delta\phi_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\kappa} \qquad (II,3)$$

Обозначим в (II.3) матрицу преобразования через R и запишем общее преобразование, связывающее векторы $\vec{k}$ и $\vec{\kappa}$,

$$\vec{k} = R\,\vec{\kappa} + \vec{r}\,. \qquad (II.4)$$

С другой стороны,

$$\vec{k}_2 = M\,\vec{k}_1\,, \qquad (II.5)$$

где

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} m_{11} & m_{12} & & & & \\ m_{21} & m_{22} & & & & \\ \hline & & \ell_{11} & \ell_{12} & & \\ & & \ell_{21} & \ell_{22} & & \\ \hline & & & & 1 & L \\ & & & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- матрица преобразования через p -ый элемент системы, $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ -векторы на входе и выходе из этого элемента.

Подставив (II.5) в (II.4) и перейдя к начальному вектору $\vec{\kappa}_0$ и конечному вектору $\vec{\kappa}$ в системе координат (x, y, z), получим:

$$M(R\Lambda\vec{\kappa}_0 + \vec{r}) = R\Lambda\vec{\kappa} + \vec{r}, \qquad \text{(II.6)}$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & r_z & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & r_z & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & & 1 & r_z \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножая (II.6) слева на $(R\Lambda)^{-1}$, получим:

$$(R\Lambda)^{-1} M (R\Lambda)\vec{\kappa}_0 + (R\Lambda)^{-1} M \vec{r} = (R\Lambda)^{-1}(R\Lambda)\vec{\kappa} + (R\Lambda)^{-1}\vec{r}.$$

Откуда

$$\vec{\kappa} = \Lambda^{-1} R^{-1} M R \Lambda \vec{\kappa}_0 + \Lambda^{-1} R^{-1} (M - E)\vec{r} \qquad \text{(II.7)}$$

(E - единичная матрица).

После перемножения матриц в (II.7) получим следующее выражение для вектора $\vec{\kappa}$ в окончательном виде:

$$\vec{\kappa} = M\vec{\kappa} + \delta M \vec{\kappa}_0 + \vec{m}, \qquad \text{(II. 8)}$$

где $\vec{m}$ и δM есть:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} (m_{11} - 1) r_x \\ m_{21} r_x \\ (\rho_{11} - 1) r_y \\ \rho_{21} r_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta M=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
-m_{21}r_z & (m_{11}-m_{22})r_z & (m_{11}-\ell_{11})\delta\phi_3 & (m_{12}-\ell_{12})\delta\phi_3 & (1-m_{11})\delta\phi_2 & (L-m_{12})\delta\phi_2 \\ \hline
0 & m_{21}r_z & (m_{21}-\ell_{21})\delta\phi_3 & (m_{22}-\ell_{22})\delta\phi_3 & -m_{21}\delta\phi_2 & (1-m_{22})\delta\phi_2 \\ \hline
(m_{11}-\ell_{11})\delta\phi_3 & (m_{12}-\ell_{12})\delta\phi_3 & -\ell_{21}r_z & (\ell_{11}-\ell_{22})r_z & (\ell_{11}-1)\delta\phi_1 & (\ell_{12}-L)\delta\phi_1 \\ \hline
(m_{21}-\ell_{21})\delta\phi_3 & (m_{22}-\ell_{22})\delta\phi_3 & 0 & \ell_{21}r_z & \ell_{21}\delta\phi_1 & (\ell_{22}-1)\delta\phi_1 \\ \hline
(1-m_{11})\delta\phi_2 & (L-m_{12})\delta\phi_2 & (\ell_{11}-1)\delta\phi_1 & (\ell_{12}-L)\delta\phi_1 & 0 & 0 \\ \hline
-m_{21}\delta\phi_2 & (1-m_{22})\delta\phi_2 & \ell_{21}\delta\phi_1 & (\ell_{22}-1)\delta\phi_1 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Обшая формула (II. 8) дает возможность определять ошибки частного вида, допущенные при установке отдельных элементов системы.

В качестве примера рассмотрим влияние смешения элемента системы на некоторую величину δL в направлении оси Z (см.рис.2).

В этом случае, согласно формуле (II . 8), имеем:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\delta L & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & -\delta L \\ & & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} M_x & \\ \hline & M_y \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \delta L & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & \delta L \\ & & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{\kappa} = M\,\vec{\kappa}_0 + \delta M\,\vec{\kappa}_0 \quad ,$$

где

$$\delta M = \left(\begin{array}{cc|cc} -m_{21} & m_{11}-m_{22} & & \\ 0 & m_{21} & & \\ \hline & & -\ell_{21} & \ell_{11}-\ell_{22} \\ & & 0 & \ell_{21} \end{array}\right) \delta L \ .$$

При смещении одного элемента в плоскости (x, z) на величину r относительно оси x и повороте на угол ϕ (см.рис.3), уравнение движения в горизонтальной плоскости имеет вид:

$$\vec{x} = M_x\,\vec{x}_0 + \vec{m}_1 \ ,$$

где

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} - 1 \\ m_{21} \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} L - m_{12} \\ 1 - m_{22} \end{pmatrix} \phi$$

(L -длина элемента).

Формулы для вертикальной плоскости могут быть получены аналогичным путем.

Пусть при установке системы допущен поворот элемента системы в плоскости (x, y) на некоторый угол ϕ (рис. 4).

Тогда получим следующую формулу для уравнения движения через данный элемент системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} m_{11} & m_{12} & (m_{11}-\ell_{11})\phi & (m_{12}-\ell_{12})\phi \\ \hline m_{21} & m_{22} & (m_{21}-\ell_{21})\phi & (m_{22}-\ell_{22})\phi \\ \hline (m_{11}-\ell_{11})\phi & (m_{12}-\ell_{12})\phi & \ell_{11} & \ell_{12} \\ \hline (m_{21}-\ell_{21})\phi & (m_{22}-\ell_{22})\phi & \ell_{21} & \ell_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

Обозначив матрицу уравнения движения по горизонтали через M_x , а по вертикали $- M_y$, перепишем последнее соотношение:

$$\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} M_x & (M_x - M_y)\phi \\ (M_x - M_y)\phi & M_y \end{pmatrix} \vec{\kappa}_0$$

III. Общее уравнение движения через поворотно-фокусирующую систему с учётом влияния ошибок установки

Рассмотрим поворотно-фокусирующую систему, состоящую из n элементов. Запишем уравнение движения частицы через эту систему в виде:

$$\vec{\kappa} = M\vec{\kappa}_0\ ,\ M = M_n M_{n-1} \ldots M_i \ldots M_1 . \qquad (III,1)$$

Здесь M_i –матрица i –го элемента $(i = 1,2,\ldots, n)$.

Преобразуем уравнение (III. 1) с учётом ошибок типа I и II. Пусть в i –ом элементе данной системы имеются ошибки. Тогда уравнение движения через этот элемент запишется в виде:

$$\vec{\kappa}_i = M_i \vec{\kappa}_0 + (\delta M_{iI} + \delta M_{iII})\vec{\kappa}_0 + \vec{m}_i\ . \qquad (III.2)$$

Предположим, что в "k" элементах системы имеются перечисленные выше ошибки. Подставим (III. 2) в уравнение (III. 1). Получим следующее уравнение движения в окончательном виде:

$$\vec{\kappa} = M\vec{\kappa}_0 + \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{j+1} M_{ij} (\delta M_{ijI} + \delta M_{ijII}) \prod_{i=j-1}^{1} M_{ij}\,)\,\vec{\kappa}_0 + \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=n}^{j+1} M_{ij}\,\vec{m}_{ij}\ . \qquad (III.\ 3)$$

Рассмотрим в качестве примера систему, состоящую из 3-х линз, из которых в двух крайних имеется перекос, а в средней – нет.

Обозначим M_1, M_3, M_5, M_7 – матрицы преобразования через свободное пространство,

M_2, M_4, M_6 – матрицы преобразования через линзы.

Запишем уравнение движения через систему без перекоса

$$\vec{x} = M_7 M_6 M_5 M_4 M_3 M_2 M_1 \vec{x}_0\ ,$$

при наличии перекоса уравнение перепишется в виде:

$$\vec{x} = M_7\,(M_6\,M_5\,M_4\,M_3\,(M_2\,M_1\,\vec{x}_0 + \vec{m}_2) + \vec{m}_6$$

или

$$\vec{x} = M_7\,M_6\,M_5\,M_4\,M_3\,M_2\,M_1\,\vec{x}_0 + M_7\,M_6\,M_5\,M_4\,M_3\vec{m}_2 + M_7\,\vec{m}_6\,,$$

где

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

IV Изменения в размерах транспортируемого пучка

Рассмотренные выше ошибки приводят к некоторой погрешности в линейных и угловых размерах пучка, транспортируемого через статическую систему.

Пусть пучок на входе в систему задан фазовым эллипсом $\gamma_0 x^2 + 2\alpha_0 x x' + \beta_0 x'^2 = \epsilon$, где $\gamma_0 \beta_0 - \alpha_0^2 = 1$, $\epsilon \;\; a\,b$ (a, b полуоси эллипса). Как известно[3], зная матрицу преобразования

$$M = \| m_{ij} \| \qquad (i,j = 1,2)$$

через данную систему и эллипс на входе можно получить фазовый эллипс на выходе из системы по формулам:

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22}^2 & 2m_{21}m_{22} & m_{21}^2 \\ -m_{12}m_{22} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{11}m_{21} \\ m_{12}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{11}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

Из предыдущего следует, что уравнение движения через систему с учётом ошибок установки ее элементов приводится к виду:

$$\vec{\kappa} = (M + \delta M)\,\vec{\kappa}_0 + C\,\vec{m}\,. \qquad \text{см}(\text{III}.3)$$

$$C = \text{const}\,.$$

Следовательно, с точностью до членов второго порядка

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \delta A \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\delta A = \left(\begin{array}{c|c|c} 2m_{22}\delta m_{22} & -2\,(m_{21}\delta m_{22} + m_{22}\delta m_{21}) & 2m_{21}\delta m_{21} \\ \hline -m_{12}\delta m_{22} + m_{22}\delta m_{12} & m_{11}\delta m_{22} + m_{22}\delta m_{11} + m_{12}\delta m_{21} + m_{21}\delta m_{12} & -m_{11}\delta m_{21} + m_{21}\delta m_{11} \\ \hline 2m_{12}\delta m_{12} & -2(m_{11}\delta m_{12} + m_{12}\delta m_{11}) & 2m_{11}\delta m_{11} \end{array}\right)$$

Так как апертура пучка определяется формулой:

$$R^2 = x^2_{max} + y^2_{max} = \epsilon_x\beta_x + \epsilon_y\beta_y,$$

апертура пучка с учётом ошибок установки

$$(R')^2 = \epsilon_x(\beta_x + \Delta\beta_x) + \epsilon_y(\beta_y + \Delta\beta_y), \text{ то}$$

изменение апертуры

$$\Delta R^2 = \epsilon_x\Delta\beta_x + \epsilon_y\Delta\beta_y .$$

Кроме этого, при оценке апертурных соотношений необходимо учитывать, что наличие вектора $C\vec{m}$ в уравнении движения с учётом ошибок установки приводит к смещению центра фазового эллипса на величины Cm_x и Cm_y.

Определяя поправку на размер пучка как среднее квадратичное от поправок, обусловленных каждым из имеющихся видов ошибок установки, находим допуски на элементы системы.

Уравнение движения II – 8 с учётом ошибок установки использовалось при анализе допусков на элементы ахроматической поворотно-фокусирующей системы ввода пучка в синхрофазотрон на 10 Гэв [4] (рис. 5).

Установлено, что смещение элемента 1 в направлении x, равное 0,1 см, вызывает соответствующее перемещение оси пучка на выходе из системы на величину $\Delta x = -0{,}178$ см, а такое же смещение элемента 3 дает $\Delta x = 0{,}594$ см. Эти два смещения дают также расходимость пучка соответственно $\Delta x' = 1{,}29.10^{-4}$, $\Delta x' = 7{,}8.10^{-7}$.

Из приведенного примера следует, что допуски на установку различных (по порядку следования) элементов системы должны быть неодинаковыми. Общие и частные вопросы, связанные с анализом допусков и суммированием действия первичных ошибок установки, будут освещены нами отдельно.

Литература

1. А.Д.Власов. Теория линейных ускорителей. Атомиздат, Москва, 1964 г.
2. Дж.Ливингуд. Принципы работы циклических ускорителей. Издательство иностранной литературы, Москва. 1963 г.
3. В.В.Миллер. ПТЭ, 6, 1964 г.
4. И.М.Баженова, Л.П.Зиновьев, Р.Н.Федорова, А.И.Широкова. Ахроматическая поворотно-фокусирующая система для ввода частиц в синхрофазотрон ОИЯИ. Препринт ОИЯИ, 9-3046, Дубна, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел

октября 1967 года.

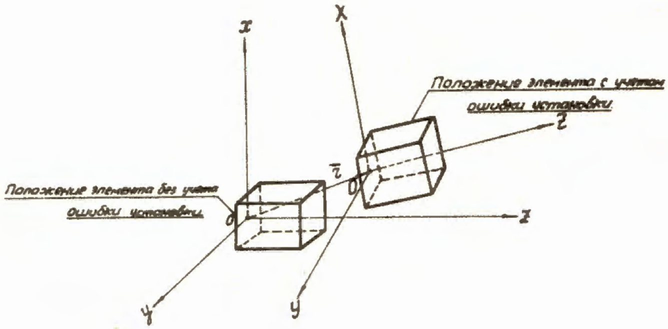

Рис. 1. Смещение элемента при установке системы.

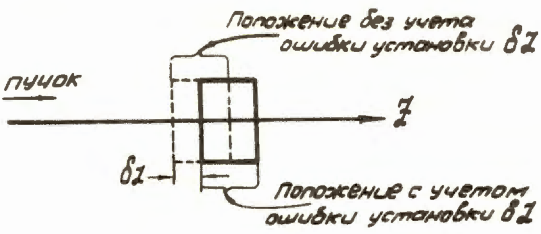

Рис. 2. Продольное смещение элемента.

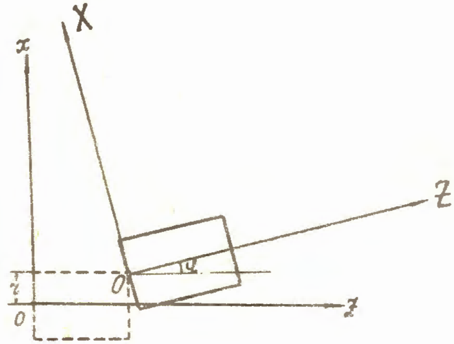

Рис. 3. Поворот и параллельный перенос элемента системы.

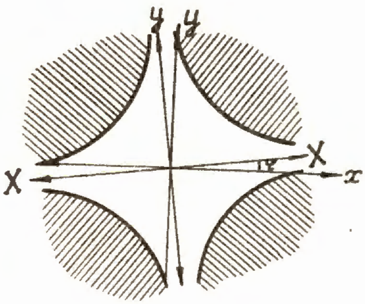

Рис. 4. Перекос в кавдруполе относительно оси z, направленной $\perp$ к плоскости (x,y).

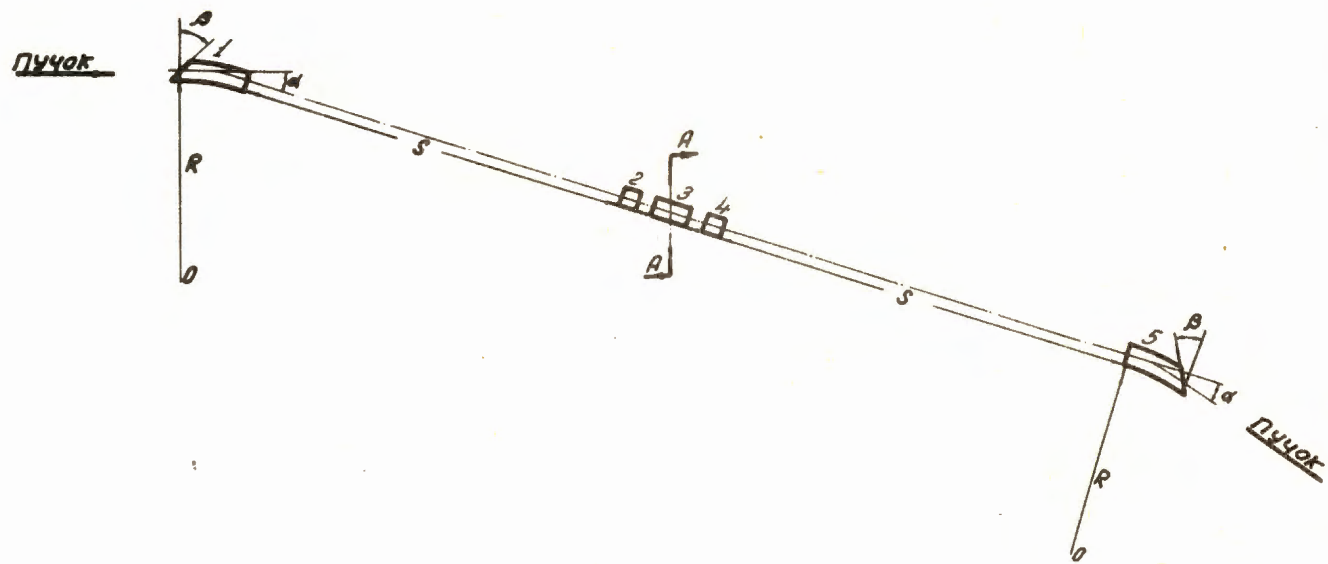

Рис. 5. Поворотно-фокусирующая система, рассмотренная в примере.