

С 3538

И-203

18.X.1967

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 3475-2



И.Н. Иванов. В.Г. Маханьков

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

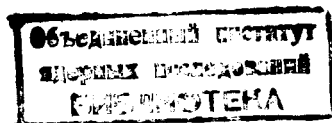
УСТОЙЧИВОСТЬ
ОКРУЖЕННОГО МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ЭЛЕКТРОНОВ
В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1967.

P9 - 3475-2

И.Н. Иванов. В.Г. Маханьков

УСТОЙЧИВОСТЬ
ОКРУЖЕННОГО МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ЭЛЕКТРОНОВ
В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ



В в е д е н и е

В последнее время в связи с исследованиями по накопительным кольцам, встречным пучкам и т.д. большое внимание уделяется вопросам устойчивости цилиндрических и кольцевых образований больших токов^{/1,2,3/}. Кроме известной неустойчивости "отрицательной" массы в накопительных кольцах были обнаружены также неустойчивости, связанные с конечной проводимостью стенок кожуха, в который помещен накапливаемый пучок^{/4,5/}.

Хорошо известно, что заряженный ток частиц в магнитном поле неустойчив. В нем наряду с вышестемеченной продольной неустойчивостью типа эффекта отрицательной массы могут развиваться также поперечные неустойчивости. Последние связаны с изменением формы пучка и приводят к появлению "желобков", "змеек" и т.д. Хотя и очевидно, что бесконечно проводящий кожух не может вызвать появления дополнительных неустойчивостей, представляется весьма интересным рассмотреть влияние экранирования на развитие неустойчивостей, возникающих в пучке. В работе^{/6/} был проведен анализ развития неустойчивости отрицательной массы в экранированном пучке. Цель настоящей работы — выяснить процесс развития поперечных неустойчивостей в пучке, экранированном проводящим экраном.

1. Получение дисперсионного уравнения

В работе^{/6/} написано дисперсионное уравнение, связывающее частоты как продольных, так и поперечных волн с их волновыми числами и параметрами системы. Однако для ясности изложения представляется целесообразным повторить основные моменты и общую постановку задачи.

Рассматривается бесконечно тонкий цилиндрический слой заряженных частиц в магнитном поле. Слой окружен цилиндрическим абсолютно проводящим кожухом.

В выбранной цилиндрической системе координат ось направлена вдоль оси экрана, который будем считать коаксиальным со слоем частиц. Задача решается в линейном приближении, тепловым разбросом пренебрегается. Для простоты считаем $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Думается, однако, что это ограничение несущественно и проведенное рассмотрение справедливо для всех волновых чисел k_z , для которых выполняется условие распространения незатухающих цилиндрических волн.

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 > 0, \quad (1.1)$$

ω - частота рассматриваемой волны.

В стационарном состоянии сечение тока представляет собой кольцо, радиус которого равен r_0 . Скорость в направлении \vec{r}_θ , выраженная в единицах скорости света c , равна $\beta_0 = \frac{\omega r_0}{c}$, где ω_0 - частота обращения каждой частицы:

$$\omega_0 = \frac{e H_0}{c m_0 \gamma_0}, \quad (1.2)$$

H_0 - внешнее магнитное поле, e - заряд частицы, m_0 - ее масса, $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$. Равенство (1.2) получено при условии:

$$\frac{v_e}{\gamma_0} = \frac{e \sigma_0 2 \pi r_0}{m_0 c^2 \gamma_0} \ll 1, \quad (1.3)$$

где σ_0 - поверхностная плотность частиц.

Если каждая частица кольца сместилась по радиусу на величину $\xi(\theta_0, t)$, а по азимуту - на величину $\eta(\theta_0, t)$ от невозмущенной частицы, координаты которой в момент времени t есть $\{r_0, \theta_0, z\}$, то уравнения для ξ и η есть ^{/3/}:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 (1 - \gamma_0^2) \xi - \omega_0 \gamma_0^2 \ddot{\eta} = \frac{e}{m_0 \gamma_0} \left(E_r + \frac{\omega_0 r_0}{c} H_z \right), \quad (1.4)$$

$$\ddot{\eta} + \omega_0 \dot{\xi} = \frac{e}{m_0 \gamma_0^3} E_\theta.$$

Точка над ξ и η означает $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}$. E_r , E_θ , H_z - суть напряженности, связанные с появлением тока и заряда возмущения. Связав составляющие скорости возмущенных частиц и плотность возмущенных зарядов через уравнение непрерывности, можно написать линейные приращения тока в виде:

$$j_r = \xi \sigma_0 \delta(r - r_0),$$

$$j_\theta = \sigma_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta(r - r_0) - \sigma_0 \omega_0 r_0 \xi \delta'(r - r_0). \quad (1.5)$$

Выразив E_r , E_θ , H_z через j_r и j_θ , мы замкнем систему и сделаем уравнения (1.4) самосогласованными. Этот процесс, так же как и получение (1.5), подробно изложен в ^{/6/}. Здесь приведем результат

$$-p^2 \xi + (1 - \gamma_0^2) \omega_0^2 \xi - i \omega_0 \gamma_0^2 p \eta = \Omega^2 (1 - \beta_0 \beta_\omega) \frac{n^2}{\beta_0^2} [\beta_\omega \eta C + i(1 - \beta_0 \beta_\omega) \xi A] \quad (1.6)$$

$$-p^2 \eta + i p \omega_0 \xi = \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2} \frac{i n^2 \beta_\omega}{\beta_0^2} [\beta_\omega \eta B + i(1 - \beta_0 \beta_\omega) \xi C].$$

При получении (1.6) считалось, что ξ и η зависят от θ_0 и t в виде $e^{i \omega t - i n \theta_0}$.

В системе (1.6) приняты следующие обозначения:

$$p = \omega - n \omega_0,$$

$$\Omega^2 = \frac{e \sigma_0 2 \pi r_0 \omega_0^2}{m_0 c^2 \gamma_0},$$

$$\beta_\omega = \frac{\omega r_0}{n c},$$

$$\frac{A}{\pi} = J_n \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) H_n^{(1)} \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) - J_n^2 \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) D,$$

$$\frac{B}{\pi} = J_n' \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) H_n^{(1)} \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) - J_n'^2 \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) D,$$

$$\frac{C}{\pi} = \frac{1}{2} J_n \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) H_n^{(1)'} \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) + \frac{1}{2} J_n' \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) H_n^{(1)} \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) - J_n \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) J_n' \left(\frac{\omega r_0}{c} \right) D,$$

$$D = \frac{H_n^{(1)'} \left(\frac{\omega b}{c} \right)}{J_n' \left(\frac{\omega b}{c} \right)},$$

b - радиус экрана, штрих у функций Бесселя означает дифференцирование по аргументу:

Из системы (1.6) следует дисперсионное уравнение

$$p^2 (p^2 - \omega_0^2) = \frac{\Omega^2 n^2 \beta^2 \omega}{\beta_0^2} \left[\frac{\omega^2 (1 - \gamma^2) - p^2}{\gamma^2} i B - \frac{2\omega_0}{\beta_0} (1 - \beta_0 \beta_\omega) p i C - \right. \\ \left. - \frac{p^2}{\beta_\omega^2} (1 - \beta_0 \beta_\omega)^2 i A \right] + \frac{\Omega^4 n^2 (1 - \beta_0 \beta_\omega)^2}{\gamma_0^2 \beta_0^4} \quad (1.9)$$

§ 2. Исследование дисперсионного уравнения в отсутствие проводящего экрана

Для получения дисперсионного уравнения, описывающего цилиндрической слой в отсутствие экрана, нужно формально в уравнении (1.9) положить $D=0$. Как будет показано ниже, эта операция адекватна переходу к пределу $b \rightarrow \infty$, что означает удаление экрана на бесконечность. При этом в (1.9) $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$, $C \rightarrow C_1$

$$A_1 = A/D=0 \quad B_1 = B/D=0 \quad C_1 = C/D=0 \quad (2.1)$$

Переходя к безразмерным переменным $p' = \frac{p}{\omega_0}$, видим, что уравнение (2.1) имеет вид:

$$p'^2 (p'^2 - 1) = \epsilon f(p'), \quad (2.2)$$

где ϵ - малый параметр, и в нашем случае $\epsilon = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\nu}{\gamma_0^2} \ll 1$. Уравнение (2) может быть решено методом последовательных приближений по этому малому

параметру. Первая ступень итерационной процедуры приводит к уравнению

$$p'^2 (p'^2 - 1) = 0. \quad (2.3)$$

Из этого выражения следует, что существуют две ветви колебаний

$$p' = 0 \quad (2.4)$$

и

$$p' = \pm 1. \quad (2.5)$$

По аналогии с плоским слоем (см. ниже и в [3]) первую ветвь относят соответственно к продольным колебаниям, вторую - к поперечным. Действительная и мнимая части поправок к ветви (2.4), связанные с малыми членами в уравнении (2.2), характеризуют соответственно сдвиг частоты продольных колебаний и инкремент неустойчивости, обязанной так называемому эффекту "отрицательной" массы. Эта ветвь колебаний достаточно хорошо изучена (см., например, [1,2]), поэтому подробно останавливаться на исследовании уравнения (2.1) в области $p' = 0$ мы не будем. Отметим только (что непосредственно следует из уравнения (2.1)), что инкремент неустойчивости на продольных колебаниях пропорционален квадратному корню из малого параметра ϵ , т.е. $\text{Im } \omega \approx \sqrt{\epsilon}$.

Перейдем к исследованию уравнения (2.1) в области $p' = \pm 1$. Вторая ступень итерационной процедуры приводит к

$$p'^2 - 1 = - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} (a \pm 1)^2 \{ i [J_n'(a) \pm \kappa J_n(a)]^2 - \quad (2.6)$$

$$- [J_n'(a) \pm \kappa J_n(a)] [N_n'(a) \pm \kappa N_n(a)] \},$$

где

$$a = \frac{\omega r_0}{c}, \quad \kappa = \frac{1 - \beta_0 \beta_\omega}{\beta_\omega}$$

Полагая $p' = \pm 1 + \frac{\delta}{\omega_0}$, получим

$$\delta_n = - \frac{\pi}{2} \frac{\nu}{\gamma_0} \omega_0 (a \pm 1)^2 \{ i [J_n'(a) \pm \kappa J_n(a)]^2 - [J_n'(a) \pm \kappa J_n(a)] [N_n'(a) \pm \kappa N_n(a)] \}, \quad (2.7)$$

индекс n у комплексной поправки к частоте соответствует номеру гармоники. Используя свойства функций Бесселя [7] $N_n'(-x) = -N_n'(x) + 2i J_n'(x)$, легко проверить, что для гармоник $n=0$ и $n=1$ существуют только слабо-затухающие решения вида:

$$\text{Im } \delta_0 = -\frac{\pi}{2} \frac{\nu_0}{\gamma_0} \omega_0 [J_1(\beta_0) - \beta_0 J_0(\beta_0)]^2 \quad (2.8)$$

$$\text{Im } \delta_{|n|} = -2\pi \frac{\nu_0}{\gamma_0} \omega_0 [J'_1(2\beta_0) + \kappa_1 J_1(2\beta_0)]^2, \quad \kappa_1 = \frac{1-2\beta_0^2}{2\beta_0} \quad (2.9)$$

Это означает, что даже учет собственных сил кольца приводит к устойчивости его относительно изменения большого радиуса и сдвига как целого.

Для гармоник $n > 1$ появляются неустойчивые решения вида^{х)}

$$\text{Im } \delta_{|n|} = \frac{\pi}{2} \frac{\nu_0}{\gamma_0} (n-1)^2 \omega_0 [J'_n(a) - \kappa_n J_n(a)]^2, \quad (2.10)$$

где

$$a = (|n| - 1) \beta_0, \quad \kappa_n = \frac{1 - \frac{|n|-1}{|n|} \beta_0^2}{\frac{|n|-1}{|n|} \beta_0}$$

Из (2.8) следует, что максимальные инкременты имеют гармоники с $n \geq 1$, так как, используя асимптотику функций Бесселя при $n \gg 1$, получим, что с ростом n инкремент $\text{Im } \delta = n e^{-\xi n}$, то есть экспоненциально спадает.

В заключение данного параграфа отметим, что действительная часть уравнения (2.1) определяет поправку к частоте, связанную с собственными силами. Однако при принятых предположениях эта поправка имеет относительный порядок $\frac{\nu_0}{\gamma_0}$, поэтому не представляет интереса.

§ 3. Собственные колебания цилиндрического слоя заряженных частиц при наличии проводящего экрана

Вернемся к уравнению (1.9). Используя рассуждения, приведенные в предыдущем параграфе, легко убедиться, что и в этом случае существуют две ветви собственных колебаний тонкого цилиндрического слоя заряженных частиц:

х) Здесь нужно отметить, что в /3/ неустойчивые решения вида (2.9) не были получены. Это, по-видимому, связано с предельным переходом $\omega \rightarrow 0$ в правой части уравнения (2.1), что при релятивистском вращении частиц $\beta_0 \approx 1$ несправедливо.

квазипродольные и квазиперечные. Первая ветвь соответствует частотам $\omega = n \omega_0$, колебания вблизи которых неустойчивы с инкрементом^{/6/}

$$\text{Im } \omega = \pm \Omega \frac{n}{\gamma_0} \sqrt{\frac{2(b-r_0)}{b}}, \quad (3.1)$$

который уменьшается при уменьшении расстояния между слоем частиц и экраном. Подробнее о расщепке квазипродольных колебаний (возникающей и здесь в результате эффекта "отрицательной" массы) при наличии экрана см. работу одного из авторов^{/6/}. Здесь мы более подробно остановимся на интересном эффекте полного подавления квазиперечных неустойчивостей (ветвь $\omega = (n \pm 1) \omega_0$) цилиндрическим экраном с бесконечной проводимостью. Сразу же следует отметить, что такое подавление поперечных неустойчивостей отсутствует для плоского заряженного слоя вблизи проводящей стенки^{х)}.

Рассмотрим уравнение (1.9). Представляя функцию Ханкеля в виде $H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + i N_n(z)$, легко получить вместо (1.7)

$$B = i\pi [J'_n(a) N'_n(a) - J_n^2(a) \frac{N'_n(\frac{\omega b}{c})}{J'_n(\frac{\omega b}{c})}], \quad (3.2)$$

$$A = i\pi [J_n(a) N_n(a) - J_n^2(a) \frac{N'_n(\frac{\omega b}{c})}{J'_n(\frac{\omega b}{c})}], \quad (3.3)$$

$$C = i\pi [\frac{1}{2} J'_n(a) N_n(a) + \frac{1}{2} J_n(a) N'_n(a) - J_n(a) J'_n(a) \frac{N'_n(\frac{\omega b}{c})}{J'_n(\frac{\omega b}{c})}]. \quad (3.4)$$

Из выражений (3.3) - (3.4) следует, что для $n \geq 1$ (при этом $a \geq 0$ и $\frac{\omega b}{c} \geq 0$) величины A , B и C чисто мнимы, поэтому правая часть уравнения (1.9) действительна. Из этого непосредственно вытекает, что квазиперечные колебания с частотами $\omega = (n \pm 1) \omega_0$ и $n \geq 1$ устойчивы, а действительная

х) Подробнее о плоском слое вблизи подводящей стенки и предельном переходе от цилиндрической геометрии к плоской см. ниже, § 4.

правая часть (1.9) определяет лишь поправку к собственным частотам колебаний^{x)}. Действительно, представляя p в виде $p = \omega_0 + \delta$, получим

$$\delta = + \frac{\pi}{2} \frac{v_0}{\gamma_0} \omega_0 (n+1)^2 \left[J'_n(a) + \kappa J'_n(a) [N'_n(a) + \kappa N_n(a) - (J'_n(a) + \kappa J_n(a)) \frac{N'_n(a)}{J'_n(a)}] \right], \quad (3.5)$$

$$a_1 = (n+1) \beta_0 \frac{b}{r_0}.$$

Остается рассмотреть гармоники с $n \leq 0$, так как для них $a = (n+1) \beta_0$ и $\frac{\omega b}{c}$ отрицательны. Используя соотношения для Бесселевых функций с отрицательным аргументом $N_{-n}(-x) = N_n(x) + 2i J_n(x)$, $J_{-n}(-x) = J_n(x)$ вместо (3.2), получим

$$B = \pi i \left\{ J'_{|n|}(|a|) N'_{|n|}(|a|) - J'^2_{|n|}(|a|) \frac{N'_{|n|}(|\frac{\omega b}{c}|)}{J'_{|n|}(|\frac{\omega b}{c}|)} \right\}, \quad (3.6)$$

$$A = \pi i \left\{ J_{|n|}(|a|) N_{|n|}(|a|) - J^2_{|n|}(|a|) \frac{N'_{|n|}(|\frac{\omega b}{c}|)}{J'_{|n|}(|\frac{\omega b}{c}|)} \right\}, \quad (3.7)$$

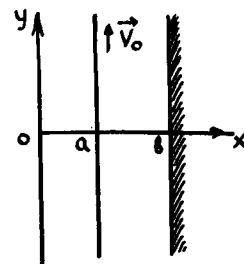
$$C = \pi i \left\{ \frac{1}{2} J'_{|n|}(|a|) N_{|n|}(|a|) + \frac{1}{2} J_{|n|}(|a|) N'_{|n|}(|a|) \right\} \cdot (|a|) \times \frac{N'_{|n|}(|\frac{\omega b}{c}|)}{J'_{|n|}(|\frac{\omega b}{c}|)}. \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что выражения для A , B и C , определенные формулами (3.2) - (3.4), и выводы относительно устойчивости справедливы для любых гармоник квазипоперечной ветви колебаний в том числе и для $n < 0$.

^{x)} Отметим сразу, что вышеприведенное рассуждение об устойчивости квазипоперечных колебаний сохраняет силу лишь при выполнении неравенства $\frac{v_0}{c} \ll 1$, так как при $\frac{v_0}{c} \rightarrow 1$ уравнение (1.9) является трансцендентным и может иметь комплексные корни.

§ 4. Исследование устойчивости заряженной токонесущей плоскости, находящейся вблизи проводящего экрана

Для того чтобы выяснит существенные различия в устойчивости цилиндрического слоя заряженных частиц, окруженного проводящим экраном, от плоского слоя вблизи проводящей стенки, рассмотрим задачу о собственных колебаниях последнего. Будем считать, что слой расположен в точке $x = a$, а проводящая стенка - в $x = b$. Полагаем далее по аналогии с предыдущей задачей, что $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Заряженные частицы движутся в положительном направлении оси y с нерелятивистской скоростью v_0 . Легко проверить, что существует стационарное гидродинамическое состояние для такой системы.



Уравнение для потенциалов возмущений в области $x < b$ имеют вид

$$\Delta \bar{A}_1^I + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{A}_1^I = -\frac{4\pi}{c} \bar{j}_1^I; \quad \bar{A}_1^I = \bar{A}_1^I + A_1^I \quad (4.1)$$

$$\Delta \bar{\phi}^I + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\phi}^I = -4\pi \bar{\rho}^I; \quad \bar{\phi}^I = \bar{\phi}^I + \phi^I. \quad (4.2)$$

Используя метод, аналогичный предложенному в [6], запишем плотности тока и заряда в виде

$$\bar{j}_1^I = j_1'(y, \omega) \delta[x - a(y, \omega)] \quad (4.3)$$

$$\bar{\rho}^I = \rho'(y, \omega) \delta[x - a(y, \omega)]. \quad (4.4)$$

Применяя преобразование Фурье по x и y к уравнениям (4.1) и (4.2), получим

$$\bar{A}_1^I(x, k_2, \omega) = \frac{4\pi}{c} \int j_1'(a, k_2, \omega) \frac{e^{ik_1(x-a)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk_1 \quad (4.5)$$

$$\bar{\phi}^I(x, k_2, \omega) = \frac{4\pi}{c} \int \rho'(a, k_2, \omega) \frac{e^{ik_1(x-a)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk_1. \quad (4.6)$$

$\vec{k} = (k_1, k_2, 0)$

Используя метод изображений, получим выражения для потенциалов возмущений в области $x < b$, связанных с наличием проводящего экрана

$$A_1^I(x, k_2, \omega) = \frac{4\pi}{c} \int j^I(a, k_2, \omega) \frac{e^{ik_1(2b-a-x)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk_1 \quad (4.7)$$

$$\phi^I(x, k_2, \omega) = 4\pi \int \rho^I(a, k_2, \omega) \frac{e^{ik_1(2b-a-x)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk_1 \quad (4.8)$$

Наконец, потенциалы в области $x > b$ имеют вид

$$A_1^II(x, k_2, \omega) = \frac{4\pi\mu}{c} \int j^II(a, k_2, \omega) \frac{e^{ik_1[\zeta(x-b)+b-a]}}{\zeta^2 k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu} dk_1 \quad (4.9)$$

$$\phi^II(x, k_2, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon} \int \rho^II(a, k_2, \omega) \frac{e^{ik_1[\zeta(x-b)+b-a]}}{\zeta^2 k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu} dk_1 \quad (4.10)$$

Удовлетворяя условию калибровки $\text{div } \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ и граничным условиям при $x = b$, получим (учитывая уравнение $k^2 = \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}$, справедливое во всех точках, кроме $x = a$) систему уравнений

$$k_1 j'_y - k_2 j'_x - A = B,$$

$$\frac{\omega}{c} j'_x - k_1 c \rho' + \frac{c}{\omega} k_2 A = -\frac{ck_2}{\omega} B,$$

$$\frac{\omega}{c} j'_y - k_2 c \rho' + \frac{c}{\omega} k_1 A = \frac{\zeta c}{\epsilon \omega} k_1 B, \quad (4.11)$$

где

$$A = k_1 j'_y + k_2 j'_x, \quad (4.12)$$

$$B = \zeta k_1 j'_y - k_2 j'_x, \quad (4.13)$$

$$\zeta^2 = 1 - (1 - \epsilon\mu) \frac{\omega^2}{k_1^2 c^2}.$$

Первые два уравнения системы (4.11) линейно-зависимы, поэтому решение (4.11) есть

$$A = \frac{\frac{\zeta}{\epsilon} - 1}{\frac{\zeta}{\epsilon} + 1} (k_1 j'_y - k_2 j'_x); \quad (4.14)$$

$$B = \frac{2}{\frac{\zeta}{\epsilon} + 1} (k_1 j'_y - k_2 j'_x). \quad (4.15)$$

Предполагаем далее (для простоты) экран бесконечнопроводящим $\epsilon \rightarrow \infty$, тогда $\zeta^2 \rightarrow \epsilon \frac{\omega^2}{k_1^2 c^2}$ и

$$A = -(k_1 j'_y - k_2 j'_x), \quad (4.15)$$

$$B = 2(k_1 j'_y - k_2 j'_x). \quad (4.17)$$

Формулы (4.16), (4.17) совместно с (4.12), (4.13), (4.5) - (4.8) и уравнением непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ позволяют получить выражения для полей возмущений в линейном приближении.

$$H_x = \frac{4\pi i \rho'_0 \omega}{c \omega'} \int [k_1 \vec{v}_y - k_2 \vec{v}_x \kappa] (e^{ik_1(x-a)} + e^{ik_1(2b-a-x)}) \frac{dk_1}{k^2 - \omega^2/c^2} \quad (4.18)$$

$$E_x = -\frac{4\pi i \rho'_0}{\omega'} \int k_2 [k_1 \vec{v}_y - k_2 \vec{v}_x \kappa] (e^{ik_1(x-a)} + e^{ik_1(2b-a-x)}) \frac{dk_1}{k^2 - \omega^2/c^2} \quad (4.19)$$

$$E_y = \frac{4\pi i \rho'_0}{\omega'} \int k_1 [k_1 \vec{v}_y - k_2 \vec{v}_x \kappa] (e^{ik_1(x-a)} - e^{ik_1(2b-a-x)}) \frac{dk_1}{k^2 - \omega^2/c^2} \quad (4.20)$$

и

$$\omega' = \omega - k_2 v_0, \quad \kappa = 1 - \frac{\omega v_0}{k_2 c^2}.$$

При интегрировании по dk_1 в выражениях (4.18) - (4.20) нужно ввести бесконечно малое затухание для правильного обхода полюсов подинтегральных

выражений, т.е. вместо знаменателя $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ нужно писать $k^2 - \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}$, где ϵ имеет малую положительную мнимую добавку ($|\epsilon| \approx 1$). При этом могут существовать два вида колебаний: поверхностные и направляемые волны. Первые имеют зависимость от x в виде $\exp\{-\alpha|x|\}$ и $\alpha = \sqrt{k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$, вторые - $-\exp\{i\alpha_1|x|\}$ и $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2}$. Однако достаточно получить дисперсионное уравнение для одного вида колебаний, так как переход к другому виду колебаний осуществляется простой заменой $\alpha \rightarrow i\alpha_1$. Подставляя формулы (4.18) - (4.20) в линеаризованные уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}(\vec{\nabla} \vec{v}) = \frac{e \vec{E}}{m} + \frac{e}{mc} [\vec{v} \vec{H}], \quad (4.21)$$

получим систему однородных уравнений для возмущений скоростей \vec{v}_x и \vec{v}_y .

$$-i(\omega' + \frac{q_1}{\omega'}) \vec{v}_x + (i \frac{p_1}{\omega'} - \omega_{H_0}) \vec{v}_y = 0, \quad (4.22)$$

$$(i \frac{q_2}{\omega'} + \omega_{H_0}) \vec{v}_x - i(\omega' + \frac{p_2}{\omega'}) \vec{v}_y = 0, \quad (4.23)$$

где

$$q_1 = i \Omega_0^2 a k_2^2 \kappa^2 \frac{\pi}{\alpha} (1 + e^{2i\alpha(b-\alpha)} e^{-\eta(b-\alpha)}), \quad (4.24)$$

$$q_2 = -i \Omega_0^2 a k_2^2 \kappa \pi e^{2i\alpha(b-\alpha)} e^{-\eta(b-\alpha)}, \quad (4.25)$$

$$p_1 = -q_2, \quad (4.26)$$

$$p_2 = i \Omega_0^2 a \pi (1 - e^{2i\alpha(b-\alpha)} e^{-\eta(b-\alpha)}). \quad (4.27)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\Omega_0^2 = \frac{4\pi e \rho_0'}{m a}$, η - положительная константа, пропорциональная $\text{Im} \epsilon$.

Из уравнений (4.22) и (4.23) получим дисперсионное уравнение, описывающее собственные колебания исследуемой системы:

$$\omega'^2 (\omega'^2 - \omega_{H_0}^2) = -\omega'^2 (p_2 + q_1) - 2i p_1 \omega' \omega_{H_0} - (p_2 q_1 + p_1^2). \quad (4.28)$$

Мы считаем, что плоский слой находится во внешнем поле. Это соответствует появлению в (4.22), (4.23) и (4.28) частоты ω_{H_0} . Этим мы добиваемся полной аналогии с предыдущей задачей. Более того, как и раньше, будем полагать $\frac{\Omega_0^2}{\omega_{H_0}^2} \ll 1$.

Из (4.28) видно, что нулевое приближение по этому параметру малости метода последовательных приближений, дает:

$$\omega' = 0, \quad \omega' = \pm \omega_{H_0}. \quad (4.29)$$

При этом частоты $\omega' = \pm \omega_{H_0}$ являются частотами поперечных колебаний слоя. Это утверждение легко проверить, если положить в (4.21) $E_y = 0$. При этом дисперсионное уравнение принимает вид

$$(\omega'^2 - \omega_{H_0}^2) \omega' = -q_1 \omega' - i p_1 \omega_{H_0}. \quad (4.30)$$

Отсюда следует, что ветвь $\omega' = \pm \omega_{H_0}$ является неустойчивой и инкремент неустойчивости δ находится из уравнения:

$$\delta = \pm \frac{1}{2 \omega_{H_0}} [-\text{Im} q_1 \mp \text{Re} p_1]. \quad (4.31)$$

Вернемся к уравнению (4.28)^{x)}. Для ветви $\omega' = \pm \omega_{H_0}$ получим:

$$\delta = \pm \frac{1}{2 \omega_{H_0}} [-\text{Im} (p_2 + q_1) \mp 2 \text{Re} p_1]. \quad (4.32)$$

Принимая во внимание (4.24) - (4.27), видим, что в отличие от предыдущей задачи формулы (4.31), (4.32) дают ненулевые инкременты для поперечной ветви колебаний.

Ветвь колебаний $\omega' = 0$ исследовать не будем. Заметим только, что для нее получаются инкременты, пропорциональные квадратному корню из плотности.

^{x)} Заметим, что по виду оно совпадает с уравнением (1.9).

§ 5. Обсуждение результатов

Проведенное исследование позволяет видеть качественное различие в устойчивости цилиндрического экранированного слоя и плоского слоя около проводящей стенки по отношению к квазиперечным колебаниям. В § 3 было показано, что наличие проводящего цилиндрического экрана срывает неустойчивость этого вида колебаний. С другой стороны, из § 4 следует, что плоский экран может увеличивать инкременты желобковой неустойчивости. Такое различие, по-видимому, связано с различной структурой изображений для плоской и цилиндрической геометрии. Однако существует непосредственный предельный переход формул цилиндрической геометрии для величин A , B и C (см. (1.7)) при "распрямлении" задачи к q_1 , q_2 , p_2 . При этом дисперсионное уравнение (4.30) полностью переходит в уравнение (1.9). (При условии, что в (1.9) нужно считать $\gamma_0 = 1$).

"Распределение" задачи состоит в устремлении $r_0 \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, но $b - r_0$ нужно считать конечной величиной. При осуществлении этого предельного перехода необходимо помнить, что при получении коэффициентов (1.7) предполагалось существование у ω малой положительной мнимой части. Для примера покажем асимптотическое соответствие величины A величине q_1 ; как видно из сравнения уравнений (1.6) и (4.21), (4.22), между A и q_1 должно существовать следующее асимптотическое соотношение

$$ik^2 \frac{n^2}{\beta_0^2} A \approx q_1 / \Omega_0^2 \quad (5.1)$$

Используя асимптотические разложения для функций $H_n^{(1)}(z)$ и $J_n(z)$, получим:

$$A \approx \frac{1}{2} e^{ia r_0} (e^{ia r_0} + e^{-ia r_0}) + \frac{1}{4} (e^{ia r_0} + e^{-ia r_0}) \frac{ie^{iab}}{\frac{1}{2i}(e^{iab} - e^{-iab})} \quad (5.2)$$

$a = \frac{\omega}{c}$. Выделим у ω мнимую часть $\omega = \omega' + i\eta$. Сохраняя в круглых скобках (5.2) главные члены, пропорциональные $e^{\eta r_0}$, $e^{\eta b}$, имеем:

$$A \approx 1 + e^{2ia(b-r_0)} e^{-\eta(b-r_0)} \quad (5.3)$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты при A и q также совпадают, если положить $k_2 = \frac{n}{r_0}$, $v_0 = \omega_0 r_0$.

Аналогично можно показать соответствие между остальными величинами:

$$\begin{aligned} k \frac{n^2}{\beta_0^2} \beta^2 \omega C &= q_2 / \Omega_0^2 \\ i \frac{n^2}{\beta_0^2} \beta^2 \omega B &= p_2 / \Omega_0^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Авторы благодарны Э.А. Перельштейну за плодотворные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. А.А. Коломенский, А.И. Лебедев. Атомная энергия, 7, 549 (1959).
2. С.Е. Nielsen, A. N. Sessler. Rev. Sci. Instr. 30, 80 (1959).
3. V. K. Niel, W. Heckrotte. J of applied physics. v. 36 N9 (1965).
4. В.И. Балбеков, А.А. Коломенский. Атомная энергия 19, 126 (1965).
5. Н.С. Диканский, А.И. Скрынский. Препринт ИЯФ СОАН СССР, Новосибирск, 1965.
6. И.Н. Иванов. Влияние экранировки на эффект отрицательной массы. Препринт ОИЯИ Р9-3476, Дубна 1967.
7. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. Ф.М. Москва, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 августа 1967 г.