

3434

Экз. чит. зала

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 3434 - 1



В.П. Дмитриевский, Т.М. Прилипко, В.С. Рыбалко

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

ВЛИЯНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ
НА ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ
С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

1967.

Р9 - 3434 - 1

В.П. Дмитриевский, Т.М. Прилипко, В.С. Рыбалко

**ВЛИЯНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ
НА ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ
С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ**

В в е д е н и е

Одной из основных проблем, возникающих при разработке ускорителей с пространственной вариацией магнитного поля, является проблема высококоэффициентного вывода пучка из камеры ускорителя. Успешное решение этой задачи связано с созданием таких условий для движения частиц, при которых осуществляется значительное радиальное разделение орбит на конечных радиусах ускорителя при сохранении устойчивости аксиального движения.

Резкое увеличение радиального шага траекторий может быть достигнуто только при создании резонансной связи между азимутальной и радиальной степенями свободы движения. Для вывода пучка из синхротронов обычно применяется регенеративный метод^{/1,2/}. В этом методе используются локальные неоднородности градиента магнитного поля для параметрического резонансного возбуждения радиальных колебаний вблизи значения частоты $Q_r = 1$. Регенеративный метод успешно применен для вывода пучка из изохронных циклотронов на низкие энергии^{/3,4/}, рассматриваются возможности использования подобных систем в релятивистских циклотронах и фазотронах с вариацией магнитного поля.

Для релятивистского циклотрона на энергию протонов 700 Мэв^{/5/}, наряду с модифицированным резонансным методом вывода пучка^{/6/}, также разрабатывался метод вывода, использующий локальные неоднородности магнитного поля "градиентные" каналы. При изучении вопросов, связанных с выводом пучка из проектируемого циклотрона, был проведен теоретический анализ влияния локальных неоднородностей на движение частиц в периодических магнитных полях, рассмотрены вопросы расчета и моделирования необходимых конфигураций магнитных полей, а также проведен значительный комплекс численных расчетов траекторий по точным уравнениям движения.

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что использование таких систем для вывода пучка из ускорителей с пространственной вариацией является перспективным. При хорошем качестве внутреннего пучка и тщательной оптимизации параметров выводной системы можно получить высокий коэффициент вывода, сравнимый со значениями, полученными при использовании механизма нелинейного резонанса $Q_z = 8/4$ [7].

В настоящей работе изложены основные результаты теоретических исследований, на основе которых были определены требуемые параметры локальных неоднородностей для релятивистского циклотрона.

В общем случае конфигурация магнитного поля неоднородностей должна быть такой, чтобы до входа частиц в область максимальных значений возмущения частота радиальных колебаний изменилась до соответствующего резонансного значения $Q_z = 1, 3/2, 2$. В этой переходной области аксиальное движение должно оставаться устойчивым и формфактор аксиальных колебаний не должен превышать допустимых значений. Необходимые для этих целей величины возмущений магнитного поля нельзя считать малыми, в связи с чем не всегда можно использовать для анализа их влияния асимптотические методы. Поэтому в работе используется матричный метод и метод построения аналитических решений обобщенного уравнения Хилла.

Показано, что воздействие локальных неоднородностей на движение частиц в периодических магнитных полях отличается рядом существенных особенностей, использование которых открывает широкие возможности для осуществления эффективных резонансных методов вывода пучка.

Исследование устойчивости орбит при наличии локальных неоднородностей на основе матричного метода

Для анализа движения частиц в магнитных полях с пространственной вариацией обычно используют уравнения движения в цилиндрической системе координат с азимутальным углом ϕ в качестве независимой переменной. Однако при наличии локальных неоднородностей градиента магнитного поля более удобно использовать натуральную систему координат, связанную с невозмущенной равновесной орбитой $r_0(\phi)$. В этом случае линейные уравнения бетатронных колебаний имеют вид

$$\frac{d^2 X}{d\theta^2} + \left(\frac{R_0}{\rho_0}\right)^2 (1+n) X = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 Z}{d\theta^2} - \left(\frac{R_0}{\rho_0}\right)^2 n Z = 0, \quad (2)$$

где $n = \frac{\rho_0}{H_z} \frac{\partial H_z}{\partial x}$ - показатель роста магнитного поля на орбите в направлении главной нормали, ρ_0 и R_0 - радиус кривизны и эквивалентный радиус орбиты, $\theta = \frac{1}{R_0} \int_0^\phi \sqrt{r_0^2 + r_0'^2} d\phi$ - обобщенный азимут. При отсутствии возмущений период коэффициентов в уравнениях (1), (2) совпадает с периодом структуры основного магнитного поля равным $2\pi/N$. Если же в некоторой области $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \alpha$ градиент магнитного поля имеет значение

$$\frac{\partial H_z}{\partial X} = \frac{\partial H_{z0}}{\partial X} + G,$$

где H_{z0} - невозмущенное магнитное поле, G - добавочный постоянный градиент, введенный в области протяженностью α , то $n = n_0 + \Delta n_1(\theta)$ и период коэффициентов становится равным 2π .

При заданных начальных условиях $X = X_0$, $X' = X'_0$ при $\theta = \theta_0$ значение вектора $\begin{vmatrix} X \\ X' \end{vmatrix}$ на азимуте θ_0 после ν -оборотов определяется ν -ой степенью матрицы $M_{\theta_0+2\pi}$, что, согласно теореме Сильвестра [8], можно представить в форме

$$M_{\theta_0+2\pi}^\nu = \begin{vmatrix} \cos 2\pi Q \nu - \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \frac{\sin 2\pi Q \nu}{\sin 2\pi Q}; & a_{12} \frac{\sin 2\pi Q \nu}{\sin 2\pi Q} \\ a_{21} \frac{\sin 2\pi Q \nu}{\sin 2\pi Q}; & \cos 2\pi Q \nu + \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \frac{\sin 2\pi Q \nu}{\sin 2\pi Q} \end{vmatrix} \quad (3)$$

где $\cos 2\pi Q = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$, $a_{ik}(\theta_0)$ - элементы матрицы $M_{\theta_0+2\pi}$. Из выражения (3) видно, что при $\frac{1}{2} |\text{Sp } M_{2\pi}| < 1$ отклонение частиц от орбиты на азимуте $\theta = \theta_0$ в зависимости от числа оборотов описывается гармоническими колебаниями, амплитуда и фаза которых зависят от начальных условий и элементов матрицы a_{ik} .

При увеличении Δa_1 , частота радиальных колебаний возрастает и, в зависимости от значения Q_0 , может достигнуть ближайшего целого или полуполого значения. В этом случае $\frac{1}{2} |\operatorname{Sp} M_{2\pi}| = 1$ и движение становится неустойчивым, отклонение частиц от орбиты растет пропорционально числу оборотов.

При дальнейшем увеличении Δa_1 шпур матрицы становится по модулю большим единицы и

$$M_{\theta_0 + 2\pi}^\nu = \begin{pmatrix} \operatorname{Ch} 2\pi\nu\beta - \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \frac{\operatorname{Sh} 2\pi\nu\beta}{\operatorname{Sh} 2\pi\beta} & ; & a_{12} \frac{\operatorname{Sh} 2\pi\nu\beta}{\operatorname{Sh} 2\pi\beta} \\ a_{21} \frac{\operatorname{Sh} 2\pi\nu\beta}{\operatorname{Sh} 2\pi\beta} & ; & \operatorname{Ch} 2\pi\nu\beta + \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \frac{\operatorname{Sh} 2\pi\nu\beta}{\operatorname{Sh} 2\pi\beta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

где

$$\operatorname{Ch} 2\pi\beta = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} M_{2\pi} > 1.$$

Из (4) видно, что движение неустойчиво, и при больших значениях ν отклонение от орбиты возрастает по экспоненциальному закону. Если известны элементы трансформационной матрицы, относящиеся к произвольному начальному значению $\theta = \theta_0$, то на основании формул (3), (4) можно определить все характеристики движения как в переходной области, так и в области радиальной неустойчивости, где осуществляется режим разделения орбит. Однако для ускорителей с пространственной вариацией непосредственное применение матричного метода не представляется возможным, так как квазиупругие силы нельзя аппроксимировать кусочно-постоянными функциями.

Общее решение уравнений (1), (2) в области устойчивости имеет вид ^{/8/}

$$X = A \Phi(\theta) \operatorname{Cos} [Q\theta + \Psi(\theta) + B],$$

где Φ и Ψ — периодические функции, являющиеся модулем и фазой комплексных решений в форме флок. При заданной амплитуде колебаний функция $A\Phi(\theta)$ является огибающей всех траекторий в пучке. Нормируя линейно-независимые решения так, чтобы вронский равнялся единице, для элементов трансформационной матрицы можно получить выражения

$$a_{11} = \frac{\Phi(\theta)}{\Phi(\theta_0)} \operatorname{Cos} \Omega - \Phi(\theta) \Phi'(\theta_0) \operatorname{Sin} \Omega, \quad a_{12} = \Phi(\theta) \Phi(\theta_0) \operatorname{Sin} \Omega,$$

$$a_{21} = - \left[\frac{1}{\Phi(\theta)\Phi(\theta_0)} + \Phi'(\theta)\Phi'(\theta_0) \right] \sin \Omega + \left[\frac{\Phi'(\theta)}{\Phi(\theta_0)} - \frac{\Phi'(\theta_0)}{\Phi(\theta)} \right] \cos \Omega, \quad (5)$$

$$a_{22} = \frac{\Phi(\theta_0)}{\Phi(\theta)} \cos \Omega + \Phi'(\theta)\Phi(\theta_0) \sin \Omega,$$

где

$$\Omega = Q(\theta - \theta_0) + \Psi(\theta) - \Psi(\theta_0) \quad \text{и}$$

$$[Q + \Psi'(\theta)] \Phi^2(\theta) = 1.$$

При $\theta = \theta_0 + 2\pi$ получим компоненты матрицы, соответствующие периоду структуры магнитного поля

$$a_{11} = \cos 2\pi Q - \Phi'(\theta_0)\Phi(\theta_0) \sin 2\pi Q, \quad a_{12} = \Phi^2(\theta_0) \sin 2\pi Q,$$

$$a_{21} = - \left[\frac{1}{\Phi^2(\theta_0)} + \Phi'^2(\theta_0) \right] \sin 2\pi Q, \quad (6)$$

$$a_{22} = \cos 2\pi Q + \Phi'(\theta_0)\Phi(\theta_0) \sin 2\pi Q,$$

Из (6) видно, что функция Φ и ее производная связаны с компонентами матрицы соотношениями

$$\Phi^2(\theta_0) = \frac{a_{12}(\theta_0)}{\sin 2\pi Q}, \quad (7)$$

$$\Phi'^2(\theta_0) = \frac{-a_{21}(\theta_0)}{\sin 2\pi Q} - \frac{\sin 2\pi Q}{a_{12}(\theta_0)}.$$

Если известно решение уравнения бетатронных колебаний $X(\theta)$, удовлетворяющее произвольным начальным условиям, то, как следует из выражений (6), частота и огибающая колебаний могут быть определены как

$$\cos 2\pi Q = \frac{X(\theta + 2\pi) + X(\theta - 2\pi)}{2X(\theta)} = \frac{X'(\theta + 2\pi) + X'(\theta - 2\pi)}{2X'(\theta)}, \quad (8)$$

$$\Phi^2(\theta) = \frac{2}{\sin 2\pi Q} \frac{X^2(\theta) - X(\theta + 2\pi)X(\theta - 2\pi)}{[X(\theta + 2\pi) - X(\theta - 2\pi)]X'(\theta) - [X'(\theta + 2\pi) - X'(\theta - 2\pi)]X(\theta)}$$

Обозначим $M_0(\theta, \theta_0)$ - трансформационную матрицу невозмущенного движения. Элементы этой матрицы можно представить в виде, аналогичном выражениям (5), полагая

$$Q = Q_0,$$

$$\Phi = \Phi_0(\theta) = \Phi_0\left(\theta + \frac{2\pi}{N}\right),$$

$$\Psi = \Psi_0(\theta) = \Psi_0\left(\theta + \frac{2\pi}{N}\right),$$

где Q_0 , Φ_0 - частота и огибающая колебаний невозмущенного движения.

Из свойств матрицы $M_0(\theta, \theta_0)$ отметим следующие:

$$1) \quad M_0(\theta_0, \theta_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$2) \quad M_0\left(\theta_0 + \frac{2\pi}{N}k, \theta_0\right) = M_0^k\left(\theta_0 + \frac{2\pi}{N}, \theta_0\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$3) \quad M_0(\theta_2, \theta_1) M_0(\theta_1, \theta_0) = M_0(\theta_2, \theta_0),$$

$$\theta_2 > \theta_1 > \theta_0.$$

При наличии одной локальной неоднородности матрица, соответствующая периодичности структуры магнитного поля (одному обороту), может быть определена как

$$M(\theta_0 + 2\pi, \theta_0) = M_0(\theta_0, \theta_1 + \alpha) M_1(\theta_1 + \alpha, \theta_1) M_0(2\pi + \theta_1, \theta_0). \quad (9)$$

для

$$\theta_1 + \alpha \leq \theta_0 \leq 2\pi + \theta_1.$$

При заданной частоте Q_0 значение элементов этой матрицы определяется огибающей колебаний невозмущенного движения и элементами матрицы M_1 , осуществляющей преобразование входных значений $\begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix}_{\text{вх}}$ в значения $\begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix}_{\text{вых}}$ на выходе из области возмущения. Конечно, все общие соотношения, приведенные выше для радиального движения, при соответствующем изменении обозначений относятся и к аксиальному движению. В частности, отношение максимальных значений огибающих $\frac{\Phi_{\text{max}}}{\Phi_0^{\text{max}}}$ характеризует увеличение аксиальных размеров пучка при воздействии локальных неоднородностей.

Огибающие бетатронных колебаний невозмущенного движения

Для исследования движения частиц в магнитном поле вида

$$H_{z_0}(r, \phi) = H(r) \{ 1 + \epsilon(r) \sin [\beta(r) - N \phi] \} \quad (10)$$

с помощью уравнений движения в натуральной системе координат (1), (2) необходимо определить характеристики орбиты ρ_0 , R_0 и значение показателя $n_0 = \frac{\rho_0}{H_{z_0}} \frac{\partial H_{z_0}}{\partial X}$ в зависимости от обобщенного азимута. Рассмотрим движение частиц с импульсом $P = \frac{e}{c} H(R) R$. В этом случае равновесная орбита может быть найдена как периодическое решение уравнения

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{r_0^2 + 2r_0'^2 - r_0 r_0''}{(r_0^2 + r_0'^2)^{3/2}} = \frac{1}{R} \frac{H_{z_0}(r_0, \phi)}{H(R)} \quad (11)$$

Уравнение орбиты можно представить в форме

$$r_0(\phi) = R - \Delta R + \rho(\phi),$$

где $(R - \Delta R)$ - средний радиус орбиты, ρ - вынужденные колебания с периодичностью структуры магнитного поля. Так, для магнитного поля вида (10) форма орбиты с достаточной точностью описывается выражением ^{/10/}

$$r_0(\phi) = R - \frac{R(\epsilon n_N + 2\epsilon^2)}{2(n+1)[N^2 - n - 1]} + \frac{R\epsilon}{N^2 - n - 1} \sin [\beta(R) - N \phi], \quad (12)$$

где $n = \frac{R}{H} \frac{\partial H}{\partial R}$, $n_N = \frac{R}{H} \frac{\partial}{\partial R} (\epsilon H)$.

Из выражения (12) видно, что в ускорителях с пространственной вариацией вынужденные колебания малы по сравнению со средним радиусом орбиты

($\frac{\rho_{max}}{R} \approx \frac{\epsilon}{N^2}$ при $\epsilon \ll 1$). Значение показателя магнитного поля на орбите $r_0(\phi)$ можно определить как

$$n_0 = \frac{\rho_0^2}{H(R)R} \left\{ \frac{\partial H_{z_0}}{\partial r} \right|_{r=r_0} \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + r_0'^2}} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial H_{z_0}(r_0, \phi)}{\partial \phi} \frac{-r_0'}{\sqrt{r_0^2 + r_0'^2}} \right\} \quad (13)$$

Используя (12) и (13), уравнения (1), (2) можно привести к уравнениям

$$\frac{d^2 X}{d\theta^2} + \left\{ 1 + n - \frac{\epsilon^2 (R\beta')^2}{2(N^2 - n - 1)} + \epsilon R\beta' \cos[\beta(R) - N\phi(\theta)] \right\} X = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d^2 Z}{d\theta^2} + \left\{ -n + \frac{\epsilon^2 (R\beta')^2}{2(N^2 - n - 1)} + \frac{\epsilon^2 N^2}{2(N^2 - n - 1)} - \epsilon R\beta' \cos[\beta(R) - N\phi(\theta)] \right\} Z = 0, \quad (15)$$

в которых азимутальный угол ϕ должен быть выражен через обобщенный азимут θ . Легко видеть, что

$$\theta = \phi + \int_0^\phi \frac{\rho_0}{R} d\phi$$

и периодическая функция $\int_0^\phi \frac{\rho_0}{R} d\phi$ имеет максимальное значение $= \frac{\epsilon}{N^3}$. Поэтому в (14), (15) можем приближенно считать, что $\phi(\theta) = \theta$.

Таким образом, уравнения бетатронных колебаний в натуральной системе координат приводятся к уравнениям Матъе, которые аналогичны уравнениям колебаний в цилиндрической системе координат /10/.

Заменой переменной $\beta(R) - N\theta = 2\xi$ уравнения приводятся к канонической форме

$$Y'' + [a_y - 2q \cos 2\xi] Y = 0, \quad Y = (X, Z) \quad (16)$$

со значениями параметров

$$a_x = \frac{4}{N^2} \left\{ 1 + n - \frac{\epsilon^2 (R\beta')^2}{2(N^2 - n - 1)} \right\}, \quad a_z = \frac{4}{N^2} \left\{ -n + \frac{\epsilon^2 (R\beta')^2}{2(N^2 - n - 1)} + \frac{\epsilon^2 N^2}{2(N^2 - n - 1)} \right\},$$

$q = \pm \frac{2\epsilon}{N^2} R\beta'$ - положительное для аксиального движения и отрицательное для радиального.

Решение уравнений (16) выражается через функции Матъе

$$Y = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{2k} \cos(2k + \mu_Y) \xi + B \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{2k} \sin(2k + \mu_Y) \xi,$$

$$\mu_{x,z} = \frac{2}{N} Q_{x,z},$$

которые обычно нормируются согласно условию^{/11/}

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{2k}^2 = 1.$$

В таблице 1 представлены значения коэффициентов C_{2k} , рассчитанные на ЭВМ для параметров, соответствующих предельному радиусу релятивистского циклотрона.

Т а б л и ц а 1

	C_0	$C_2 \cdot 10^1$	$C_{-2} 10^1$	$C_4 \cdot 10^2$	$C_{-4} \cdot 10^2$	$C_6 \cdot 10^5$	$C_{-6} \cdot 10^5$
$(-1)^k C_{2k}^{(x)}$	0,9858	-0,6043	-1,5640	0,1106	0,4514	-0,9597	-5,2970
$C_{2k}^{(z)}$	0,9921	-0,8160	-0,9560	0,1759	0,2232	-1,7100	-2,2890

Из таблицы видно, что коэффициенты функций Матье C_{2k} быстро уменьшаются с ростом K и с достаточной точностью можно считать не равными нулю только коэффициенты C_0 , C_2 и C_{-2} . Расчеты показывают, что это приближение справедливо для любого положения рабочей точки в первой области устойчивости при $q \leq 1$. В этом случае из рекуррентных соотношений^{/11/} можно получить простые и достаточно точные выражения для коэффициентов C_0 , C_2 и C_{-2}

$$C_0 = 1 - \frac{q^2}{2} \left\{ \frac{1}{[a - (\mu + 2)^2]^2} + \frac{1}{[a - (\mu - 2)^2]^2} \right\}, \quad (17)$$

$$C_2 = \frac{q}{a - (\mu + 2)^2}, \quad C_{-2} = \frac{q}{a - (\mu - 2)^2}.$$

Из анализа выражений (17) видно, что функция Ψ_0 является достаточно малой, и при рассмотрении невозмущенного движения можно не учитывать перио-

дическую модуляцию фазы бетатронных колебаний. Нормируя линейно-независимые решения так, чтобы их вронская равнялась единице, получим приближенные выражения для огибающих в виде

$$\Phi_{0y} = \frac{1}{\sqrt{Q_{0y}}} \{ 1 - q M(\mu_y) \cos[\beta - N\theta] \}, \quad (18)$$

где

$$M(\mu) = \frac{1}{(2 + \mu)^2 - a} + \frac{1}{(-2 + \mu)^2 - a}.$$

Из этих выражений видно, что максимум огибающей для радиальных колебаний находится на азимуте $\theta = \frac{1}{N} \beta(R)$, т.е. в точке, где вынужденные колебания орбиты проходят через нуль, а скорость $\frac{dr_0}{d\phi}$ имеет максимальное отрицательное значение. Максимум Φ_{0x} смещен относительно максимума Φ_{0z} на угол $\frac{\pi}{N}$.

Для аксиального движения $\mu_x \ll 1$ и численное значение $M(\mu_x)$ близко к значению $M = 1/2$. В этом случае выражение (18) совпадает с модулем функции Флоке, определенной для уравнения (16) на основе первого приближения метода усреднения /9/. При увеличении μ численное значение M возрастает. В частности, для радиальных колебаний на предельных радиусах релятивистского циклотрона $\mu_x = 0,45$ и значение $M(\mu_x) = 0,61$.

На рис.1. приведены графики функций $\sqrt{Q_{0x}} \Phi_{0x}$ и $\sqrt{Q_{0z}} \Phi_{0z}$, рассчитанные на основе численного решения уравнения (14), (15). На этом же рисунке для сравнения приведена зависимость $\sin(\beta - N\phi)$ от азимута, характеризующая вынужденные колебания орбиты. Видно, что положение экстремальных значений огибающих и отношение величин $\frac{\Phi_{\max}}{\Phi_{\min}}$ хорошо согласуются с формулой (18).

На рис.2 приведена равновесная орбита $r_0(\phi)$ и одна из траекторий движения в аксиальном направлении $Z(\phi)$, рассчитанные на ЭВМ по точным уравнениям движения в магнитном поле релятивистского циклотрона, сформированном на модели магнитной системы /12/. Видно, что из-за модуляции с периодичностью $2\pi/N$ траектория заключена между кривыми Z_{\min} и Z_{\max} и отношение $\frac{Z_{\max} - Z_{\min}}{Z_{\max} + Z_{\min}} = 0,18$. Так как это отношение можно представить

в виде $\frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{\Phi_{\max} + \Phi_{\min}} = \frac{q}{2} = 0,18$, то это показывает, что точность приближенного выражения (18) вполне достаточна для описания движения в реальных магнитных полях. На рис.2 приведена также зависимость $\frac{dZ}{d\phi}$ от азимута (кривая 2). Видно, что скорости, вызываемые периодической модуляцией, значительно превышают скорости колебаний с частотой $Q_{\mu 0}$. Это означает, что компоненты матрицы $a_{21}(\theta_0)$, $a_{22}(\theta_0)$ существенно зависят от положения θ_0 относительно периода структуры магнитного поля, и аппроксимация невозмущенного движения гармоническими колебаниями с частотой Q_0 является недопустимой. Однако в переменных

$$\eta = \frac{Y}{\Phi_0} \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{Q_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\Phi_0^2} = (\theta - \theta_0) + \frac{1}{Q_0} [\psi_0(\theta) - \psi_0(\theta_0)] \quad (19)$$

уравнения бетатронных колебаний приводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \eta}{dr^2} + Q_0^2 \eta = 0.$$

Следовательно, для описания движения можно использовать матрицы гармонических колебаний, осуществляя линейное преобразование начальных и конечных значений Y и Y' согласно выражению

$$\begin{vmatrix} Y \\ Y' \end{vmatrix} = K^{-1}(\theta) \begin{vmatrix} \cos Q_0 r, & \frac{\sin Q_0 r}{Q_0} \\ -Q_0 \sin Q_0 r, & \cos Q_0 r \end{vmatrix} K(\theta_0) \begin{vmatrix} Y_0 \\ Y'_0 \end{vmatrix}, \quad (20)$$

где

$$K_0(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Phi_0(\theta)}, & 0 \\ -Q_0 \Phi_0'(\theta), & Q_0 \Phi_0(\theta) \end{vmatrix}.$$

Частоты и огибающие колебаний при наличии локальных неоднородностей

В области возмущения $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + a$ движение описывается уравнениями, отличающимися от уравнений (14), (15) только измененным значением постоянного коэффициента, в соответствии со значением показателя

$$n_1 = n + \Delta n_1, \quad \Delta n_1 = \frac{R}{H} G$$

в области протяженностью α .

При известном значении μ решения в этой области могут быть найдены на основе методов, изложенных в работе /11/. Однако в рассматриваемом случае более удобно воспользоваться приближенным решением интегральных уравнений, которым удовлетворяют линейно-независимые решения уравнения Матве

$$Y_1(\xi) = \cos \sqrt{a} (\xi - \xi_0) - 2q \int_{\xi_0}^{\xi} \cos 2t \frac{\sin \sqrt{a} (t - \xi)}{\sqrt{a}} Y_1(t) dt, \quad (21)$$

$$Y_2(\xi) = \frac{\sin \sqrt{a} (\xi - \xi_0)}{\sqrt{a}} - 2q \int_{\xi_0}^{\xi} \cos 2t \frac{\sin \sqrt{a} (t - \xi)}{\sqrt{a}} Y_2(t) dt.$$

Решение уравнений (21) находится методом последовательных приближений и определяется квадратурами тригонометрических функций. Исследование этих решений показывает, что при малых значениях азимутальной протяженности области возмущения ($\alpha \ll 1$) трансформационная матрица M_1 может быть представлена в виде

$$M_{1Y}(\theta_1 + \alpha, \theta_1) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{\alpha N^2}{4} [a - 2q \cos(\beta - N\theta_1)] & 1 \end{vmatrix}, \quad (22)$$

независимо от положения изображающей точки на области устойчивости. В этом случае матрицу оборота можно привести к виду

$$M(\theta_0 + 2\pi, \theta_0) = M_0(\theta_0, \theta_1) M_1 M_0(2\pi + \theta_1, \theta_0)$$

со значением матрицы M_1 , равным

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -T_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (23)$$

где $T_1 = \pm \Delta n_1 \alpha$ и (-) относится к аксиальному движению, (+) - к радиальному.

Матрица M_1 в форме (23) соответствует приближению "тонких" линз и обычно используется в теории регенеративного метода /13/. Частота и огибающая колебаний при воздействии одной локальной неоднородности определяются в этом приближении выражениями

$$\cos 2\pi Q = \cos 2\pi Q_0 - \frac{T_1}{2} \Phi_0^2(\theta_1) \sin 2\pi Q_0, \quad (24)$$

$$\Phi_0^2(\theta) \sin 2\pi Q = \Phi_0^2(\theta) \left\{ \sin 2\pi Q_0 - \frac{T_1}{2} \Phi_0^2(\theta_1) [\cos 2Q_0(\pi - \theta + \theta_1) - \cos 2\pi Q_0] \right\}.$$

Чтобы отметить особенности влияния градиентных неоднородностей на движение частиц в периодических магнитных полях и оценить пределы применимости приближения "тонких" линз, рассмотрим решение для случая, когда движение описывается гармоническими колебаниями. Такое рассмотрение является строгим для аксиально-симметричных магнитных полей, а в ускорителях с пространственной вариацией соответствует учету в функциях Матве только основного члена, связанного с коэффициентом C_0 . В этом случае легко найти матрицу, соответствующую периодичности системы (одному обороту), и определить частоту и огибающую колебаний при любых значениях α . Если неоднородность градиента создана в области $0 \leq \phi \leq \alpha$, то

$$\cos 2\pi Q = \cos(2\pi - \alpha) Q_0 \cos Q_1 \alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{Q_0}{Q_1} + \frac{Q_1}{Q_0} \right) \sin Q_0(2\pi - \alpha) \sin Q_1 \alpha, \quad (25)$$

$$\Phi^2(\phi) \sin 2\pi Q = A_1 + B_1 \cos Q_1(\alpha - 2\phi) \quad \text{при } 0 \leq \phi \leq \alpha;$$

$$\Phi^2(\phi) \sin 2\pi Q = A_0 + B_0 \cos Q_0(2\pi - 2\phi + \alpha)$$

при

$$\alpha \leq \phi \leq 2\pi.$$

где

$$A_1 = \frac{\sin Q_1 \alpha}{Q_1} \cos Q_0(2\pi - \alpha) + \frac{\sin Q_0(2\pi - \alpha)}{Q_0} \cos Q_1 \alpha \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Q_0^2}{Q_1^2} \right),$$

$$B_1 = \frac{\sin Q_0(2\pi - \alpha)}{Q_0} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q_0^2}{Q_1^2} \right),$$

$$A_0 = \frac{\sin Q_0 (2\pi - \alpha)}{Q_0} \cos Q_1 \alpha + \frac{\sin Q_1 \alpha}{Q_1} \cos Q_0 (2\pi - \alpha) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Q_1^2}{Q_0^2}\right),$$

$$B_0 = \frac{\sin Q_1 \alpha}{Q_1} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q_1^2}{Q_0^2}\right).$$

и Q_1 - действительное или мнимое - в зависимости от значения n_1 в области возмущения.

На рис. 3 приведена зависимость Q_x и Q_z от n_1 при $\alpha = 0,1$ для $Q_{x0} = 0,9$ и $Q_{z0} = 0,45$, соответствующих значению $n = -0,2$ на предельных радиусах синхроциклотрона. Видно, что введение одной локальной неоднородности с $n_1 > 0$ (регенератор) позволяет осуществить раскачку радиальных колебаний на конечных радиусах синхроциклотрона при сохранении аксиальной устойчивости. Понять основные особенности механизма воздействия неоднородности на движение частиц можно на основе гармонического подхода к рассматриваемой задаче. Разложив магнитное поле в ряд Фурье, получим уравнения бетатронных колебаний в форме уравнений Хилла

$$Y'' + \left[a_y - 2q \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k \xi \right] Y = 0, \quad (26)$$

где

$$a_x = -4 \left(1 + n + \Delta n_1 \frac{\alpha}{2\pi} \right), \quad a_z = -4 \left(n + \Delta n_1 \frac{\alpha}{2\pi} \right)$$

$$q = \pm 8 \frac{\Delta n_1}{2\pi} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad a_1 = 1, \quad a_k = \frac{1}{k} \frac{\sin k \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$2\xi = \phi - \frac{\alpha}{2}.$$

Если считать $0 \leq \mu \leq 1$ для каждой области устойчивости, то частоты колебаний связаны с показателем μ соотношением

$$Q_y = \frac{1}{2} (m - 1 + \mu_y),$$

где m - номер области устойчивости.

Хотя ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k \xi$ сходится медленно ($a_1 = 1$, $a_{10} = 0,96$, $a_{20} = 0,84$, $a_{30} = 0,67$ и т.д.), основное влияние на частоты колебаний оказывают низшие гармоники. Значение μ для уравнения (26) может быть определено из выражения

$$\cos \pi \mu_y = \cos \sqrt{a_y} \pi - \frac{q^2}{2} \frac{\pi}{4} \frac{\sin \sqrt{a_y} \pi}{\sqrt{a_y}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2 - a_y} \quad (27)$$

Расчеты по формуле (27) показывают, что в рассматриваемом случае частоты колебаний определяются с достаточной точностью при учете только четырех низших гармоник. Изменение частот, обусловленное отдельными гармоническими компонентами возмущения при $\Delta n_1 = 5$, приведено в таблице II

Т а б л и ц а II

№ гармоники	I	2	3	4
ΔQ_z	-0,0029	0,0181	0,0012	0,0002
ΔQ_x	0,0416	0,0056	0,0021	0,0001

Видно, что основное влияние на частоту радиальных колебаний имеет вторая гармоника, а на частоту аксиальных колебаний — первая.

На рис. 4 показана огибающая аксиальных колебаний, рассчитанная для значений $n_1 = 2, 7, 30$. Огибающая имеет минимум в зоне регенератора при $\phi = \frac{\alpha}{2}$. Так как амплитуда колебаний для частиц, пересекающих область регенератора, пропорциональна функции $\frac{\Phi(\xi)}{\Phi(0)}$, то максимальные отклонения частиц от плоскости $Z = 0$ возрастут в 1,5; 2,5 и 4,5 раза при действии регенератора со значениями $n_1 = 2, 7$ и 30 соответственно. Это обстоятельство накладывает ограничение на значение градиента в зоне возмущения и заставляет использовать минимальное разделение орбит, необходимое для заброса частиц в магнитный канал. Так как определяющее влияние на величину огибающей аксиальных колебаний имеет первая гармоника, то в общем случае для синхротрона наиболее оптимальной будет такая система неоднородностей, которая обеспечивает максимальное значение второй и минимальное значение первой гармоники градиента магнитного поля.

Переход в формулах (25) к случаю, когда воздействие неоднородности описывается матрицей вида (23), требует соблюдения условий $Q_1 \alpha \ll 1$ и $Q_0 \alpha \ll 1$. В этом случае

$$\cos 2\pi Q = \cos 2\pi Q_0 - \frac{T_1}{2} \frac{\sin 2\pi Q_0}{Q_0}, \quad (28)$$

$$\Phi^2(\theta) \sin 2\pi Q = \frac{\sin 2\pi Q_0}{Q_0} - \frac{T_1}{2Q_0^2} [\cos 2Q_0(\pi - \theta + \theta_1) - \cos 2\pi Q_0],$$

где

$$T_1 = (Q_1^2 - Q_0^2) a = \Delta n_1 a.$$

Точки, нанесенные на графиках рисунков 4 и 5, соответствуют значениям частот и огибающих колебаний, рассчитанным по формулам (28). Эти результаты, а также аналогичные расчеты для других значений параметров Q_0 и a показывают, что приближение "тонких" линз и формулы (24) можно использовать во всех практически важных случаях при условии, что изменение функции Φ_0 на азимутальной протяженности неоднородности является незначительным.

Сравнение формул (28) и (24) показывает, что особенностью влияния неоднородности на движение частиц в периодических магнитных полях является то, что эффективность ее воздействия существенно зависит от азимутального положения.

Если ввести величину эффективной напряженности градиентного возмущения, зависящую от азимута с периодичностью $\frac{2\pi}{N}$

$$T_1^* = T_1 \Phi_0^{*2}(\theta_1), \quad \Phi_0^* = \sqrt{Q_0} \Phi_0,$$

то формулы (24) и (28), определяющие изменение частот колебаний для магнитного поля с пространственной вариацией и аксиально-симметричного магнитного поля, совпадают, а отношение огибающих равно $\Phi_0^*(\theta)$. Таким образом, в ускорителях с пространственной вариацией при расположении возмущения на азимутах $\theta_1 = \frac{\beta}{N} + \frac{2\pi}{N} n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) эффективность его воздействия на радиальное движение усиливается на множитель $[1 + q M(\mu)]^2$ по сравнению с воздействием аналогичного возмущения в аксиально-симметричном магнитном поле. Существенно, что при таком расположении эффективность воздействия возмущения на аксиальное движение ослабляется на коэффициент $=(1 - \frac{q}{2})^2$, так как огибающая аксиальных колебаний в этих точках имеет минимальное значение. Для параметров релятивистского циклотрона значение этих коэффициентов равно 1,49 для радиального и 0,67 - для аксиального движения.

На рис. 5 показаны зависимости частот бетатронных колебаний от величины возмущения Δn_1 для $\alpha = 0,1$, $Q_{0z} = 1,7987$ и $Q_{0r} = 0,3183$, рассчитанные по формуле (24) при трех значениях $\theta_1 = \frac{\beta}{N}$, $\theta_1 = \frac{\beta}{N} - \frac{\pi}{2N}$ и $\theta_1 = \frac{\beta}{N} - \frac{\pi}{N}$. Точками отмечены точные значения частот для этих случаев, полученные путем численного решения линеаризованных уравнений движения. Видно, что формула (24) правильно описывает зависимость частот колебаний от азимутального положения неоднородности и обеспечивает достаточную для практики точность. Из этого рисунка также видно, что при использовании одной локальной неоднородности в рассматриваемом случае нельзя обеспечить условия возбуждения радиальных колебаний без потери аксиальной устойчивости. Проведенный общий анализ показывает, что при обычных значениях частот аксиальных колебаний $Q_{z0} = 0,2 \div 0,3$ и $q < 0,5$ одна локальная неоднородность может быть использована для осуществления системы вывода только при таких значениях частот радиальных колебаний на конечных радиусах, которые отличаются от резонансных значений $Q_r = 1, 3/2, 2$ на величину, не превышающую $\Delta Q_r = 0,1 \div 0,15$. При этом для увеличения значения Q_r используется неоднородность с $\Delta n_1 > 0$ (регенератор), а для уменьшения — неоднородность с $\Delta n_1 < 0$ (возбудитель).

В ускорителе типа релятивистского циклотрона требуемая система возбуждения радиальных колебаний может быть осуществлена при использовании двух градиентных неоднородностей. В этом случае частота и огибающая колебаний определяются выражениями

$$\cos 2\pi Q = \cos 2\pi Q_0 - \frac{1}{2} [T_1 \Phi_0^2(\theta_1) + T_2 \Phi_0^2(\theta_2)] \sin 2\pi Q_0 + \quad (29)$$

$$+ \frac{1}{2} T_1 T_2 \Phi_0^2(\theta_1) \Phi_0^2(\theta_2) \sin Q_0 \beta_1 \sin Q_0 (2\pi - \beta_1),$$

$$\Phi^2(\theta) \sin 2\pi Q = \Phi_0^2(\theta) \left\{ \sin 2\pi Q_0 + \frac{T_1}{2} \Phi_0^2(\theta_1) [\cos 2\pi Q_0 - \cos 2Q_0(\pi - \theta + \theta_1)] + \right.$$

$$\left. + \frac{T_2}{2} \Phi_0^2(\theta_2) [\cos 2Q_0 \pi - \cos 2Q_0(\pi - \theta + \theta_2)] - \frac{T_1 T_2}{2} \Phi_0^2(\theta_1) \Phi_0^2(\theta_2) F(\theta) \right\},$$

где

$$F(\theta) = \sin Q_0 \beta_1 \left\{ \cos 2Q_0 \left(\pi - \frac{\beta_1}{2} \right) - \cos 2Q_0 \left[\pi - \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right] \right\} \quad (30)$$

при

$$\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1 + 2\pi$$

$$F(\theta) = \text{Sin } Q_0 (2\pi - \beta_1) \{ \text{Cos } Q_0 \beta_1 - \text{Cos } 2Q_0 (\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}) \}$$

при $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, а $\beta_1 = \theta_2 - \theta_1$,

θ_1 и θ_2 — азимуты расположения неоднородностей.

При $\Phi_0^2(\theta) = \frac{1}{Q_0}$ формула (29) совпадает с известной формулой, описывающей воздействие регенеративной системы на движение частиц в аксиально-симметричном магнитном поле /14/. Так как в граничных точках азимутальных интервалов $F = 0$, то огибающая является непрерывной функцией азимута. Однако даже в случае одного градиентного возмущения амплитуды гармоник в разложении приведенной огибающей $\frac{\Phi}{\Phi_0}$ в ряд Фурье могут не убывать монотонно с увеличением номера n , так как в огибающей усиливаются амплитуды гармоник с номером $n \approx 2Q_0$.

На рис. 6 приведена зависимость $\frac{1}{2} \text{Sp } M_{2n}$ от n_1 для двух локальных неоднородностей с равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку значениями градиентов. Неоднородности расположены по азимуту непосредственно друг за другом и их азимутальная протяженность принята равной $\alpha_1 = 0,15$ рад. для $n_1 > 0$ и $\alpha_2 = 0,1$ рад. для $n_1 < 0$. Кривые (1), (2) на рис. 6 соответствуют значениям $\text{Cos } 2\pi Q_{r,z}$, рассчитанным для $Q_{r0} = 1,8$ и $Q_{z0} = 0,3$ без учета влияния огибающих невозмущенного движения. Как следует из предыдущего анализа, такая зависимость должна иметь место и в реальных условиях при определенных положениях неоднородностей относительно периода структуры магнитного поля. На этом же рисунке показана зависимость $\text{Cos } 2\pi Q_r$ от n_1 (кривая 3) для одного из азимутальных положений, соответствующего значениям азимута $0,2454 \leq \phi \leq 0,3954$ и $0,3954 \leq \phi \leq 0,4954$ для первой и второй неоднородности соответственно. Эта кривая рассчитана по формуле (29) для $Q_{r0} = 1,7987$ при использовании среднего значения огибающей на азимутальной протяженности возмущений. При использовании среднего значения огибающих формулами (24), (29) можно пользоваться и в случае, когда огибающая колебаний меняется существенно на азимутальной протяженности возмущения. Действительно, разбивая азимутальную протяженность неоднородности на достаточно малые интервалы и производя последовательное перемножение соответствующе-

ших им матриц, можно получить тождественные с выражениями (24), (28) формулы, в которых используются значения

$$\overline{\Phi_{01}^2} = \frac{1}{a_1} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + a_{12}} \Phi_0^2(\theta) d\theta \quad \text{и} \quad \overline{\Phi_{02}^2} = \frac{1}{a_2} \int_{\theta_2}^{\theta_2 + a_2} \Phi_0^2(\theta) d\theta$$

вместо $\Phi_0^2(\theta_1)$ и $\Phi_0^2(\theta_2)$ соответственно.

Нанесенные на рис. 6 точки соответствуют точным значениям $\cos 2\pi Q_1$, рассчитанным на ЭВМ путем численного интегрирования линеаризованных уравнений движения. Некоторое отклонение точек от кривой (3) при больших значениях n_1 означает, что приближение "тонких" линз становится в этой области параметров слишком грубым приближением.

Из сравнения кривых рисунков (6) и (7) следует, что использование двух неоднородностей позволяет существенно расширить область значений n_1 , в которой аксиальное движение остается устойчивым. В частности, описанная система двух неоднородностей может быть использована в качестве одной из возможных систем, для осуществления вывода пучка из ускорителя типа релятивистского циклотрона. Если $Q_0 > 0,5$, то, как следует из анализа выражения (32), параметры неоднородностей можно выбрать таким образом, что частота данного вида колебаний остается неизменной. Так, например, при $q \rightarrow 0$ такими параметрами являются $T_1 = -T_2$ и $\beta_1 = \frac{\pi}{Q_0}$. Это может представлять интерес для циклотронов с жесткой фокусировкой ($Q_{0z} > 1$), где с помощью неоднородностей можно изменить частоту радиальных колебаний, не меняя значение Q_{z0} .

Рассмотрим особенности воздействия на движение частиц различных гармонических составляющих возмущений, вносимых локальными неоднородностями. При разложении магнитного поля неоднородности в ряд Фурье, уравнения бета-тройных колебаний имеют вид обобщенного уравнения Хилла с периодом коэффициентов 2π , причем максимальное значение имеет коэффициент, соответствующий периодичности структуры основного магнитного поля. Определение характеристических показателей для таких уравнений может быть произведено путем использования преобразования (20). В этом случае уравнения приводятся к виду

$$\frac{d^2 \eta}{d r^2} + Q_0^2 [1 + \Omega_1(r) \Phi_0^4(r)] \eta = 0, \quad (31)$$

где $\Omega_1(r) = \Delta n_1 \alpha f[\theta(r)]$ и функция

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m \frac{\alpha}{2}}{m \frac{\alpha}{2}} \cos m(\theta - \theta_1)$$

характеризует азимутальное распределение поля неоднородности. При гармоническом подходе приближению "тонких" линз соответствует замена действительного азимутального распределения δ -функцией

$$\delta(\theta - \theta_1) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(\theta - \theta_1).$$

Для этого случая уравнение (31) приводится к виду

$$\frac{d^2 \eta}{d r^2} + \left\{ (Q_0^2 + \frac{T^*}{2\pi}) + \frac{T^*}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m(r - r_1) \right\} \eta = 0!, \quad (32)$$

где $T^* = \Delta n_1 \alpha \Phi_0^2(\theta_1)$ — эффективная напряженность градиентного возмущения.

Аналогичные преобразования уравнений легко выполнять и при наличии нескольких локальных неоднородностей. Так как линейное преобразование (20) не изменяет характеристических показателей, то частота колебаний определяется непосредственным выражением

$$\cos 2\pi Q = \cos 2\pi \gamma - T^* \frac{\sin 2\pi \gamma}{2\pi \gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 - 4\gamma^2}, \quad (33)$$

$$\gamma^2 = Q_0^2 + \frac{T^*}{2\pi},$$

в котором отдельные слагаемые характеризуют влияние соответствующих гармоник, а наличие T^* в γ^2 обусловлено изменением среднего значения показателя n на орбите.

Формула (33) является приближенной формулой, так как определяет частоту колебаний для уравнения (32) с точностью до членов, пропорциональных T^{*3} . Используя формулу суммирования

$$\frac{4\gamma}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 - 4\gamma^2} = \frac{1}{2\pi \gamma} - \operatorname{Ctg} 2\pi \gamma,$$

можно показать, что с точностью до членов $\sim T^{*3}$ она совпадает с точным выражением (24), определенным на основе матричного метода.

Как следует из анализа формулы (33), определяющее влияние на изменение частоты колебаний Q_0 имеют гармоники, номер которых m наиболее близок к значению $2Q_0$. При этом гармоники с номером $m > 2Q_0$ вызывают увеличение, а гармоники с $m < 2Q_0$ — уменьшение частоты колебаний. Поэтому при $Q_0 > 0,5$, изменяя азимутальное положение двух неоднородностей, можно найти такое соотношение между амплитудами гармоник, что эффект воздействия фокусирующих и дефокусирующих гармоник полностью скомпенсируется.

Если система неоднородностей не изменяет среднего значения на орбите, то $\gamma = Q_0$. В этом случае при значениях Q_0 , достаточно близких к резонансному целому или полуполому значению, из широкого спектра гармоник на величину шпура матрицы оборота влияет только резонансная гармоника.

В общем случае оптимальными параметрами системы являются, очевидно, такие параметры, которые обеспечивают минимальное значение резонансных гармоник для аксиального движения при максимальных значениях гармоник, наиболее эффективно воздействующих на радиальные колебания. Если частоты радиальных и аксиальных колебаний существенно различны, то введение одной резонансной гармонки по радиальным колебаниям слабо влияет на аксиальное движение. Так, в релятивистском циклотроне ($Q_{z0} = 1,8$; $Q_{r0} = 0,3$) введение в структуру магнитного поля 4-й гармоники позволяет увеличить частоту радиальных колебаний до $Q_r = 2$, незначительно изменяя при этом частоту аксиальных колебаний /15/.

Нелинейные эффекты

Изложенная теория, основанная на исследовании решений линеаризованных уравнений движения, позволяет выявить основные закономерности воздействия градиентных неоднородностей на движение частиц и выбрать предварительные значения параметров системы, необходимой для осуществления вывода пучка. Дальнейшее уточнение параметров должно производиться на основе численного расчета траекторий движения в реальных магнитных полях с учетом изменения радиуса орбиты из-за набора энергии. Это обусловлено тем, что распределение основного магнитного поля ускорителя вблизи конечных радиусов и

особенно распределение магнитного поля локальных возмущений являются существенно линейными. Так как определение оптимальных параметров на основе численного счета требует значительного времени на ЭВМ, то основные нелинейные эффекты должны быть учтены при первоначальном выборе параметров системы.

Нелинейность уравнений движения и характеристик магнитного поля приводит в основном к зависимости частот колебаний от амплитуды и возникновению нелинейных резонансов при соотношениях частот

$$\nu Q_r \pm p Q_z = m,$$

где ν , p , m — целые числа ($\nu + p$ — порядок резонанса). В ускорителях с пространственной вариацией имеется достаточно сильная зависимость частоты

Q_z от амплитуды аксиальных колебаний, которая связана с увеличением амплитуды вариации при отходе от медианной плоскости^{/10/}. Кроме того может иметь место существенная зависимость Q_z от амплитуды радиальных колебаний, определяемая в основном нелинейными характеристиками зависимости среднего магнитного поля и фазы вариации от радиуса. Зависимость частоты радиальных колебаний от их амплитуды определяется, в основном, характеристиками среднего магнитного поля в области предельных рабочих радиусов ускорителя. В первом приближении учет этих эффектов сводится к требованию, чтобы система неоднородностей обеспечивала в рамках линейной теории режим раскачки радиальных колебаний при сохранении аксиальной устойчивости для соответствующих интервалов частот невозмущенного движения. Выполнение этого условия только за счет выводной системы не всегда представляется возможным и обычно эти исследования приводят к дополнительным требованиям на характеристики основного магнитного поля в области радиусов вывода.

Зная интервалы изменения частот Q_r и Q_z , можно оценить обычными методами^{/10/} эффективность нелинейных резонансов в переходной области. При этом необходимо иметь в виду, что действительная скорость прохождения частицами этой области неравномерна и значительно выше радиальной скорости орбиты, определяемой набором энергии. Это связано с возбуждением радиальных колебаний за счет увеличения огибающей при подходе к границе области устойчивости. Исследования, проведенные в связи с разработкой системы вывода пучка из релятивистского циклотрона, показывают, что параметры выводной системы могут

быть выбраны такими, что всю переходную область частицы проходят за 10–30 оборотов при обычных циклотронных наборах энергии. За счет быстрого прохождения эффективность нелинейных резонансов существенно ослаблена и практически опасность могут представлять только резонансы связи колебаний третьего порядка в случае, когда характер изменения Q_1 и Q_2 такой, что резонансное условие поддерживается в значительной части переходной области. Изменение величины магнитного поля в переходной области приводит также к появлению в уравнениях бетатронных колебаний дополнительных членов, связанных с возмущениями равновесной орбиты. Это вызывает некоторое усиление влияния неоднородности на радиальное и аксиальное движение при значениях $\theta_1 \approx \frac{\beta}{N}$. Проведенные оценки показывают, что для локальных неоднородностей малой азимутальной протяженности влияние этих членов незначительно и определяющим является эффект огибающих невозмущенного движения. Нелинейность градиента магнитного поля локальных неоднородностей приводит к появлению дополнительных условий на режим их воздействия на радиальные колебания с большими амплитудами. Попадание частиц в область возмущения начинается уже с энергетических радиусов, смещенных внутрь относительно радиуса предельной орбиты на величину максимальной амплитуды радиальных колебаний. Для таких частиц, очевидно, нельзя обеспечить условия прохождения возмущений на каждом обороте, так как изменение фазы бетатронных колебаний за оборот в основном еще определяется значением частоты невозмущенного движения Q_{r0} . Поэтому попадание частиц в область возмущения будет наблюдаться в основном через период прецессии невозмущенного движения. Для бетатронных колебаний относительно предельной невозмущенной равновесной орбиты условия действия неоднородности на каждом обороте сводятся к требованию, чтобы на азимуте установки неоднородности смещение от орбиты было положительным. Соблюдение этого условия в режиме раскачки амплитуд радиальных колебаний возможно только в случае $\frac{1}{2} \text{Sp } M > 1$, т.е. при целых значениях предельной резонансной частоты радиальных колебаний. Если же выводная система использует неустойчивость при полупелых значениях Q_2 , то основные ее параметры определяются из условия действия неоднородности через один оборот.

При использовании нескольких локальных неоднородностей, значительно смещенных по азимуту друг относительно друга, условия прохождения частицами

этих областей будут различны из-за изменения фазы бетатронных колебаний. Расчеты показывают, что это может существенно ограничивать интервал радиальных амплитуд, для которых осуществляется режим разделения орбит без потери аксиальной устойчивости. В этом отношении более предпочтительными являются системы, использующие неоднородности, локализованные в узком интервале азимутов.

Все эти факторы необходимо учитывать при разработке системы заброса частиц в магнитный канал. Однако более подробный анализ этих факторов выходит за рамки одной работы и требует особого рассмотрения в каждом конкретном случае.

В заключение авторы выражают благодарность В.В. Кольге и Н.Л. Заплатину за полезное обсуждение рассмотренных вопросов.

Л и т е р а т у р а

1. A.V.Crewe, K.J.Le Couteur, *Rev.Sci.Inst.*, 2b, 725, 1955.
2. В.П. Дмитриевский, В.И. Данилов и др., ПТЭ, 1, 11, (1957).
3. E.A.Finlay, *Nucl.Inst. Method* 18-19, 25, 1962.
4. H.Kim, G.H.Mackenzey, W.B.Powel, P.J.Waterton *Proc. International Conf. on Secor-focused Cyclotrons and Meson Factories, CERN*, p.73, 1963.
5. А.А. Глазов, Ю.Н. Денисов, В.П. Джелепов и др. Труды международной конференции по ускорителям, 1963 г. М. Атомиздат, 1964 г., стр. 556.
6. V.P.Dmitrievsky, V.V.Kolga et al. *Nuclear Science*, NS-13, 84, 1966.
7. R.S.Livingston, J.A.Martin. Труды международной конференции по ускорителям, 1963, стр.561.
8. L.A.Pipes, *Jour. Appl. Phys.*, 24, 1953.
9. А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев, Теория циклических ускорителей. ФМЛ, М., (1962).
10. В.В. Кольга. Диссертация, Дубна 1965 г.
11. Н.В. Мак-Лаклан. Теория и применение функций Матье. М. ИЛ, 1953.
12. В.П. Дмитриевский, Н.Л. Заплатин, В.С. Рыбалко, Л.А. Саркисян. Моделирование магнитного поля релятивистского циклотрона с пространственной вариацией на энергию протонов 700 Мэв. Препринт ОИЯИ 1432, Дубна 1963.

13. H.Kim, Nuclear Science, NS-13, 58, 1966.
14. K.J.Le Couteur, Proc. Phys. Soc., B-64, 1073, 1951.
15. В.П. Дмитриевский, В.В. Кольга, Н.И. Полумордвинова. Получение резонансных частот радиальных колебаний в релятивистских циклотронах. Препринт ОИЯИ, 1881, Дубна 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июля 1967 г.

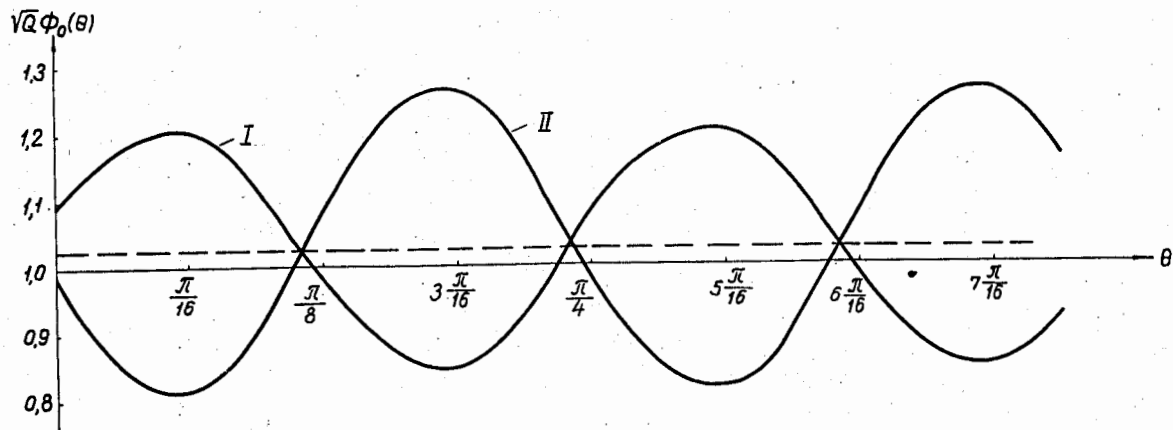
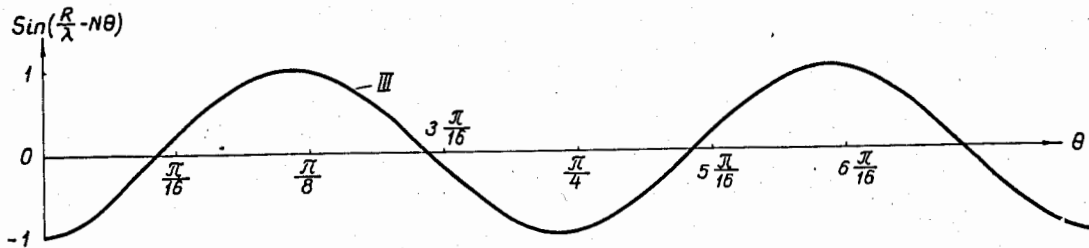


Рис. 1. Зависимость огибающих невозмущенного движения от азимута.
 I - зависимость $\sqrt{Q_{0z}} \Phi_{0z}(\theta)$. II - зависимость $\sqrt{Q_{0r}} \Phi_{0r}(\theta)$
 III - график изменения $\text{Sin}(\beta - N\theta)$, характеризующий вынужденные колебания орбиты.

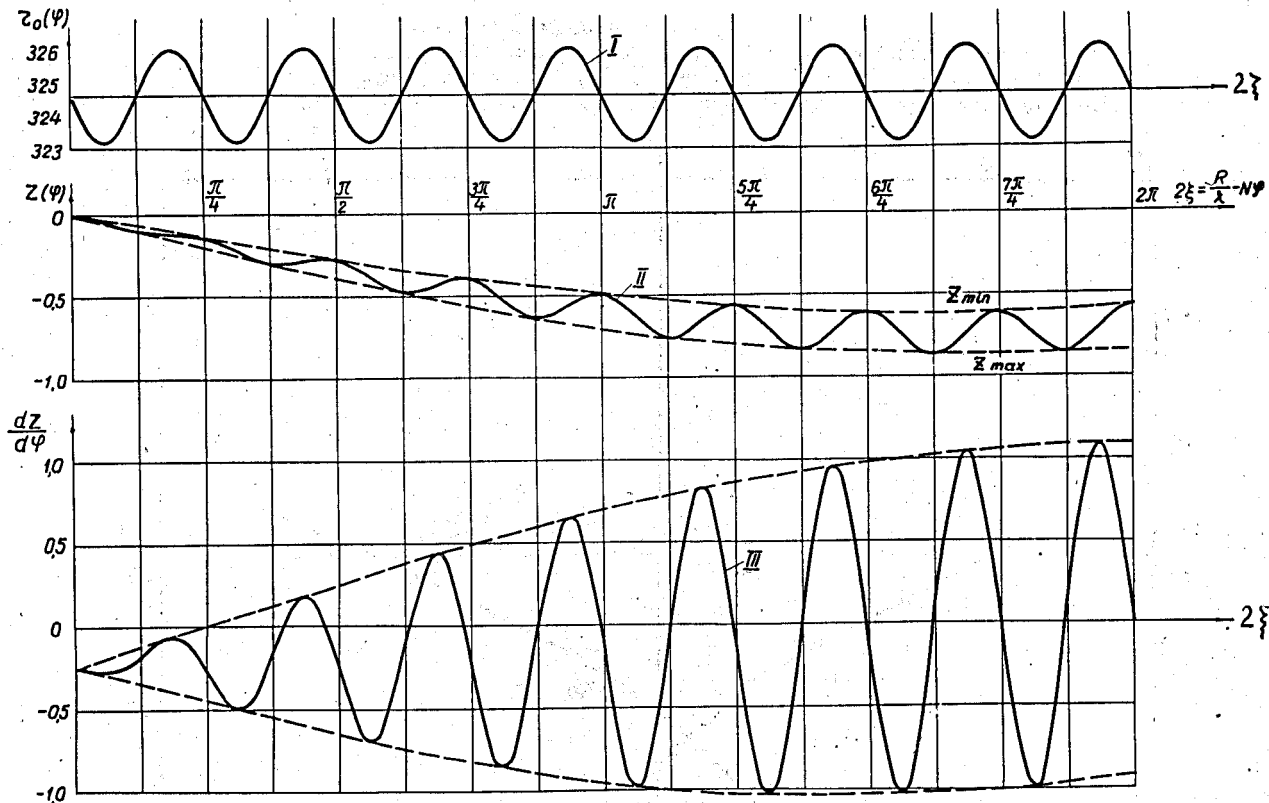


Рис. 2. Форма равновесной орбиты и аксиальных колебаний на предельных радиусах релятивистского циклотрона. I - форма равновесной орбиты $r_0(\phi)$, II, III - зависимость Z и $\frac{dZ}{d\phi}$ от азимута.

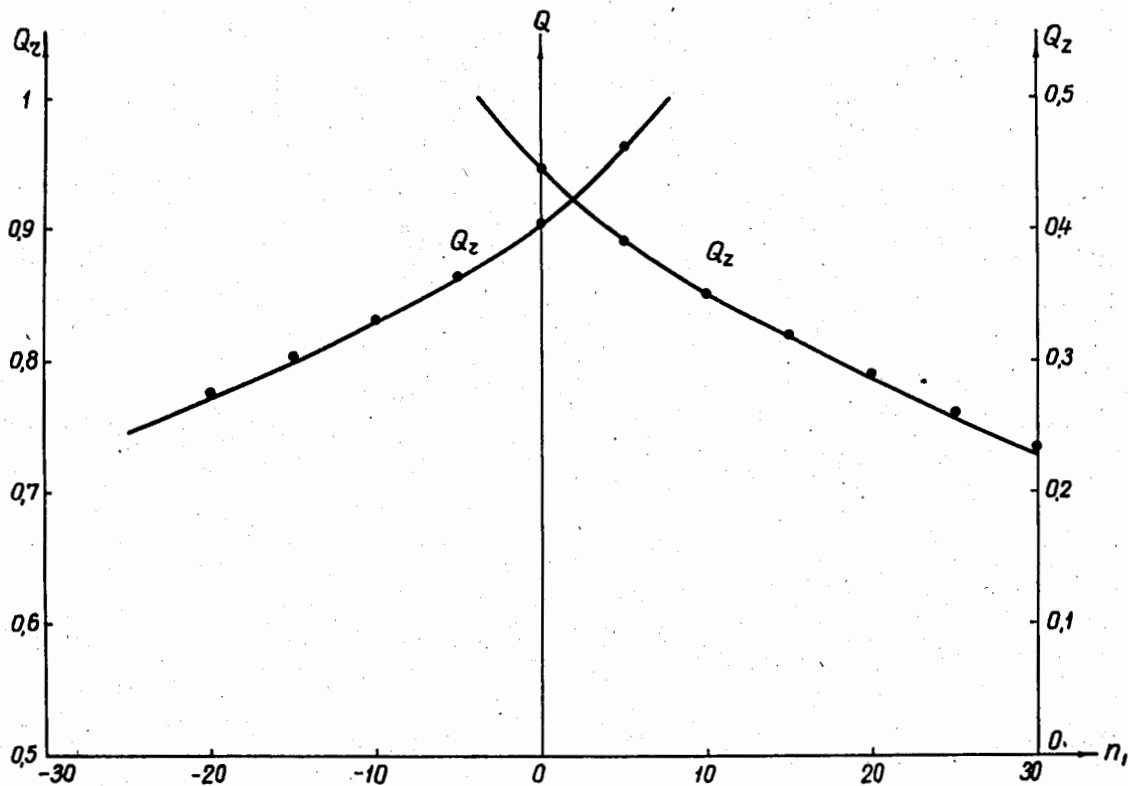


Рис. 3. Зависимость Q_z и Q от значений n_1 в области возмущения при $\alpha = 0,1$ и $Q_{z0} = 0,9$, $Q_{z0} = 0,45$ — расчет по точной формуле (25); ••• — расчет по формуле (28), использующей приближение "тонких" линз.

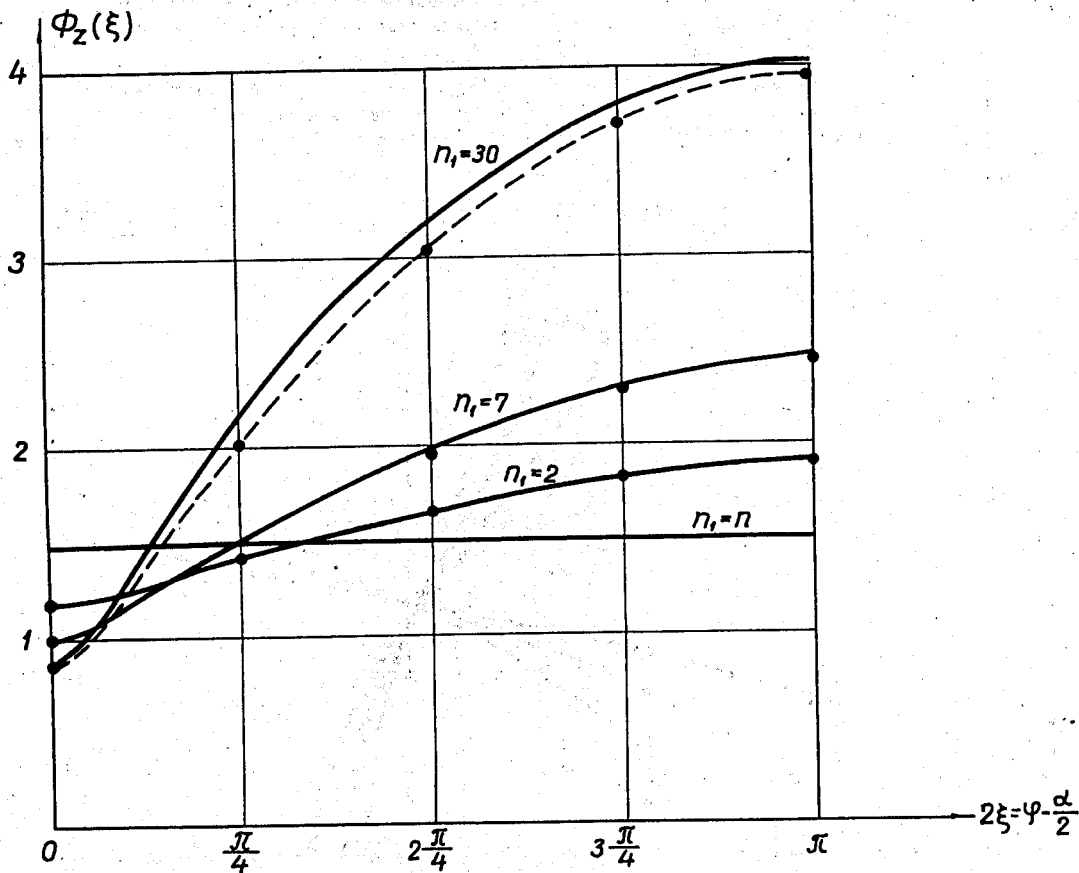


Рис. 4. Огибающая аксиальных колебаний для нескольких значений показателя η_1 в регенераторе. — расчет по точной формуле (25), ••••• расчет по приближенной формуле (28).

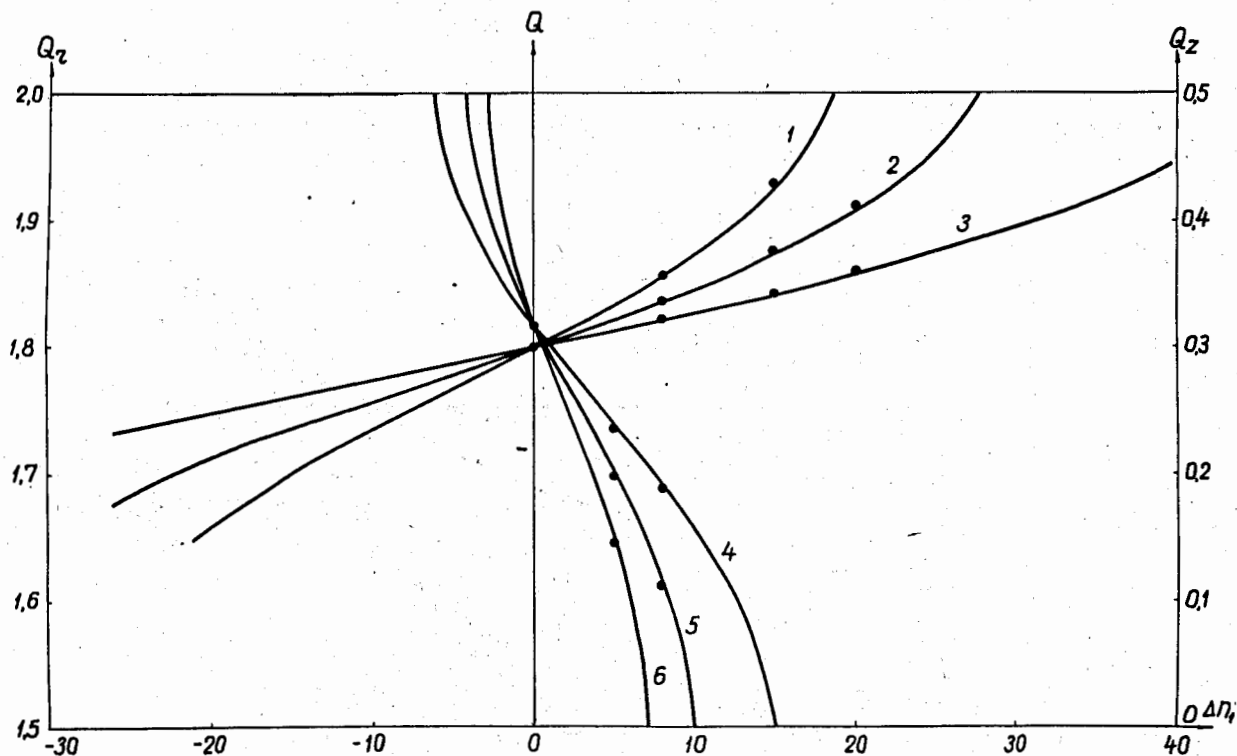


Рис. 5. Влияние локальной неоднородности на частоты бетатронных колебаний при различных положениях ее относительно периода структуры магнитного поля. 1,2,3 - зависимость Q_z от Δn_1 , рассчитанная по формуле (24) при значениях $\theta_1 = \frac{\beta}{N}$, $\theta_1 = \frac{\beta}{N} - \frac{\pi}{2N}$ и $\theta_1 = \frac{\beta}{N} - \frac{\pi}{N}$ соответственно; 4,5,6 - зависимость Q_z от Δn_1 , при тех же азимутальных положениях неоднородности; ••• - точные значения частот, полученные из численного решения линеаризованных уравнений движения.

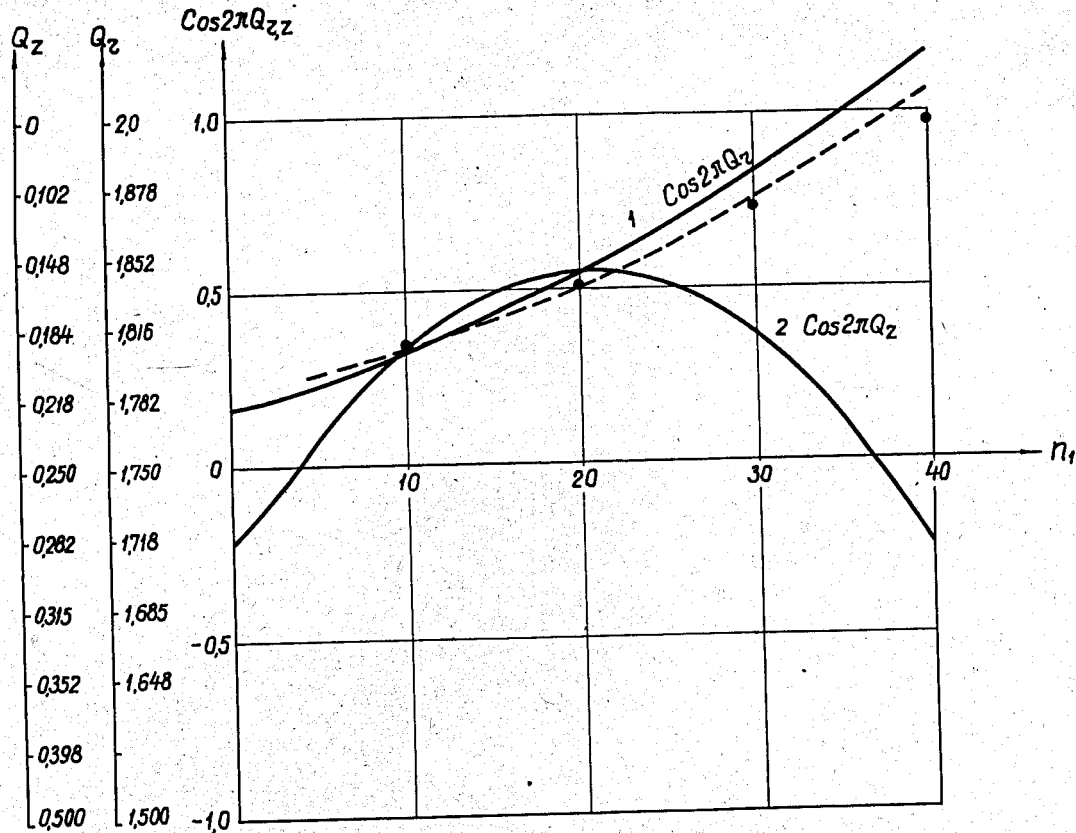


Рис. 6. Зависимость $\cos 2\pi Q_{zz}$ от значений n_1 для двух локальных неоднородностей. 1, 2 - значения $\cos 2\pi Q_{zz}$, рассчитанные без учета огibaющих для $Q_{z0}=1,8, Q_{z0}=0,3, \alpha_1=0,15, \alpha_2=0,1$. ---- - зависимость $\cos 2\pi Q_{zz}$ от n_1 , рассчитанная по формуле (29), ••• - точные значения частот.