

С 3538

И-203

18.8 1967

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 3474 - 2



И.И. Иванов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦЕВОГО ТОКА  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

1967.

Р9 - 3474 - 2

И.И. Иванов

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦЕВОГО ТОКА  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Объединенный институт  
специальных исследований  
Библиотека

5328/1 чф

## 1. Введение

Как известно, (см., например, /1/) в объемном пустом резонаторе могут существовать стоячие электромагнитные волны с определенной частотой  $\Omega_0$ , удовлетворяющей условию:

$$\frac{\Omega_0^2}{c^2} = k^2 + \chi^2. \quad (1)$$

В этом равенстве  $c$  - скорость света;  $k$  - волновое число колебаний в  $z$ -направлении,  $\chi$  - волновое число колебаний в  $r$ -направлении. Поле пустого резонатора можно представить суперпозицией  $E$  - и  $H$  -волн. Для  $E$  -волн  $\chi = \frac{\lambda_{ns}}{b}$ , где  $\lambda_{ns}$  - корень уравнения  $J_n(\lambda_{ns}) = 0$  и  $k = m\pi/L$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Для  $H$  - волн  $\chi = \frac{\lambda'_{ns}}{a}$ , где  $\lambda'_{ns}$ , в свою очередь, корень уравнения  $J'_n(\lambda'_{ns}) = 0$ , а  $k = (2m+1)\pi/2L$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$   $2L$  - длина резонатора,  $b$  - его радиус. Индекс функции Бесселя совпадает с номером моды колебаний в азимутальном направлении. Выбрана цилиндрическая система координат, центр которой совпадает с геометрическим центром резонатора, а ось  $Z$  направлена вдоль его образующей. Теперь представим, что в этот резонатор помещен круглый кольцевой ток  $j_\theta = \rho_0 c \beta \theta_0$ , плотность заряда

$\rho_0 = \frac{eN}{2\pi r_0}$  достаточно мала, а именно:

$$\frac{N}{2\pi r_0} \frac{e^2}{m_0 c^2} \frac{1}{\gamma_0} \ln \frac{8 r_0}{a} \ll 1, \quad (2)$$

$a$  - малый радиус кольца,  $r_0$  - большой радиус кольца;  $\gamma_0 = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Соответственно,  $e$  и  $m_0$  - величина заряда и его масса покоя.

Предполагая условие (2) выполненным, будем считать, что собственное поле кольца существенно не изменило поле пустого резонатора. Под собственным полем кольца следует понимать поле кольца в стационарном состоянии плюс поле от возникших в нем по каким-то причинам "паразитных" плотностей тока и заряда. (В частности, своим происхождением последние могут быть обязаны взаимодействием поля стационарного кольца с собственным полем резонатора).

Из последующего будет видно, что главную роль в поведении пучка будут играть именно поля "паразитных" плотностей.

Поясним утверждение о несущественном изменении поля резонатора. Считается, что влияние полей кольца свелось только к изменению собственной частоты резонатора, а пространственное распределение поля осталось тем же самым. Ниже из общего вида дисперсионного уравнения будет ясно, что в линейном приближении по параметру малости (2) мы вправе считать пространственное распределение поля нагруженного резонатора неизменным.

Взаимодействие полей "паразитных" плотностей с полем резонатора, частота которого изменилась, может привести к увеличению этих плотностей. В этом случае мы будем иметь дело с неустойчивостью пучка (для определенности электронного), связанного с собственной частотой резонатора.

В дальнейшем, кроме неравенства (2), мы будем использовать неравенства

$$a \ll \frac{1}{\chi}, \quad (3a)$$

$$a \ll \frac{1}{k}. \quad (3b)$$

Выполнение неравенств (3) позволит нам считать кольцо бесконечно тонким, а результаты распространить на тор с малым радиусом  $a^x$ .

## 2. Получение дисперсионного уравнения

Сформулированные предположения позволяют решать поставленную задачу вариационным методом. Основные принципы этого метода и соответствующая литература приведены в работе <sup>1/2</sup>.

<sup>x</sup>) Условие (3b) обязательно только для кольца. При рассмотрении E-слоя его не существует.

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$ , создаваемая паразитными плотностями тока  $\vec{j}$  и заряда  $\vec{\rho}$ , находится из уравнения

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + 4\pi \text{grad } \vec{\rho}. \quad (4)$$

$\vec{j}$  и  $\vec{\rho}$  связаны уравнением непрерывности

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

где под  $\vec{j}$  следует понимать:

$$\vec{j} = \vec{l}_r \rho_0 \vec{v}_r + l_\theta (\rho_0 \vec{v}_\theta + \vec{\rho} v_{\theta_0}) + \vec{l}_z \rho_0 \vec{v}_z. \quad (6)$$

При написании (6) предполагалось, что в стационарном состоянии кольцо имеет распределение частиц с плотностью  $\rho_0(r, z)$  и скоростью частиц  $\vec{v}_0 = \vec{l}_\theta v_{\theta_0}$ . Пусть  $\rho_0(r, z) = \sigma_0(z) \delta(r - r_0)$ . При возмущениях в кольце для каждой частицы можно написать соответствующие  $\xi(\theta, z, t)$ ,  $\eta(\theta, z, t)$ ,  $\zeta(\theta, z, t)$ .  $\xi$  - имеет смысл смещения радиальной координаты,  $\eta$  - смещение частицы по азимуту от равновесной, вращающейся с частотой

$$\omega_0 = \frac{v_{\theta_0}}{r_0} = - \frac{e H_{z0}(r_0)}{m_0 c \gamma_0}, \quad (7)$$

$\zeta$  - z-вая координата возмущенной частицы. Распределение плотности такого образования можно представить в виде:

$$\rho(r, z, \theta, t) = \sigma(\theta, z, t) \delta[r - r_0 - \xi(\theta, z, t)]. \quad (8)$$

Радиус-вектор каждой частицы записывается в виде:

$$\vec{R} = (r_0 + \xi) \vec{l}_{r_0} + \eta \vec{l}_{\theta_0} + \zeta \vec{l}_{z_0}. \quad (9)$$

$\vec{l}_{r_0}$ ,  $\vec{l}_{\theta_0}$ ,  $\vec{l}_{z_0}$  - орты точки, в которой находится невозмущенная стационарная частица в момент времени  $t$ . Понимая под  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  переменные Эйлера,

можно построить гидродинамические скорости и ускорения, связать в линейном приближении  $\vec{p} = \rho - \rho_0$  и  $\vec{V}$  через уравнение непрерывности (5) и написать систему уравнений движения. Конечный результат имеет вид:

$$\vec{p} = -\sigma_0 \left( \frac{1}{r_0} \xi + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \delta(r-r_0) - \xi \sigma_0 \delta'(r-r_0),$$

$$\vec{j}_r = \sigma_0 \dot{\xi} \delta(r-r_0),$$

$$\vec{j}_\theta = \sigma_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta(r-r_0) - \sigma_0 \omega_0 r_0 \xi \delta'(r-r_0) - \sigma_0 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \omega_0 r_0 \delta(r-r_0),$$

$$\vec{j}_z = \sigma \dot{\zeta} \delta(r-r_0),$$

$$\ddot{\xi} + (\nu^2 - \gamma_0^2) \omega_0^2 \xi - \gamma_0^2 \omega_0 \dot{\eta} = \frac{e}{\gamma_0 m_0} (\vec{E}_r + \omega_0 r_0 \vec{H}_z),$$

$$\ddot{\eta} + \omega_0 \dot{\xi} = \frac{e}{\gamma_0^3 m_0} E_\theta,$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{e}{\gamma_0 m_0} (\vec{E}_z - \omega_0 r_0 \vec{H}_r).$$

Более подробное представление об аппарате вывода (10) можно получить из /3-5/.

Точка в (10) означает  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $\nu^2 = 1 - \frac{r_0}{H_z} \frac{\partial H_z}{\partial r} \Big|_{r=r_0}$ . Система (10)

и уравнение

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (11)$$

позволяют правую часть (4) также выразить через составляющие  $\vec{E}$ . Для этого представим все интересующие нас величины в виде:

$$\vec{E}(r, \theta, z, t) = \vec{E}_{\omega, n, k}(r) \quad (12)$$

$$\vec{H}(r, \theta, z, t) = \vec{H}_{\omega, n, k}(r)$$

$$\xi(\theta, z, t) = \int d\omega \sum_{k, n} e^{ikz - in\theta + i\omega t} \xi_{\omega, n, k}$$

$$\eta(\theta, z, t) = \eta_{\omega, n, k}$$

$$\zeta(\theta, z, t) = \zeta_{\omega, n, k}$$

Подставим  $\vec{p}$  и  $\vec{j}$  из (10) в (4), умножим его на  $\frac{1}{2L} e^{-ik'z}$  и проинтегрируем по  $dz$  от нуля до  $2L$ . Воспользуемся (12). Получим:

$$\nabla_r^2 \vec{E}_{\omega, n, k}(r) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} - k \right) \vec{E}_{\omega, n, k}(r) = \quad (13)$$

$$= 4\pi \sum_k F_{kk} \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j [ a_{j\xi} \xi_{\omega, n, k} + a_{j\eta} \eta_{\omega, n, k} + a_{j\zeta} \zeta_{\omega, n, k} ]$$

$j = 1$  соответствует  $r$ ,  $j = 2 - \theta$ ,  $a_j = 3$  соответствует  $z$ .

Коэффициенты  $a_{j\xi}$ ,  $a_{j\eta}$ ,  $a_{j\zeta}$  следующие:

$$a_{r\xi} = -\frac{1}{c^2} \rho \omega \delta(r-r_0) - \frac{1}{r_0} \delta'(r-r_0) - \delta''(r-r_0),$$

$$a_{r\eta} = \frac{in}{r_0} \delta'(r-r_0),$$

$$a_{r\zeta} = -ik' \delta'(r-r_0),$$

$$a_{\theta\xi} = -\frac{i\omega\omega_0 r_0}{c^2} \delta'(r-r_0) + \frac{in}{r_0^2} \delta(r-r_0) + \frac{in}{r_0} \delta'(r-r_0),$$

$$a_{\theta\eta} = -\frac{\omega^2}{c^2} \delta(r-r_0) + \frac{n^2}{r_0^2} \delta(r-r_0),$$

$$a_{\theta\zeta} = -\frac{nk'}{r_0} \delta(r-r_0) - k' \delta'(r-r_0),$$

$$a_{z\xi} = -\frac{ik'}{r_0} \delta(r-r_0) - k' \delta'(r-r_0),$$

$$a_{z\eta} = -\frac{k'n}{r_0} \delta(r-r_0),$$

$$a_{z\zeta} = -\frac{\omega p}{c^2} \delta(r-r_0) + k'^2 \delta(r-r_0),$$

$$p = \omega - n\omega_0,$$

$$F_{kk'} = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \sigma_0(z) e^{i(k-k')z} dz.$$

$E_{\omega, n, k}$  являются функциями только  $r$ . Эти функции можно представить разложениями

$$\vec{E}_{\omega, n, k}(r) = \sum_n X_n \vec{R}_n(r), \quad (15)$$

$X_n$  - коэффициенты разложения, а  $\vec{R}_n(r)$  считаем известными, поскольку мы предположили неизменность радиального распределения поля.  $\vec{R}_n(r)$  имеют вид [1/

Для E-волны

$$R_n^r = \frac{ik}{\chi} j_n(\chi r)$$

$$R_n^\theta = \frac{kn}{\chi^2 r} j_n(\chi r)$$

$$R_n^z = j_n(\chi r)$$

Для H-волны

$$R_n^r = -\frac{n\omega}{c\chi} j_n(\chi r)$$

$$R_n^\theta = \frac{i\omega}{c\chi} j_n(\chi r)$$

$$R_n^z = 0$$

(16)

Используя (15) и уравнения движения (10), получим:

$$\sum_n X_n \cdot [ \nabla_r^2 \vec{R}_n(r) + ( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} - k ) \vec{R}_n(r) ] =$$

$$= -4\pi \sum_{n', k'} X_{n'} F_{kk'} \frac{1}{p^2 p_1^2} \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j [ X_{0j} + X_{1j} p + X_{2j} p_1^2 ], \quad (17)$$

где

$$p_1^2 = p^2 - \nu^2 \omega_0^2;$$

$$X_{0j} = a_{j\eta} \frac{e \omega_0^2}{m_0 \gamma_0} R_n^z(r_0),$$

$$X_{1j} = (a_{j\xi} p + i \omega_0 a_{j\eta}) \frac{e}{m_0 \gamma_0 \omega} [ p R_n^r(r_0) + i \omega_0 \frac{\partial}{\partial r} r R_n^\theta(r) |_{r=r_0} ] -$$

$$- i \omega_0 a_{j\xi} \frac{e}{m_0 \gamma_0} R_n^\theta(r_0),$$

$$X_{2j} = a_{j\eta} \frac{e}{m_0 \gamma_0^3} R_n^\theta(r_0) + a_{j\xi} \frac{e}{m_0 \gamma_0 \omega} [ p R_n^z(r_0) - \omega_0 r_0 k' R_n^\theta(r_0) ].$$

Умножим равенство (17) на  $\vec{R}_n(r) r dr$  и проинтегрируем от нуля до  $b$ . С учетом ортогональности функций  $\vec{R}_n(r)$ :

$$\int_0^b \vec{R}_n(r) \vec{R}_n(r) r dr = M \delta_{nn'}, \quad (18)$$

$$M = \frac{b^2 \omega^2}{c^2 \chi^2} j_{n+1}^2(\chi),$$

из (17) следует уравнение:

$$X_n \frac{\omega^2 - \Omega^2}{c^2} = - \frac{4\pi}{M} \sum_{n', k'} X_{n'} \frac{F_{kk'}}{p^2 p_1^2} \int_0^b r dr \sum_{j=1}^3 R_n^j(r) [\chi_{0j} + \chi_{1j} p + \chi_{2j} p^2] \quad (19)$$

Выражение (19) представляет алгебраическую систему уравнений для определения коэффициентов  $X_n$ . Так как система однородна, то для существования нетривиального решения необходимо приравнять определитель этой системы к нулю. Мы получим дисперсионное уравнение. Анализ определителя системы (19) в общем виде затруднителен. Однако это можно сделать приближенительно, пользуясь резонансным характером некоторых членов ряда в правой части (19) и тем, что вся правая часть пропорциональна малому параметру задачи - плотности пучка.

## 2. Анализ дисперсионного уравнения

Поскольку правая часть (19) пропорциональна малому параметру, то мы можем считать, что в первом приближении  $\omega = \text{Re } \Omega + i \text{Im } \omega$ , где  $\text{Re } \Omega = \text{Re } \omega$  и  $\frac{\delta}{\text{Re } \omega} \ll 1$  ( $\delta \equiv \text{Im } \omega$ ). Эта же пропорциональность доказывает правильность предположения о неизменности в линейном приближении функций  $\vec{R}_n(r)$ . Собственную частоту резонатора представим в виде:

$$\Omega = \Omega_0 \left(1 + \frac{1}{Q}\right), \quad (20)$$

$\text{Re } \Omega = \Omega_0$ , а  $Q$  - добротность резонатора.

Считаем  $Q \gg 1$ , чтобы не нарушалось условие распространения (1). Итак,  $\text{Re } \omega = \Omega_0$ . Но для каждого  $\omega$  существует определенный набор волновых чисел  $k', \chi'$  (как функция  $v'$ ), в то время как для каждого  $\Omega_0$  существует собственный набор чисел  $k, \chi$  (как функция  $v$ ). Отсюда следует, что условие резонанса  $\text{Re } \omega = \Omega_0$  автоматически выбирает волну с частотой, близкой к  $\Omega_0$ , и определенным набором  $k' = k$  и  $\chi' = \chi$  (что означает  $v' = v$ ). Это дает право оставлять вместо двойной суммы в (19) только один член с  $k' = k$  и  $v' = v$ . Как легко увидеть, равенства  $\text{Re } \omega = \Omega_0$  недостаточно для резонанса; необходимо условие  $\Omega_0 = p \omega_0$  (при этом  $p^2 \approx -\delta^2$ ) или  $\Omega_0 = (p \pm \nu) \omega_0$  (при  $p_1^2 \approx \pm 2i \nu \omega_0 \delta$ ). Считая  $\delta$  малым

параметром и пользуясь методом последовательных приближений, получим для резонанса  $\Omega_0 = p \omega_0$  инкремент:

$$\delta^2 \left( \delta - \frac{p \omega_0}{Q} \right) = - \frac{2i \pi c^2}{p \omega_0} \frac{F_{kk}}{M} \int_0^b r dr \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{p} \chi_{0j} + \chi_{2j} \right) R_n^j(r), \quad (21)$$

при этом в правой части следует считать  $p = 0$ ,  $p_1^2 = -\nu^2 \omega_0^2$ . Для резонанса  $\Omega_0 = (p \pm \nu) \omega_0$  соответственно имеем:

$$\delta \left( \delta - \frac{p \omega_0}{Q} \right) = \pm \frac{\pi c^2 F_{kk}}{\nu \omega_0^2 (p \pm \nu) p^2 M^0} \int_0^b r dr \sum_{j=1}^3 (\chi_{0j} + p \chi_{1j}) R_n^j(r) \quad (22)$$

и

$$p = \pm \nu \omega_0, \quad p_1 = 0.$$

Особое место занимает случай с  $\nu = 0$ . При этом  $p = p_1$  и мы имеем инкремент

$$\delta^4 \left( \delta - \frac{p \omega_0}{Q} \right) = \frac{2i \pi c^2 F_{kk}}{p \omega_0 M} \int_0^b r dr \sum_{j=1}^3 \chi_{0j} R_n^j(r). \quad (23)$$

Из (21), (22) и (23) видно, что большие гармоники в азимутальном направлении  $\frac{p \omega_0}{Q} = \delta$  имеют меньшие инкременты, чем малые. Далее будем рассматривать только те гармоники, для которых  $\frac{p \omega_0}{Q} \ll \delta$ . Это, кстати, наиболее опасные гармоники, сильно изменяющие форму пучка. Полученная картина имеет полную аналогию с пучковыми неустойчивостями в плазме. Если поле пустого резонатора сопоставить с полем бесконечной плазмы, а кольцо или слой с пучком, идущим сквозь него, то инкременту (21) будет соответствовать пучковая неустойчивость, связанная с черенковским взаимодействием частицы с волной.

Инкременты (22) суть расщепление резонансной линии черенковского взаимодействия в результате аномального эффекта Допплера. При  $\nu = 0$  происходит слияние резонансных линий и раскачка колебаний с инкрементом (23).

Частота  $\omega = p \omega_0$  является частотой продольных (вдоль  $\theta$ ) колебаний, возникающих в пучке. Частота  $\omega = (p \pm \nu) \omega_0$  - частота поперечных колебаний. Если не допускать резонанса  $\omega$  с собственной частотой резонатора  $\Omega_0$ , то все равно видно, что при  $p = 0$  и  $p_1 = 0$  мы получим неустойчивость. Первая

связана с эффектом отрицательной массы, возникающим в пучке, вторая связана с искривлениями кольцевой формы типа "эмеек" и "желобков".

При  $\nu = 0$  частоты поперечных и продольных колебаний совпадают и появление инкремента (23), по-видимому, связано с дополнительным резонансом между продольным и поперечным движением частиц.

Прежде чем перейти к детальному анализу формул (21), (22) и (23) заметим, что выведенный коэффициент

$$F_{kk} = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \sigma_0(z) dz$$

показывает, что нет принципиальной разницы в поведении тонкого кольца или E-слоя.

$$\text{Если } \sigma_0(z) = \delta(z), \text{ то } F_{kk} = \frac{eN}{2\pi r_0} \frac{1}{2L},$$

где  $N$  - полное число частиц в кольце. Если  $\sigma_0(z) = \text{const}$  (E-слой), то  $F_{kk} = \frac{eN}{2\pi r_0}$ , но  $N$  теперь число частиц на единице длины слоя. После выполнения всех операций в (21), (22) и (23) мы получим следующие выражения:

$$\delta^3 = - \frac{2i\pi e F_{kk} c^2 n^2 (2 - \beta_0^2)}{m_0 \gamma_0 M r_0 n \omega_0} \left( \frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{r_0 k^2}{n^2} \right) R_n^\theta(r_0) [R_n^\theta(r_0) - \frac{2}{2 - \beta_0^2} \frac{k r_0}{n} R_n^z(r_0)] \quad (25)$$

$$\delta^2 = \pm \frac{\pi e c^2 F_{kk}}{m_0 \gamma_0 M r_0 \nu^3 \omega_0^2 (n \pm \nu)^2} \left[ n R_n^\theta(r) \mp \nu \frac{\partial R_n^\theta(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} - i \nu^2 R_n^z(r_0) \right] \times$$

$$\times \left\{ \mp i \nu^3 \beta_0^2 R_n^z(r_0) + R_n^\theta(r_0) [2n^2 - (n \pm \nu)^2 \beta_0^2 + \nu (n \pm \nu) \beta_0^2 \pm n \nu] - \right. \quad (26)$$

$$\left. - k r_0 (n \pm \nu) R_n^z(r) \mp 2n \nu r_0 \frac{\partial R_n^\theta(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \pm 2k r_0 \nu r_0 \frac{\partial R_n^z(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \mp \frac{\pm}{\pm \nu (n \pm \nu) r_0 \beta_0^2} \frac{\partial R_n^\theta(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right\}$$

$$\delta^5 = \frac{2i\pi e F_{kk} \omega_0 c^2 n (2 - \beta_0^2)}{m_0 \gamma_0 M r_0} R_n^\theta(r_0) [R_n^\theta(r_0) - \frac{2}{2 - \beta_0^2} \frac{k r_0}{n} R_n^z(r_0)] \quad (26)$$

Оценим инкременты для тонкого кольца (считаем выполненным условие (36))

при  $\nu = 1$ ,  $\beta_0 = 1$ . Детально исследуем инкремент (24), так как он при этом максимален. Следует заметить, что условие распространения этих волн (1) имеет вид:

$$\chi^2 + k^2 = \frac{n^2 \beta_0^2}{r_0^2}$$

или

$$k^2 = \chi^2 \left[ \frac{n^2 \beta_0^2}{\chi^2 r_0^2} - 1 \right].$$

Из положительности  $k^2$  следует

$$\chi^2 < \frac{n^2 \beta_0^2}{r_0^2} \quad (27)$$

С использованием (27) получаем оценку  $\frac{\delta}{\omega_0}$  для (24) с завышением

$$\left( \frac{\delta}{\omega_0} \right)^3 = i \frac{e^2 N}{m_0 c^2 \gamma_0} \frac{1}{2L} \frac{r_0^2}{b^2} n \begin{cases} \left( \frac{\omega_0}{\lambda_{n+1} \frac{r_0}{b}} \right)^2 & \text{для E-волн} \\ \left( \frac{\omega_0}{\lambda_{n+1} \frac{r_0}{b}} \right)^2 & \text{для H-волн} \end{cases} \quad (28)$$

Для  $N \approx 10^{13}$ ,  $\gamma_0 \approx 4$ ,  $2L \approx 150$  см,  $\frac{r_0}{b} = 1$ ,  $n \leq 10$ , получаем  $\frac{\delta}{\omega_0} \approx 10^{-1}$ .

Инкременты (25) анализировать подробно не имеет смысла, поскольку они меньше (28). Интересно заметить следующее. Из (16) видно, что правая часть (25) действительна всегда пока  $\chi^2 > 0$ , т.е.  $\frac{\omega^2}{c^2/25} > \chi^2$ . Если считать, что резонанса с камерой нет, то разделив левую часть на  $\frac{i\delta}{(n \pm \nu) \omega_0 (n \pm \nu)^2 \omega_0^2}$ , получим инкременты поперечных неустойчивостей. Ясно, что при  $\delta \approx iT$ , где  $T$  - действительно.

Отсюда следует вывод об устойчивости таких колебаний в отсутствие резонанса. Формула (26) дает инкремент больше (28). Однако не следует забывать,



что она дает правильные значения инкремента, если только  $\frac{\delta}{\omega_0} \ll 1$ . Это значит, что она справедлива только для (в применении к кольцу) плотностей

$$\left[ \frac{e}{m_0 c^2} \frac{N}{2L} \frac{1}{\gamma_0} \right]^{1/3} \ll 1. \quad (28)$$

Условию (28) удовлетворяют только малые плотности. В ином случае нужно более тщательно исследовать дисперсионное уравнение. Тем не менее из рассмотренного следует, что кольцо в магнитном поле с  $\nu = 0$  более неустойчиво по отношению ко всяким типам возмущения, чем кольцо в поле с  $\nu = 1$ .

В заключение автор выражает большую признательность В.И. Курилко за ценные обсуждения при выполнении работы.

#### Л и т е р а т у р а

1. В.В. Никольский. Теория электромагнитного поля. Издат. Высшей школы, 1961.
2. В.И. Курилко. Устойчивость модулированного пучка в волноводе, нагруженном дисками. Препринт УФТИ, 1966.
3. V. K. Neil, W. Heckrotte. J. of Applied Physics. v.36. 9. 1965.
4. R. J. Briggs, V. K. Neil, Plasma Physics. v.9, 2, 1967.
5. М.Н. Иванов. Влияние экранировки на эффект отрицательной массы. Препринт ОИЯИ Р9-3676, Дубна 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 августа 1967 г.