

Д-153

Rev. Roum. Phys., 1968,  
T. 13, N5, p 427-450

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 3542



В.И. Данилов, М. Ианович

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ  
РАВНОМЕРНО НАМАГНИЧЕННЫХ ОБЪЕМОВ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

1967.

## В в е д е н и е

В Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ при решении ряда задач широко используется расчёт магнитных полей от намагниченных ферромагнитных тел, основанный на предположении равномерного намагничивания их объемов во внешнем однородном поле. При этом под равномерным намагничиванием понимается такое магнитное состояние тела, при котором вектор намагниченности в любой внутренней точке постоянен по величине и направлению.

Первое применение для ускорителей заряженных частиц расчётов магнитных полей от ферромагнитных тел, основанных на предположении их равномерного намагничивания, было сделано в работе <sup>/1/</sup>. Известно, что поверхностная дивергенция вектора намагниченности обуславливает внутри тела магнитное поле, называемое как "размагничивающее поле". Лишь в телах, ограниченных поверхностями второго порядка (эллипсоиды вращения, сферойды, оvoidы, эллиптические цилиндры), размагничивающее поле постоянно при условии, что внешнее поле однородно, что действительно обеспечивает их равномерное намагничивание.

В телах, не ограниченных поверхностями второго порядка, размагничивающее поле неравномерно. К таким телам относятся, например, прямоугольные бруски, цилиндры или криволинейные шиммы. Расчёт магнитного поля таких тел имеет важное практическое значение при решении ряда физических задач, а также нашел широкое применение в технике ускорителей заряженных частиц <sup>/2/ + /12/</sup>.

Близость магнитного состояния к равномерному намагничиванию в общем случае определяется как величиной внешнего магнитного поля, так и геометрическими размерами рассматриваемых тел.

Для ряда практических задач, таких как формирование магнитных полей в ускорителях заряженных частиц, магнитное состояние рассматриваемых конфигураций шимм близко к насыщению, при котором вектор намагниченности можно считать практически постоянным по величине, а отклонение вектора намагниченности по направлению малым, т.е. считать такое намагниченное тело очень близким к равномерному намагничению. Это связано с тем, что один из поперечных размеров шимм в сечении больше другого, а внешнее намагничивающее поле составляет довольно большую величину, как правило, несколько тысяч гаусс.

В данной работе определяется выражение для составляющих магнитного поля от намагниченной кольцевой секториальной шиммы, как общего случая равномерно намагниченной цилиндрической шиммы постоянной высоты.

Показывается, что полученные выражения могут быть использованы для точного расчёта составляющих поля как внутри, так и вне кольцевого секториального соленоида с током, протекающим по его контуру в бесконечном малом слое.

### 1. Общая постановка задачи

В общем случае магнитное состояние тела и распределение составляющих магнитного поля можно определить из следующей системы уравнений <sup>1/3/</sup>

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\Sigma} &= \vec{H}_0 + \vec{H}, \\ \vec{H} &= \text{grad } \phi, \\ \vec{M}(\vec{r}') &= f(\vec{H}_{\Sigma}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $\vec{H}_0$  — напряженность внешнего намагничивающего поля;  $\vec{H}$  — напряженность магнитного поля, созданная совокупностью магнитных диполей в объеме  $v'$ ;  $\vec{H}_{\Sigma}$  — результирующая напряженность магнитного поля, внутри объема рассматриваемого тела, либо вне его;  $\phi$  — скалярный потенциал намагниченного тела;  $\vec{M}(\vec{r}')$  — магнитный момент или намагниченность элемента объема в точке  $\vec{r}'$ .

В общем случае решение этой системы уравнений представляет значительные трудности и в основном осложнено нелинейностью и неоднозначностью последнего уравнения в (1.1).

Заметим, что лишь для тел эллипсоидальной формы без учёта гистерезиса система уравнений (1.1) имеет строгое решение.

Выражение скалярного потенциала в пространстве, свободном от токов проводимости, имеет вид<sup>/14/</sup>

$$\phi = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{v'} \vec{M}(\vec{r}') \operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\vec{\rho}|} \right) dv'; \quad (1.2)$$

где  $|\vec{\rho}| = |\vec{r}' - \vec{r}|$  - вектор-расстояние от точки наблюдения до элементарного объема  $dv'$  (см. рис. 1),  $\vec{r}'$ ,  $\vec{r}$  - векторы-положения элементарного объема и точки наблюдения.

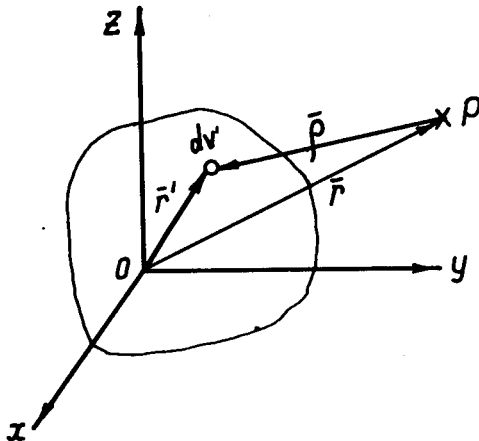


Рис. 1.

Если ввести единичный вектор  $\vec{a}(\vec{r}')$ , совпадающий с направлением намагниченности в точке  $r'$ , то в предположении, что величина намагниченности в каждой точке рассматриваемого объема постоянна, можно записать

$$\vec{M}(\vec{r}') = M \vec{a}(\vec{r}'), \quad (1.3)$$

где  $M$  является постоянной величиной и по физическому смыслу равной средней намагниченности. С учётом (1.3) и того, что  $\operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\vec{\rho}|} \right) = -\frac{\vec{\rho}}{\rho^3}$ , выражение скалярного потенциала (1.2) можно записать как

$$\Phi(r, \phi, z) = \frac{M}{4\pi\mu_0} \int_{v'} \frac{\bar{a}(r')(\bar{r}' - \bar{r})}{|\bar{r}' - \bar{r}|^3} dv' = \frac{M}{4\pi\mu_0} \psi(r, \phi, z) \quad (1.4)$$

потенциал (1.4) можно представить, используя метод, описанный в работе /15/, в виде ряда по степеням  $\frac{M}{H_0} \ll 1$

$$\psi(r, \phi, z) = \psi_1 + \epsilon \psi_2 + \epsilon^2 \psi_3 + \dots, \quad (1.5)$$

где

$$\epsilon = \frac{M}{H_0}.$$

Если предполагать, что  $H_0$  - внешнее намагничивающее поле имеет только одну компоненту  $H_{0x}$ , то из (1.4), (1.5) получим для скалярного потенциала в первом и втором приближениях следующие выражения /15/

$$\psi_1 = \int_{v'} \frac{z' - z}{|\bar{r}' - \bar{r}|^3} dv' \quad (1.6)$$

$$\psi_2 = \int_{v'} \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x'}(x' - x) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y'}(y' - y)}{|\bar{r}' - \bar{r}|^3} dv'. \quad (1.7)$$

Поправка  $\psi_2$  к скалярному потенциалу  $\psi$  (1.5) позволяет аналитически дать оценку первого приближения  $\psi_1$  при расчёте полей от намагниченных тел неэллипсоидальной формы при намагничивании их, близком к насыщению.

При условии, что намагничивающее поле имеет по-прежнему только одну компоненту либо по оси  $x$ , либо по оси  $y$ , соответствующее выражение первого и второго приближений для скалярного потенциала легко получить из (1.6) + (1.7) циклической перестановкой индексов, т.е. заменой  $z' \rightarrow x'$ ,  $y' \rightarrow z \rightarrow x$ ,  $y$  соответственно.

В настоящей работе определяются компоненты поля от намагниченных цилиндрических конфигураций, общим случаем которых является часть цилиндрического кольца с центральным углом  $2\phi_0$  и высотой  $2h$  (см. рис.2). Эту конфигурацию в дальнейшем будем называть кольцевым сектором.

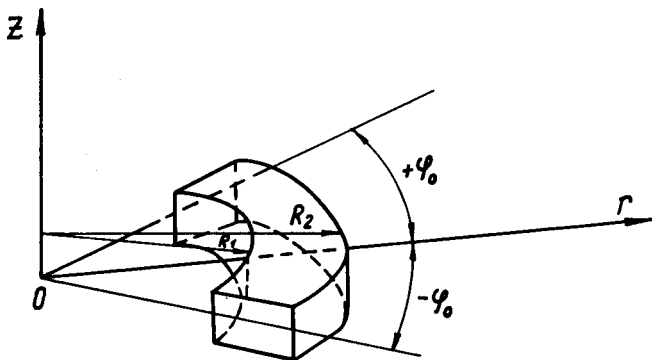


Рис. 2.

Для однородного по оси  $z$  намагничивающего поля в цилиндрической системе координат выражение скалярного потенциала в первом и втором приближениях, согласно (1.6) и (1.7), имеет вид

$$\Psi_1 = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \int_{-h}^h \frac{dz'}{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{1/2}} \quad (1.8)$$

$$\Psi_2 = \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \int_{-h}^h dz' \left\{ \frac{\partial \Psi_1}{\partial r'} \frac{r' - r \cos(\phi' - \phi)}{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{3/2}} \right. \quad (1.9)$$

$$\left. - \frac{1}{r'^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi'} \frac{r' r \sin(\phi' - \phi)}{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{3/2}} \right\}$$

где  $R_1$  и  $R_2$ ,  $2\phi_0$ ,  $2h$  - внутренний и внешний радиусы, угловая протяженность и высота, соответственно;  $r$ ,  $\phi$ ,  $z$  - координаты переменной точки элементарного объема  $dV' = r' dr' d\phi' dz'$ .

## 2. Скалярный потенциал. Первое приближение

Так как величина обратного расстояния

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{[(z' - z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{1/2}} \quad (2.1)$$

в общем случае является функцией как координат точек наблюдения, так и координат переменной точки элементарного объема  $dv'$ , то при интегрировании выражения (1.8) необходимо различить случаи, когда

$$z \geq z', \quad \phi \geq \phi'. \quad (2.2)$$

Математически различные случаи, описываемых неравенством (2.2), сводится к тому, чтобы в выбранных областях пространства, где имеется решение для поля, величины  $(z' - z)$  или  $(z - z')$ , а также  $(\phi' - \phi)$  или  $(\phi - \phi')$ , входящие в соотношение (2.1), были бы положительными <sup>1/16/</sup>.

Так, например, внутри тела при  $-h < z < h$  и  $-\phi_0 < \phi < \phi_0$  скалярный потенциал имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{-\phi_0}^{\phi} d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[ \int_{-h}^z \frac{dz'}{[(z-z')^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi-\phi')]^{1/2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{-h}^h \frac{dz'}{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi-\phi')]^{1/2}} \right] + \int_{\phi}^{\phi_0} d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[ \int_{-h}^z \frac{dz'}{[(z-z')^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi'-\phi)]^{1/2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{-h}^h \frac{dz'}{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi'-\phi)]^{1/2}} \right] \right\} \quad (2.3) \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничим рассмотрение скалярного потенциала и компонент поля одним из случаев, представляющим определенный практический интерес, когда  $z > h$ , либо  $z < -h$  и  $-\phi_0 < \phi < \phi_0$ .

Так как при  $z < -h$  и  $-\phi_0 < \phi < \phi_0$ , то для скалярного потенциала имеем

$$\Psi_1 = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{-\phi_0}^{\phi} d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \int_{-h}^h \frac{dz'}{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi - \phi')]^{1/2}} \right\} + \quad (2.4)$$

$$+ \int_{\phi}^{\phi_0} d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \int_{-h}^h \frac{dz'}{[(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi' - \phi)]^{1/2}}$$

Если ввести новые переменные

$$z' - z = \gamma, \quad (2.5)$$

$$\phi' - \phi = \alpha \quad \text{или} \quad \phi - \phi' = \alpha, \quad (2.6)$$

то выражение (2.4) можно записать в виде

$$\Psi_1 = \int_{\phi+\phi_0}^{\phi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{\Lambda^{1/2}} - \int_{\phi}^{\phi_0-\phi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{\Lambda^{1/2}} = \quad (2.7)$$

$$= - \left\{ \int_0^{\phi_0+\phi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[ \frac{1}{\Lambda^{1/2}} \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2} + \int_0^{\phi_0-\phi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[ \frac{1}{\Lambda^{1/2}} \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2} \right\},$$

где

$$\gamma_1 = -h - z; \quad \gamma_2 = h - z \quad (2.8)$$

$$\Lambda = \gamma^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha. \quad (2.9)$$

Интегрируя по  $r'$  найдем, что



$$\Psi_1 = - \left\{ \int_0^{\phi_0 + \phi} d\alpha \left[ A^{1/2} + r \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{1/2}} \right] + \right. \\ \left. + \int_0^{\phi_0 - \phi} d\alpha \left[ A^{1/2} + r \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{1/2}} \right] \right\} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{R_1}^{R_2}, \quad (2.10)$$

где

$$C = \gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha. \quad (2.11)$$

Интегрируя по  $\alpha$ , получим

$$\Psi_1 = - \left\{ r \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2} E(k, \beta) - \right. \\ - \frac{r^2 + \gamma^2 - r'^2}{\sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} F(k, \beta) + \frac{\gamma^2}{\sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} \left[ \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r'}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r'}} \Pi(n_1, k, \beta) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r'}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r'}} \Pi(n_2, k, \beta) \right] \Big|_0^{\phi_0 + \phi} + \left\{ r \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \right. \\ \left. + \sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2} E(k, \beta) - \frac{r^2 + \gamma^2 - r'^2}{\sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} F(k, \beta) + \frac{\gamma^2}{\sqrt{(r' + r)^2 + \gamma^2}} \left[ \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r'}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r'}} \Pi(n_1, k, \beta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r'}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r'}} \Pi(n_2, k, \beta) \right] \right\} \Big|_0^{\phi_0 - \phi} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{R_1}^{R_2}, \quad (2.12)$$

где

$$\beta = \frac{\alpha - \pi}{2}; \quad (2.13)$$

$$k^2 = \frac{4r'r}{(r'+r)^2 + y^2}; \quad n_1 = -\frac{2r}{\sqrt{y^2 + r'^2} - r}; \quad n_2 = \frac{2r}{\sqrt{y^2 + r'^2} + r}, \quad (2.14)$$

$$a \quad E(k, \beta) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \, d\beta; \quad F(k, \beta) = \int \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}; \quad \Pi(n; k, \beta) = \int \frac{d\beta}{(1 - n \sin^2 \beta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \quad (2.15)$$

эллиптические интегралы второго, первого и третьего рода в форме Лежандра, соответственно.

Из свойств скалярного потенциала отметим следующие:

- 1) потенциал асимметричен относительно плоскостей  $z = h$  и  $z = -h$

$$\Psi_1(r, \phi, z) \Big|_{z=h+\epsilon} = -\Psi_1(r, \phi, z) \Big|_{z=-h-\epsilon}; \quad (2.16)$$

- 2) потенциал симметричен относительно плоскостей  $\phi = \phi_0$  и  $\phi = -\phi_0$

$$\Psi_1(r, \phi, z) \Big|_{\phi=\phi_0+\delta} = \Psi_1(r, \phi, z) \Big|_{\phi=-\phi_0-\delta}. \quad (2.17)$$

### 3. Компоненты поля

Выражение для компонент магнитного поля найдем из соотношения

$$H^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \operatorname{grad} \Psi_1(r, \phi, z). \quad (3.1)$$

В рассматриваемом случае компоненты поля имеют вид

$$H_x^{(1)} = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}; \quad H_z^{(1)} = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}; \quad H_\phi^{(1)} = -\frac{1}{r} \frac{M}{4\pi\mu_0} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi} \quad (3.2)$$

а в переменных  $y$  и  $a$

$$H_z^{(1)} = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \quad H_\phi^{(1)} = -\frac{1}{r} \frac{M}{4\pi\mu_0} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \quad (3.3)$$

где при  $\gamma = z - z'$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial z} = +1$  и при  $\gamma = z' - z$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial z} = -1$  (3.4)

при  $\alpha = \phi - \phi'$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = +1$  и при  $\alpha = \phi' - \phi$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = -1$ . (3.5)

В области  $z < -h$  и  $-\phi_0 < \phi < \phi_0$  выражение вертикальной составляющей поля с учетом (2.7), (3.3) и (3.4) можно представить как

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \int_0^{\phi_0 + \phi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[ \frac{\gamma}{A^{3/2}} \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2} + \int_0^{\phi_0 - \phi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[ \frac{\gamma}{A^{3/2}} \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2} \right\} \quad (3.6)$$

где  $A$  определяется (2.9).

Интегрирование (3.6) по переменной  $r'$  дает

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \int_0^{\phi_0 + \phi} d\alpha \left[ \gamma \frac{y^2 + r^2 - r'r \cos \alpha}{CA^{1/2}} \right] + \int_0^{\phi_0 - \phi} d\alpha \left[ \gamma \frac{y^2 + r^2 - r'r \cos \alpha}{CA^{1/2}} \right] \right\} \left| \right|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \left| \right|_{R_1}^{R_2} \quad (3.7)$$

где  $C$  определяется (2.11).

В дальнейших преобразованиях воспользуемся тем, что <sup>16/</sup>

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{CA^{1/2}} = \frac{\Pi(n_1, k, \beta)}{\sqrt{\gamma^2 + r^2} \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} \sqrt{(\gamma^2 + r^2 - r)}} + \frac{\Pi(n_2, k, \beta)}{\sqrt{\gamma^2 + r^2} \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} \sqrt{(\gamma^2 + r^2 + r)}} \quad (3.8)$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{\cos \alpha d\alpha}{CA^{1/2}} = \frac{\Pi(n_1, k, \beta)}{r \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} \sqrt{(\gamma^2 + r^2 + r)}} - \frac{\Pi(n_2, k, \beta)}{r \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} \sqrt{(\gamma^2 + r^2 - r)}} \quad (3.9)$$

где

$$\beta = \frac{\alpha - \pi}{2}.$$

В окончательном виде выражение вертикальной составляющей поля можно представить как

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = - \frac{M}{4\pi\mu_0} \left[ \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \left[ \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r'}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r}} \Pi(n_1, k, \beta) + \right. \right. \right. \quad (3.10)$$

$$\left. \left. \left. + \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r'}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r}} \Pi(n_2, k, \beta) \right] \right\}_0^{a_1} + (a_1 \rightarrow a_2) \right] \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Big|_{R_1}^{R_2},$$

где

$$a_1 = \phi_0 + \phi \quad \text{и} \quad a_2 = \phi_0 - \phi. \quad (3.11)$$

Математический символ  $(a_1 \rightarrow a_2)$  в соотношении (3.10) обозначает вторую скобку, которая получается из первой при замене в ней  $a_1$  на  $a_2$ .

Для радиальной составляющей поля на основании (3.2) и (2.7) имеем

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = - \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \int_0^{a_1} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[ \frac{r-r' \cos \alpha}{A^{3/2}} \right] \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} + \int_0^{a_2} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[ \frac{r-r' \cos \alpha}{A^{3/2}} \right] \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \right\} = \quad (3.12)$$

$$- \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \int_0^{a_1} d\alpha \left[ r \int_{R_1}^{R_2} \frac{r' dr'}{A^{3/2}} - \cos \alpha \int_{R_1}^{R_2} \frac{r'^2 dr'}{A^{3/2}} \right] + \int_0^{a_2} d\alpha \left[ r \int_{R_1}^{R_2} \frac{r' dr'}{A^{3/2}} - \cos \alpha \int_{R_1}^{R_2} \frac{r'^2 dr'}{A^{3/2}} \right] \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2},$$

где  $a_1, a_2$  определяются (3.11).

Интегрирование (3.12) по  $r'$  можно выполнить непосредственно и получить, что

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = - \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ [r(\gamma^2 + r^2)] \int_0^{a_1} \frac{d\alpha}{CA^{1/2}} - r'(\gamma^2 + 2r^2) \int_0^{a_1} \frac{\cos \alpha d\alpha}{CA^{1/2}} - \right. \quad (3.13)$$

$$- r(\gamma^2 + r^2) \int_0^{a_1} \frac{\cos^2 \alpha d\alpha}{CA^{1/2}} + 2r'r^2 \int_0^{a_1} \frac{\cos^3 \alpha d\alpha}{CA^{1/2}} +$$

$$\left. + \int_0^{a_1} \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{1/2}} d\alpha \right] + (a_1 \rightarrow a_2) \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Big|_{R_1}^{R_2}.$$

Приводя полученные интегралы в (3.13) к эллиптическим, окончательно получим

$$\begin{aligned}
 H_z^{(1)}(r, \phi, z) &= \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[ \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \right. \right. \\
 &= \frac{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}}{r} E(k, \beta) - \frac{r'^2 + r^2 + \gamma^2}{r \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} F(k, \beta) \Big|_0^{\alpha_1} + \\
 &\quad \left. \left. + (\alpha_1 + \alpha_2) \right| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right| \frac{R_2}{R_1} \right.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

На основании (3.3) из (2.10) найдем выражение  $\phi$ -составляющей поля в следующем виде

$$\begin{aligned}
 H_\phi^{(1)}(r, \phi, z) &= \frac{1}{r} \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[ A^{1/2} + r \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{1/2}} \right]_0^{\phi_0 + \phi} - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ A^{1/2} + r \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{C^{1/2}} \right]_0^{\phi_0 - \phi} \right| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \Big| \frac{R_2}{R_1} = \\
 &= - \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha}}{r} + \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Big| \frac{R_2}{R_1} \frac{\gamma_2}{\gamma_1},
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  определяются (3.11).

Из свойств компонент магнитного поля следует отметить следующие

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = H_z^{(1)}(r, \phi, -z) \tag{3.16}$$

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = H_z^{(1)}(r, -\phi, z)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = -H_r^{(1)}(r, \phi, -z) \tag{3.17}$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = H_r^{(1)}(r, -\phi, z)$$

$$H_\phi^{(1)}(r, \phi, z) = -H_\phi^{(1)}(r, \phi, -z)$$

$$H_\phi^{(1)}(r, \phi, z) = -H_\phi^{(1)}(r, -\phi, z). \tag{3.18}$$

Указанные свойства составляющих поля  $H_x^{(1)}$ ,  $H_r^{(1)}$ ,  $H_\phi^{(1)}$  можно получить, если в соотношениях (3.10), (3.14) и (3.15) произвести замену координат  $x$  и  $\phi$  на  $-z$  и  $-\phi$  при учёте пределов  $y_1$ ,  $y_2$  и  $a_1$ ,  $a_2$  в соответствующих областях пространства.

#### 4. Частные случаи

Цилиндрический сектор

Для получения выражений, определяющих компоненты магнитного поля от намагниченного цилиндрического сектора, необходимо положить в формулах (3.10) (3.14) и (3.15)  $R_1 = 0$  и  $R_2 = R$ , тогда получается, что

$$H_x^{(1)}(r, \phi, z) = - \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{y}{\sqrt{(R+r)^2 + y^2}} \left[ \frac{\sqrt{y^2 + r^2 + R}}{\sqrt{y^2 + r^2 - r}} \Pi(n_1, k, \beta) + \frac{\sqrt{y^2 + r^2 - R}}{\sqrt{y^2 + r^2 + r}} \Pi(n_2, k, \beta) \right] - 2\beta + \arctg\left(\frac{r}{y} \sin \alpha\right) \right\}_0^{a_1 + (a_1 + a_2)} \Big|_{y_1}^{y_2}, \quad (4.1)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[ \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{y^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{(R+r)^2 + y^2}}{r} E(k, \beta) - \frac{R^2 + r^2 + y^2}{r\sqrt{(R+r)^2 + y^2}} F(k, \beta) + \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r \cos \alpha}{\sqrt{y^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} - \frac{\sqrt{y^2 + r^2}}{r} E(0, \beta) + \frac{r^2 + y^2}{r\sqrt{r^2 + y^2}} F(0, \beta) \right]_0^{a_1 + (a_1 + a_2)} \right\} \Big|_{y_1}^{y_2} = \quad (4.2)$$

$$= \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[ \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{y^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{(R+r)^2 + y^2}}{r} E(k, \beta) - \frac{R^2 + r^2 + y^2}{r\sqrt{(R+r)^2 + y^2}} F(k, \beta) + \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r \cos \alpha}{\sqrt{y^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right]_0^{a_1 + (a_1 + a_2)} \right\} \Big|_{y_1}^{y_2},$$

$$H_{\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}}{r} + \cos\alpha \operatorname{Arsh} \frac{R - r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2\sin^2\alpha}} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2}}{r} + \cos\alpha \operatorname{Arsh} \frac{r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2\sin^2\alpha}} \right\} \begin{vmatrix} \gamma_2 & a_2 \\ \gamma_1 & a_1 \end{vmatrix}, \quad (4.3)$$

где  $a_1, a_2$  определяются (3.11) и  $k$  — из (2.14) при замене  $r'$  на  $R$ .

При получении выражений (4.1) и (4.2) воспользовались тем, что <sup>/18/</sup>

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r}} \Pi(a_2, 0, \beta) = \Lambda\left(0, \frac{\pi}{2}, \beta\right) = \beta, \quad (4.4)$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r}} \Pi(a_1, 0, \beta) = \Lambda\left(0, \frac{\pi}{2}, \beta\right) + \operatorname{arctg}(P \sin\beta \cos\beta) = \\ = \beta + \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\gamma} 2 \sin\beta \cos\beta\right), \quad (4.5)$$

где  $P = 2 \frac{r}{\gamma}$  получено при  $r' = 0$  из

$$P = \frac{2r(\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r'})}{\gamma\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}}, \quad (4.6)$$

$$E(0, \beta) = \int_0^{\beta} d\Psi = \beta, \quad (4.7)$$

$$F(0, \beta) = \int_0^{\beta} d\Psi = \beta. \quad (4.8)$$

### Цилиндр

В этом случае пределы интегрирования будут следующими

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \pi. \quad (4.9)$$

Так как намагниченное тело обладает аксиальной симметрией, то составляющие магнитного поля по осям  $z$ ,  $r$  и  $\phi$  могут быть даны с учётом (4.9) из (4.1), (4.3) следующим образом:

$$H_{\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = 0, \quad (4.10)$$

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} \left[ \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + R}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r}} \Pi(a_1, k, \frac{\pi}{2}) + \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - R}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r}} \Pi(a_2, k, \frac{\pi}{2}) \right] - \pi \right\} \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right|, \quad (4.11)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}}{r} E(k, \frac{\pi}{2}) - \frac{R^2 + r^2 + \gamma^2}{r\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} F(k, \frac{\pi}{2}) \right\} \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right|. \quad (4.12)$$

Полученные выражения могут быть представлены в более удобной для расчётов форме, как это выполнено в работах <sup>5,19/</sup>.

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M}{2\mu_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \Lambda_0(\alpha, \beta_2) + \frac{k^2}{P} F_0(\alpha)] \right\} \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right|, \quad (4.13)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M}{2\pi\mu_0} \left\{ \frac{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}}{r} E(k) - \frac{R^2 + r^2 + \gamma^2}{r\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} K(k) \right\} \left| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right|, \quad (4.14)$$

где

$$\frac{k^2}{P} = \frac{2R\gamma}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} (\sqrt{\gamma^2 + r^2} + R)}, \quad (4.15)$$



а  $K(k)$ ,  $E(k)$  - полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Если воспользоваться результатами табулирования эллиптических функций первого и третьего рода, приведенными в работе /18/, то

$$F_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} K(k),$$

$$\Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + R}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r}} \Pi(n_1, k, \frac{\pi}{2}) \quad (4.16)$$

$$\Lambda_0(\alpha, \beta_2) = \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - R}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r}} \Pi(n_2, k, \frac{\pi}{2}),$$

а также /20/

$$\Pi(n, k, \frac{\pi}{2}) = -\Pi(n, k, -\frac{\pi}{2}), \quad (4.17)$$

где

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2 + \gamma^2}},$$

$$\beta_1 = \arcsin \frac{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + R}},$$

$$\beta_2 = \arcsin \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - R}}{\sqrt{(R-r)^2 + \gamma^2}}. \quad (4.18)$$

#### Цилиндрическое кольцо

Составляющие магнитного поля от намагниченного цилиндрического кольца легко получить из (4.13) и (4.14) как разность двух намагниченных цилиндров радиусов  $R_2$  и  $R_1$  соответственно. С учетом этого для составляющих поля имеем

$$H_{\phi}^{(1)}(r, \phi, z) = 0, \quad (4.18)$$

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{4\mu_0} \left\{ \Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \Lambda_0(\alpha, \beta_2) + \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) \right\} \left| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \right|_{\gamma_1}^{\gamma_2}, \quad (4.20)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M}{2\pi\mu_0} \left\{ \frac{\sqrt{(r'+r)^2 + y^2}}{r} E(k) - \frac{r'^2 + r^2 + y^2}{r\sqrt{(r'+r)^2 + y^2}} K(k) \right\} \left| \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \end{matrix} \right|_{\gamma_1}^{\gamma_2}, \quad (4.21)$$

где  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  определяются из (4.18) при замене  $R$  на  $r'$ .

#### Б. Компоненты магнитного поля бесконечных высоких цилиндрических конфигураций

В этом разделе получены выражения для компонент магнитного поля от равномерно намагниченных цилиндрических конфигураций при условии, что их высота  $h \rightarrow \infty$ , а также для конфигураций, у которых начало цилиндрической системы координат перенесено в точку  $(z = -h, r = 0)$ , а высота,  $h \rightarrow \infty$ . Такие конфигурации будем называть бесконечными и полубесконечными по высоте соответственно.

В дальнейшем для описания составляющих магнитного поля потребуются знание некоторых предельных соотношений. Когда  $h \rightarrow \infty$ , из (2.14) и (2.15) имеем

$$\lim_{h \rightarrow \infty} k = \lim_{h \rightarrow \infty} a_1 = \lim_{h \rightarrow \infty} a_2 = 0, \quad (5.1)$$

$$E(0, \beta) = F(0, \beta) = \Pi(0, 0, \beta) = \beta, \quad (5.2)$$

а для полных эллиптических интегралов

$$E(0) = K(0) = \frac{\pi}{2}. \quad (5.3)$$

Из (4.18) также получается

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \alpha = 0, \quad (5.4)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \beta_1 = \lim_{h \rightarrow \infty} \beta_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad (5.5)$$

и соответственно

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \Lambda_0(\alpha, \beta) = \Lambda_0\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad (5.6)$$

Бесконечно высокий кольцевой цилиндрический сектор

На основе (5.1), (5.2) и (3.10), (3.14), (3.15) компоненты магнитного поля будут

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) \equiv 0 \quad (5.7)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) \equiv 0 \quad (5.8)$$

$$H_\phi^{(1)}(r, \phi, z) \equiv 0. \quad (5.9)$$

Такой же результат получим для поля бесконечно высоких цилиндрического сектора, цилиндра и цилиндрического кольца.

Компоненты магнитного поля от полубесконечных по высоте цилиндрических конфигураций

После перехода к новой системе координат (начало в точке  $z=-h, r=0$ ) выражения компонент магнитного поля в общем случае (полубесконечный по высоте кольцевой цилиндрический сектор) будут иметь следующий вид:

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \left[ \left\{ 2\beta + \frac{z}{\sqrt{(r'+r)^2 + z^2}} \left[ \frac{\sqrt{z^2 + r^2 + r'^2}}{\sqrt{z^2 + r^2 - r}} \Pi(n_1, k, \beta) + \frac{\sqrt{z^2 + r^2 - r'}}{\sqrt{z^2 + r^2 + r}} \Pi(n_2, k, \beta) \right] \right\}_0^{a_1} + (a_1 \rightarrow a_2) \right] \Big|_{R_1}^{R_2}, \quad (5.10)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[ \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{z^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{(r'+r)^2 + z^2}}{r} E(k, \beta) - \frac{r'^2 + r^2 + z^2}{r\sqrt{(r'+r)^2 + z^2}} F(k, \beta) \right] \right\}_0^{a_1} + (a_1 \rightarrow a_2) \Big|_{R_1}^{R_2}. \quad (5.11)$$

$$H_\phi^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\sqrt{z^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha}}{r} + \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{z^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \Big|_{R_1}^{R_2} \cdot \frac{a_2}{a_1}. \quad (5.12)$$

Для полубесконечного цилиндрического сектора компоненты магнитного поля получаются из (5.10), (5.11) и (5.12), если положить в них

$$R_1 = 0 \quad \text{и} \quad R_2 = R.$$

Учитывая соотношения (4.4) + (4.8), имеем

$$H_z^{(1)}(z, \phi, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \left[ \left\{ \frac{z}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left[ \frac{\sqrt{z^2 + r^2} + R}{\sqrt{z^2 + r^2 - r}} \Pi(n_1, k, \beta) + \frac{\sqrt{z^2 + r^2 - R}}{\sqrt{z^2 + r^2 + r}} \Pi(n_2, k, \beta) \right] - 2\beta + \operatorname{arctg} \left( \frac{r}{z} \sin \alpha \right) \right\}_0^{a_1} + (a_1 \rightarrow a_2) \right], \quad (5.13)$$

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{z^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r \cos \alpha}{\sqrt{z^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}}{r} E(k, \beta) - \frac{R^2 + r^2 + z^2}{r\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} F(k, \beta) \right\}_0^{\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (5.14)$$

$$H_\phi^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{M}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\sqrt{z^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}}{r} + \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{R - r \cos \alpha}{\sqrt{z^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \right. \\ \left. + \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r \cos \alpha}{\sqrt{z^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} - \frac{\sqrt{z^2 + r^2}}{r} \right\}_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (5.15)$$

Для полубесконечного цилиндра на основе (4.13), (4.14) и (5.1) + (5.6) компоненты поля можно представить в виде

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{2\mu_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \Lambda_0(\alpha, \beta_2) + \frac{k^2}{P} F_0(\alpha)] \right\}, \quad (5.16)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{2\pi\mu_0} \left\{ \frac{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}}{r} E(k) - \frac{R^2 + r^2 + z^2}{r\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} K(k) \right\}, \quad (5.17)$$

а выражения компонент поля от полубесконечного цилиндрического кольца могут быть получены из (5.16), (5.17) как разность двух полубесконечных цилиндров радиусов  $R_2$  и  $R_1$  соответственно.

Отметим, что в соотношениях (5.16), (5.17),  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  получаются из (4.18) при замене  $y$  на  $z$ , а параметр  $k$  - из (2.14) при замене  $r'$  на  $R$  и  $y$  на  $z$ .

6. Компоненты магнитного поля "тонких" цилиндрических конфигураций

В начале рассмотрим намагниченные цилиндрические конфигурации, у которых радиальная протяженность тела значительно меньше среднего радиуса, т.е.  $\Delta R = R_2 - R_1 \ll R$ .

В этом случае выражение скалярного потенциала в системе координат при  $z < h_1$  и  $-\phi_0 < \phi < \phi_0$  имеет вид

$$\Psi_1(r, \phi, z) = -R \Delta R \left\{ \int_0^{\phi_0 + \phi} \frac{d\alpha}{A^{1/2}} + \int_0^{\phi_0 - \phi} \frac{d\alpha}{A^{1/2}} \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}, \quad (6.1)$$

где

$$\gamma_1 = h_1 - z; \quad \gamma_2 = h_2 - z, \quad (6.2)$$

$h_1$  и  $h_2$  — расстояния от медианной плоскости до нижнего и верхнего оснований, соответственно, а  $A$  определяется (2.9).

Для вертикальной составляющей поля  $H_z^{(1)}$  из (3.3) и (6.1), (6.2) получим

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = \frac{MR \Delta R}{2\pi \mu_0} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} [E(k, \beta) + \frac{2Rr \sin \alpha}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} A^{1/2}}] \right\}_0^{\alpha_1} + (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \Big|_{h_1}^{h_2}, \quad (6.3)$$

где

$$\alpha_1 = \phi_0 + \phi; \quad \alpha_2 = \phi_0 - \phi. \quad (6.4)$$

При  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$  от двух симметрично расположенных относительно плоскости  $z = 0$  шимм найдем <sup>/5/</sup>, что

$$H_z^{(1)}(r, \phi, 0) = \frac{MR \Delta R}{\mu_0} \left\{ \frac{h_1 E_0(\alpha)}{\sqrt{(R+r)^2 + h_1^2} [(R-r)^2 + h_1^2]} - \frac{h_2 E_0(\alpha)}{\sqrt{(R+r)^2 + h_2^2} [(R-r)^2 + h_2^2]} \right\}. \quad (6.5)$$

Для радиальной составляющей из (3.2), (6.2) при  $z=0$  имеем

$$H_r^{(1)}(r, \phi, 0) = - \frac{MR\Delta R}{4\pi\mu_0} \left\{ \int_0^{\phi_0+\phi} d\alpha \frac{r-R\cos\alpha}{A^{3/2}} + \int_0^{\phi_0-\phi} d\alpha \frac{r-R\cos\alpha}{A^{3/2}} \right\} \Big|_{h_1}^{h_2} \quad (6.6)$$

В дальнейшем воспользуемся тем, что при  $\beta = \frac{\alpha - \pi/17}{2}$

$$\int \frac{d\alpha}{A^{3/2}} = \frac{2E(k, \beta)}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} + \frac{4Rr \sin\alpha}{[(R+r)^2 + \gamma^2] [(R-r)^2 + \gamma^2] A^{1/2}} \quad (6.7)$$

$$\int \frac{\cos d\alpha}{A^{3/2}} = \frac{R^2 + r^2 + \gamma^2}{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} E(k, \beta) - \frac{F(k, \beta)}{Rr\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} + \quad (6.8)$$

$$+ \frac{2(R^2 + r^2 + \gamma^2) \sin\alpha}{[(R+r)^2 + \gamma^2] [(R-r)^2 + \gamma^2]}$$

Таким образом,

$$H_r^{(1)}(r, \phi, 0) = - \frac{MR\Delta R}{4\pi\mu_0} \left\{ \left[ \frac{r^2 - \gamma^2 - R^2}{r\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} E(k, \beta) + \frac{F(k, \beta)}{r\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} + \frac{2Rr(r^2 - \gamma^2 - R^2) \sin\alpha}{[(R+r)^2 + \gamma^2] [(R-r)^2 + \gamma^2]} \right] \Big|_0^{\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)} \right\} \Big|_{h_1}^{h_2} \quad (6.9)$$

Легко получить из (6.9) при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$  для двух симметрично расположенных относительно плоскости  $z=0$  шинн, что

$$H_r^{(1)}(r, \phi, 0) = - \frac{MR\Delta R}{2\mu_0} \left\{ \frac{r^2 - \gamma^2 - R^2}{r\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2} [(R-r)^2 + \gamma^2]} E_0(\alpha) + \frac{F_0(\alpha)}{r\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} \right\} \Big|_{h_1}^{h_2} \quad (6.10)$$

Для азимутальной составляющей поля из (3.3), (6.1) и (6.2) получается

$$H_\phi^{(1)}(r, \phi, 0) = - \frac{M}{4\pi\mu_0} \frac{R\Delta R}{r A^{1/2}} \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Big|_{h_1}^{h_2}, \quad (6.11)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  определяются (6.4).

В том случае, когда высота шпильки мала по сравнению с расстоянием  $h_1$ , на которое они удалены по оси  $z$  от плоскости  $z = 0$ , т.е.  $\Delta h = h_2 - h_1 \ll h_1$ , для составляющих поля  $H_z^{(1)}$ ,  $H_r^{(1)}$ ,  $H_\phi^{(1)}$ , разлагая в ряд (3.10), (3.14) и (3.15) и ограничиваясь первыми членами, получим

$$H_z^{(1)}(r, \phi, 0) = -\frac{M \Delta h}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{r'^2 - r^2 - h_1^2}{\sqrt{(r'+r)^2 + h_1^2} [(r'-r)^2 + h_1^2]} E(k, \beta) + \frac{F(k, \beta)}{\sqrt{(r'+r)^2 + h_1^2}} + r \sin \alpha \frac{r' - r \cos \alpha}{(h_1^2 + r^2 \sin^2 \alpha) A^{1/2}(h_1)} + \frac{2r'r \sin \alpha (r^2 - r'^2 + h_1^2)}{(h_1^2 + r^2 \sin^2 \alpha) A^{1/2}(h_1) [(r'-r)^2 + h_1^2]} \right\} \Big|_0^{\alpha_1} + (\alpha_1 + \alpha_2) \Big|_{R_1}^{R_2}, \quad (6.12)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, 0) = -\frac{M h_1 \Delta h}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{r'^2 + r^2 + h_1^2}{r \sqrt{(r'+r)^2 + h_1^2} [(r'-r)^2 + h_1^2]} E(k, \beta) - \frac{F(k, \beta)}{r \sqrt{(r'+r)^2 + h_1^2}} - \frac{\sin \alpha}{A^{1/2}(h_1)} \left( \frac{r' - r \cos \alpha}{h_1^2 + r^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2r'r}{\sqrt{(r'+r)^2 + h_1^2} [(r'-r)^2 + h_1^2]} \right) \right\} \Big|_0^{\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)} \Big|_{R_1}^{R_2}, \quad (6.13)$$

$$H_\phi^{(1)}(r, \phi, 0) = -\frac{M h_1 \Delta h}{4\pi\mu_0} \frac{h_1^2 + r^2 - r'r \sin \alpha}{A^{1/2}(h_1) r (h_1^2 + r^2 \sin^2 \alpha)} \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Big|_{R_1}^{R_2}, \quad (6.14)$$

где  $A(h_1)$  определяется (2.9) при замене  $y$  на  $h_1$ . При этом воспользуемся тем, что существует следующее равенство

$$\frac{\partial}{\partial y} [ Q(a_1) \Pi(a_1, k, \beta) + Q(a_2) \Pi(a_2, k, \beta) ] = -\frac{r^2 + y^2 - r'^2}{\sqrt{(r'+r)^2 + y^2} [(r'+r)^2 + y^2]} E(k, \beta) + \frac{F(k, \beta)}{\sqrt{(r'+r)^2 + y^2}} + r \sin \alpha \frac{r' - r \cos \alpha}{C A^{1/2}} + \frac{2r'r (r^2 + y^2 - r'^2) \sin \alpha}{[(r'-r)^2 + y^2] A^{1/2}}, \quad (8.15)$$



где

$$Q(n_1) = \frac{\gamma}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \frac{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 + r'}}{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 - r'}} \quad (6.16)$$

$$Q(n_2) = \frac{\gamma}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \frac{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 - r'}}{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 + r'}}.$$

Соотношение (6.15) получено из очевидного тождества

$$H_z^{(1)}(r, \phi, z) = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -\frac{M}{4\pi\mu_0} \left[ \{ r \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \gamma} \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{c^{1/2}} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \gamma} [ \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2} E(k, \beta) ] - \frac{\partial}{\partial \gamma} [ \frac{r^2 + \gamma^2 - r'^2}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} F(k, \beta) ] + Q(n) \Pi(n, k, \beta) + \right. \\ \left. + Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} [ Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) + Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta) ] \right]_0^{\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (6.17)$$

$$= -\frac{M}{4\pi\mu_0} \{ [ Q(n_1) \Pi(n_1, k, \beta) + Q(n_2) \Pi(n_2, k, \beta) ]_0^{\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)} \}.$$

При этом воспользовались формулами (2.12) и (3.10).

При  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$  для двух симметрично расположенных относительно плоскости  $z = 0$  шимм, найдем, что

$$H_z^{(1)}(r, \phi, 0) = -\frac{M}{2\mu_0} \frac{\Delta h}{\sqrt{(R+r)^2 + h_1^2}} \left\{ F_0(\alpha) + \frac{R^2 - r^2 - h_1^2}{(R-r)^2 + h_1^2} E_0(\alpha) \right\}, \quad (6.18)$$

$$H_r^{(1)}(r, \phi, 0) = -\frac{M h_1 \Delta h}{2 \mu_0} \left\{ \frac{R^2 + r^2 + h_1^2}{r \sqrt{(R+r)^2 + h_1^2} [(R-r)^2 + h_1^2]} E_0(\alpha) - \frac{F_0(\alpha)}{r \sqrt{(R+r)^2 + h_1^2}} \right\}, \quad (8.19)$$

что совпадает с результатами, полученными в работе /5/

### 7. Магнитное поле однослойных кольцевых цилиндрических секторяльных соленоидов

Известно, что магнитное поле равномерно намагниченных тел вне их объемов эквивалентно магнитному полю, создаваемому током, протекающим по соответствующему контуру. Можно показать, что "тонкий" по высоте равномерно намагниченный диск произвольной формы дает в точке  $P$  вне его объема точно такое же магнитное поле как и "тонкий" провод с током  $I$ , который охватывает контур рассматриваемого диска (см.рис. 3). Если  $d \gg \Delta h$ , где  $d$  - расстояние от элементарной площадки  $ds$  до точки наблюдения  $P$ , а  $\Delta h$  - толщина диска, то можно, используя полученные в работе результаты, непосредственно найти скалярный потенциал магнитного поля для ряда токовых конфигураций. При этом необходимо, чтобы магнитный момент единичной поверхности, или магнитный момент единицы объема (или намагниченность  $M$ ) были связаны с током  $I$  следующими соотношениями /21/, /22/.

$$M_s = \mu_0 I, \quad (7.1)$$

$$M = \mu_0 i, \quad (7.2)$$

где  $\mu_0$  - магнитная проницаемость,  $I$  - ток, текущий по контуру диска,  $i = \frac{I}{\Delta h}$  - линейная плотность тока.

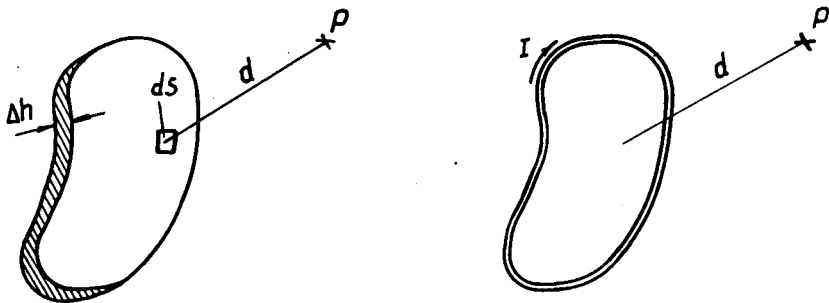


Рис. 3.

Например, заменяя в формулах (6.18), (6.19) намагниченность  $M$  линейной плотностью тока  $i$  в соответствии с (7.2), получим известные выражения для компонент магнитного поля от кругового витка с током  $i$ . Так как магнитные поля складываются векторно, то поле равномерно намагниченного кольцевого сектора можно рассматривать как сумму очень "тонких" по высоте кольцевых секторов. Заменяя каждый кольцевой сектор соответствующим токовым контуром, получим в общем случае выражение для компонент магнитного поля от однослойного кольцевого цилиндрического секториального соленоида, форма которого показана на рис. 4, если выполнено условие

$$M = \mu_0 \frac{NI}{2h}, \quad (7.3)$$

где  $I$  - ток, текущий по обмотке соленоида,  $N$  - число витков,  $2h$  - высота кольцевого цилиндрического секториального соленоида.

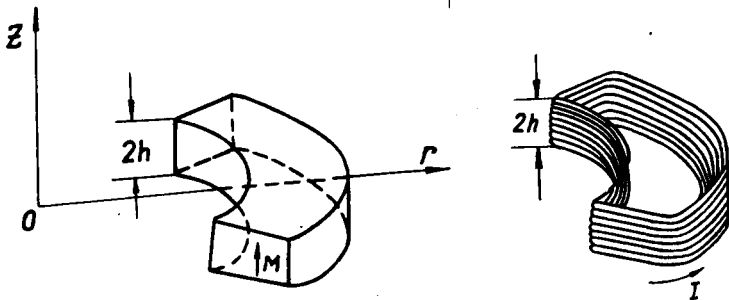


Рис.4.

Так как индукция поля  $\mathbf{B}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$  от равномерно намагниченного тела вне его объема равны полю  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}_0$  от соответствующего соленоида, то на основе (3.10), (3.14) и (3.15) для компонент поля от кольцевого цилиндрического секториального соленоида в области  $z < -h$  и  $-\phi_0 < \phi < \phi_0$  можно записать

$$H_{z00}^{(1)} = -\frac{NI}{8\pi h} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} \left[ \frac{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 + r^2}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r}} \Pi(a_1, k, \beta) + \frac{\sqrt{\gamma^2 + r^2 - r'}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 + r}} \Pi(a_2, k, \beta) \right] \right\}_0^{a_1} + (a_1 + a_2) \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left| \frac{R_2}{R_1} \right. \right\}, \quad (7.4)$$

$$H_{rec}^{(1)} = \frac{NI}{8\pi h} \left\{ \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}}{r} E(k, \beta) - \right. \quad (7.5)$$

$$\left. - \frac{r'^2 + r^2 + \gamma^2}{r\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} F(k, \beta) \right\}_0^{a_1} + (a_1 + a_2) \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left| \frac{R_2}{R_1} \right. \right\},$$

$$H_{\phi_{ac}}^{(1)} = -\frac{NI}{8\pi h} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha}}{r} + \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} \right\}_0^{a_2} \left| \frac{R_2}{R_1} \right| \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad (7.6)$$

где

$$\gamma_1 = -h - z; \quad \gamma_2 = h - z \quad \text{и} \quad a_1 = \phi_0 + \phi; \quad a_2 = \phi_0 - \phi.$$

В других областях пространства решения могут быть описаны аналогичным образом в соответствии с правилом, приведенным в работе /16/.

Внутри намагниченного тела индукция поля  $\mathbf{B}_1$  равна индукции поля  $\mathbf{B}_{1c}$  внутри соответствующего соленоида, а напряженности магнитного поля различны друг от друга, так как внутри намагниченного тела действует вектор намагниченности  $\bar{\mathbf{M}}$ . Из равенства  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{1c}$  для напряженности магнитного поля внутри намагниченного тела  $\mathbf{H}_1$  и соответствующего ему соленоида  $\mathbf{H}_{1c}$  найдем, что

$$\bar{\mathbf{H}}_{1c} = \bar{\mathbf{H}}_1 + \frac{\bar{\mathbf{M}}}{\mu_0}. \quad (7.7)$$

Поэтому выражения компонент магнитного поля внутри кольцевого цилиндрического секторального соленоида имеют вид

$$H_{zic}^{(1)} = \frac{NI}{8\pi h} \left\{ \frac{\gamma_1}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma_1^2}} \left[ \frac{\sqrt{\gamma_1^2 + r'^2 + r'}}{\sqrt{\gamma_1^2 + r'^2 - r'}} \Pi(n_{11}, k_1, \beta) + \frac{\sqrt{\gamma_1^2 + r'^2 - r'}}{\sqrt{\gamma_1^2 + r'^2 + r'}} \Pi(n_{21}, k_1, \beta) \right] + \frac{\gamma_2}{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma_2^2}} \left[ \frac{\sqrt{\gamma_2^2 + r'^2 + r'}}{\sqrt{\gamma_2^2 + r'^2 - r'}} \Pi(n_{12}, k_2, \beta) + \frac{\sqrt{\gamma_2^2 + r'^2 - r'}}{\sqrt{\gamma_2^2 + r'^2 + r'}} \Pi(n_{22}, k_2, \beta) \right] \right\} \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \left| \frac{R_2}{R_1} + \frac{NI}{2h} \right. \quad (7.8)$$

$$H_{\phi ic}^{(1)} = \frac{NI}{8\pi h} \left\{ \left[ \sin \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}}{r} E(k, \beta) - \frac{r'^2 + r^2 + \gamma^2}{r \sqrt{(r'+r)^2 + \gamma^2}} F(k, \beta) \right] \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \left| \frac{R_2}{R_1} \right| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right. \quad (7.9)$$

$$H_{\phi ic}^{(1)} = \frac{NI}{8\pi h} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 + r'^2 - 2r'r \cos \alpha}}{r} + \cos \alpha \operatorname{Arsh} \frac{r' - r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r'^2 \sin^2 \alpha}} \right\} \alpha_1 \left| \frac{R_2}{R_1} \right| \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (7.10)$$

Легко видеть, что выражения радиальной и азимутальной компонент поля внутри и вне соленоида имеют один и тот же вид, так как в нашем случае было предположено  $M_z = M, M_r = M_\phi = 0$ .

Следует отметить, что при выводе соотношений (7.8)-(7.10), описывающих магнитное поле внутри кольцевого цилиндрического секторального соленоида, воспользовались выражением (2.3) для скалярного потенциала внутри намагниченного кольцевого цилиндрического сектора. При этом параметры  $n_{11} = n_1(r, \gamma_1)$ ,  $n_{21} = n_2(r, \gamma_1)$ ,  $k_1 = k(r', r, \gamma_1)$ ,  $n_{12} = n_1(r, \gamma_2)$ ,  $n_{22} = n_2(r, \gamma_2)$ ,  $k_2 = k(r', r, \gamma_2)$  определяются (2.14) при  $\gamma_1 = z + h$ ,  $\gamma_2 = h - z$ .

Из (7.4), (7.5), (7.8), и (7.9) легко получить выражения вертикальной и радиальной компонент магнитного поля вне и внутри цилиндрического однослойного соленоида, положив в них  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$  и  $R_1 = 0, R_2 = R$ .

Тогда получим: для вертикальной составляющей поля вне соленоида

$$H_{z0}^{(1)} = - \frac{NI}{4h} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \Lambda_0(\alpha, \beta_2) + \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) \right] \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}, \quad (7.11)$$

внутри соленоида

$$H_{z0}^{(1)} = \frac{NI}{4h} \left\{ \left[ \Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \Lambda_0(\alpha, \beta_2) + \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) \right] \Big|_{\gamma=\gamma_1} + \right. \\ \left. + \left[ \Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \Lambda_0(\alpha, \beta_2) + \frac{k^2}{P} F_0(\alpha) \right] \Big|_{\gamma=\gamma_2} \right\}, \quad (7.12)$$

где  $\Lambda_0(\alpha, \beta_1)$ ,  $\Lambda_0(\alpha, \beta_2)$ ,  $F_0(\alpha)$  определяются (4.15) и (4.16).

Для радиальной составляющей поля вне и внутри соленоида имеем

$$H_{r0}^{(1)} = \frac{NI}{4\pi h} \left\{ \frac{\sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}}{r} E(k) - \frac{R^2 + r^2 + \gamma^2}{r \sqrt{(R+r)^2 + \gamma^2}} K(k) \right\} \Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}, \quad (7.13)$$

Используя соотношения /18/

$$\Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \Lambda_0(\alpha, \beta_2) = \Lambda_0(\alpha, \beta_3) + k'^2 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 F_0(\alpha), \quad (7.14)$$

где

$$\beta_3 = \arcsin \frac{\gamma}{\sqrt{(R-r)^2 + \gamma^2}} \text{ и } k'^2 = 1 - k^2, \quad (7.15)$$

найдем из (7.12), (7.13) формулы, описывающие магнитное поле внутри одно-  
слойного цилиндрического соленоида, полученные на основе закона Био-Савара  
в работе /24/, а из (7.11), (7.13)-формулы, описывающие магнитное поле вне  
соленоида и приведенные в работах /25,26/.

1. W.M.Powell, L.R.Heinrich, O.A.Kerns, D.C.Sewell and R.L.Thorton, Electromagnetic deflection for the beam of the 184 - inch cyclotron - Rev. Sci. Instr., 19, 506 (1948).
2. В.П.Дмитриевский, В.И.Данилов, Ю.Н.Денисов, Н.Л.Заплатин, В.С.Катышев, А.А.Кропин, А.В.Честной, Вывод пучка протонов из шестиметрового синхротрона посредством возбуждения радиальных колебаний. ПТЭ, 1957, №1, 11-14.
3. В.И.Данилов, В.П.Дмитриевский, Н.Л.Заплатин, В.В.Кольга, Лю Не-чуань, В.С.Рыбалко, Л.А.Саркисян, Формирование магнитного поля циклотрона с пространственной вариацией, Препринт ОИЯИ, Р-373, Дубна, 1959.
4. В.И.Данилов, О.В.Савченко, Метод фокусировки заряженных частиц от ускорителей. ПТЭ, 1959, №3, 17-20.
5. В.И.Данилов, Н.Л.Заплатин, В.С.Рыбалко, Л.А.Саркисян, Формирование аксиально-симметричных магнитных полей. Препринт ОИЯИ, Р-344, Дубна, 1959.
6. В.И.Данилов, Н.Л.Заплатин, В.С.Рыбалко, Л.А.Саркисян, Формирование периодических магнитных полей с помощью криволинейных шимм. Препринт ОИЯИ, Р-409. Дубна, 1959.
7. Д.П.Василевская, А.А.Глазов, В.И. Данилов, Ю.Н.Денисов, В.П.Джелепов, В.П.Дмитриевский, Б.И.Замолодчиков, Н.Л. Заплатин, В.В.Кольга, А.А.Кропин, Лю Не-чань, В.С.Рыбалко, А.Л.Савенков. Л.А.Саркисян, Циклотрон с пространственной вариацией напряженности магнитного поля. Атомная энергия, 8, 189 (1960).
8. В.П.Дмитриевский, Н.Л.Заплатин. В.С.Рыбалко, Л.А.Саркисян, Определение основных параметров магнитной системы релятивистского циклотрона. Препринт ОИЯИ, Р-1431, Дубна, 1963.
9. В.П.Дмитриевский. Н.Л.Заплатин. В.С.Рыбалко, Л.А.Саркисян, Моделирование магнитного поля релятивистского циклотрона с пространственной вариацией на энергию протонов 700 Мэв. Препринт ОИЯИ, Р-1432, Дубна, 1963.
10. А.А.Глазов, Ю.Н. Денисов, В.П.Джелепов, В.П.Дмитриевский, Б.И.Замолодчиков, Н.Л.Заплатин, В.В.Кольга, М.М.Комочков, А.А.Кропин, М.А.Гашев, И.Ф.Малышев, Н.А.Моноссон, А.В.Покрович, Релятивистский протонный циклотрон на энергию 700 Мэв. Труды международной конференции по ускорителям. Дубна, 1963, стр. 547.

11. В.П.Дмитриевский, Н.Л.Заплатин, В.С.Рыбалко, Л.А.Саркисян, Магнитное поле релятивистского протонного циклотрона на энергию 700 Мэв. Труды международной конференции по ускорителям, Дубна, 1983, стр. 556.
12. В.И.Данилов, В.Б.Мухина, А.Н.Сафонов, Формирование магнитного поля в центральной области синхроциклотрона с целью увеличения вертикальной фокусировки. Препринт ОИЯИ, Р-9-3181, Дубна, 1987 г.
13. Р.И.Янус, О коэффициентах размагничивания ферромагнитных стержней. Сборник, посвященный семидесятилетию академика А.Ф.Иоффе. Москва, 1960, Изд-во АН СССР.
14. Дж.А.Среттон, Теория электромагнетизма. ГИЗ, Москва, 1948.
15. R.L. Joseph and E. Schlömann, Demagnetizing field in nonellipsoidal bodies, J. Appl. Phys., 36, 1579 (1965).
16. В.И.Данилов, И.В.Пузынин, Электростатическое поле равномерно заряженных объемов цилиндрической конфигурации. Препринт ОИЯИ, Р-2131, Дубна, 1985.
17. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Ф.М., Москва, 1982.
18. C. Neuman, Tables of complete elliptic integrals, J. Math. and Phys., 20, 127 (1942).
19. В.И.Данилов, Формирование магнитных полей для ускорителей с пространственной варьацией. Диссертация ЛЯП ОИЯИ. 1959.
20. А.М.Журавский, Справочник по эллиптическим функциям. Москва, Изд-во АН СССР, 1941.
21. E.M. Pugh, E.W. Pugh, Principles of electricity and magnetism, Addison-Wesley, Massachusetts, 1960.
22. E. Durand, Les systemes magnetiques associes aux systemes de courants electriques permanents et leur application au calcul numerique des champs, Ann. Phys., 10, 883 (1955).
23. H. Nagaoka, S. Sakurai, Magnetic field of circular coils, Proc. Imp. Acad. (Japan), 2, 116 (1926).
24. И.И.Пеккер. Расчёт напряженности магнитного поля цилиндрической катушки. Труды Новочеркасского политехнического ин-та 1956, 43/57, 91.



25. E.Schwartz, Elektrotechnik, 1954, N3.
26. R.Cazenave, Champ d'un disque uniformement charge et champ magnetique d'une bobine cylindrique circulaire mince a spires jointives parcourue par un courant continu, Rev.gen. de l'electr. 65,301(1956).

Рукопись поступила в издательский отдел  
11 октября 1967 года.