ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 3415 - 2

А.Г. Бонч-Осмоловский, К.А. Решетникова

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯДОВ В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

1967 г.

Р9 - 3415 - 2

А.Г. Бонч-Осмоловский, К.А. Решетникова

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯДОВ В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Направлено в ЖЭТФ

1. Общие свойства излучения электронов, вращающихся по окружности в магнитном поле (синхротронного излучения), известны (см., например, /1/). В применении к ускорителям решены задачи об излучении сгустка электронов и влиянии экрана, параллельного плоскости орбиты, на характер излучения /2,3/.

В данной работе будет рассмотрено излучение электронного кольца с током, плотность которого стационарна, но модулирована по произвольному закону. Кольцо электронов вращается в магнитном поле, при этом оно может иметь любую, отличную от нуля, постоянную скорость как целое в направлении силовых линий магнитного поля (однородного в осевом направлении). В общем случае предполагается также, что кольцо летит внутри пустой круглой металлической трубы коаксиально ей.

Такого типа задачи могут встретиться в накопительных системах, плазменных установках и некоторых других случаях при модуляции плотности, вызванной азимутальной несимметрией магнитного поля, либо неустойчивостями , типа, например, отрицательной массы.

2. Решим задачу об излучении неподвижного в осевом направлении кольца, переход к движущемуся кольцу будет произведен в общем виде ниже.

Для простоты считаем кольцо бесконечно тонким, так как учет конечного малого размера кольца при заданном законе распределения плотности производится просто (по крайней мере, при малом отношении радиусов кольца). Тогда плотность заряда и тока в кольце представим в виде:

$$\rho(\phi, t) = e\delta(r-a)\delta(z)\sigma(\phi, t),$$
$$j_\phi(\phi, t) = v_\beta\,\rho(\phi, t). \qquad (1)$$

Здесь a –радиус кольца, σ – линейная плотность числа частиц в кольце.

Так как мы считаем распределение плотности стационарным, т.е. все электроны вращаются с одинаковой угловой скоростью $\omega_H = \frac{eH}{mc\gamma}$, $H = H_z$, то

$$\sigma(\phi, t) = \sigma(\phi - \omega_H t),$$

и является периодической функцией $\phi - \omega_H t$. В общем случае, при ℓ-кратной модуляции плотности период равен $\frac{2\pi}{\ell}$ и σ представляется в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \sigma(\phi - \omega_H t) &= \sum_n \sigma_n e^{in(\phi - \omega_H t)}, \quad n = m\ell, \quad m = 0, \pm 1, \dots \\ \sigma_n &= \frac{\ell}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\ell}} \sigma(\phi') e^{-in\phi'} d\phi', \quad \phi' = \phi - \omega_H t. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение уравнений для электромагнитных потенциалов Φ, A_r и A_z будем искать в виде:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{in(\phi - \omega_H t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n,k}(r) e^{ikz} dk, \tag{3}$$

для A_r и A_z – аналогично. Тогда после подстановки (3) в уравнения Даламбера (с калибровкой Лоренца) с учетом (1) и (2) получаем следующие уравнения для компонент Фурье потенциалов (значки n и k для краткости пока опускаем):

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\Phi(r) = -4\pi e \sigma_n \delta(r - a), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 A_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_r}{dr} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2+1}{r^2}\right)A_r(r) - i\frac{2}{r^2} n A_\phi(r) = 0, \\ &\frac{d^2 A_\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_\phi}{dr} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2+1}{r^2}\right)A_\phi + i\frac{2}{r^2} n A_r = \\ &\qquad = -4\pi e \beta_\phi \sigma_n \delta(r - a). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\varkappa^2 = \frac{n^2 \omega_H^2}{c^2} - k^2.$$

Займемся решением уравнения (4). Представим $\delta(r-a)$ в виде:

$$\delta(r-a) = a\int_0^\infty I_n(\kappa a) I_n(\kappa r)\kappa\, d\kappa .^{x)} \tag{6}$$

и деля на оператор левой части (4), получаем частное решение

$$\Phi_H = -4\pi e \sigma_n a \int_0^\infty \frac{I_n(\kappa a) I_n(\kappa r)}{\Gamma^2 - \kappa^2}\kappa\, d\kappa . \tag{7}$$

Так как на самом деле затухание при пролете пространства внутри трубы отлично от нуля, Γ^2 имеет малую мнимую часть, и интеграл (7) вычисляется /4/:

$$\Phi_H = 2\pi^2 e \sigma_n a i \begin{cases} I_n(\Gamma r) H_n^{(1)}(\Gamma a), & r < a \\ I_n(\Gamma a) H_n^{(1)}(\Gamma r), & r > a . \end{cases} \tag{8}$$

Общее решение (4), конечное при $r = 0$, равно

$$\Phi = C I_n(\Gamma r) + \Phi_H . \tag{9}$$

Для определения постоянной C накладываем граничное условие на поверхности совершенного проводника – трубы радиуса b :

$$E_z \big|_{r=b} = 0. \tag{10}$$

Тогда окончательно Фурье-компонента скалярного потенциала будет иметь вид:

$$\Phi_{n,k}(r) = 2\pi^2 e \sigma_n a [\, \sigma(a-r) I_n(\Gamma r) H_H^{(1)}(\Gamma a) + \sigma(r-a) \times$$

$$\times I_n(\Gamma a) H_n^{(1)}(\Gamma r) - \frac{I_n(\Gamma r)\, I_n(\Gamma a) H_n^{(1)}(\Gamma b)}{I_n(\Gamma b)}] . \tag{11}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 . \end{cases}$$

Перейдем к решению системы (5) для A_r и A_z . Введем две вспомогательные функции A и $\bar{A}$, равные

$$A = A_\phi + i A_r ,$$

$$\bar{A} = A_\phi - i A_r .$$

Тогда получим для A и $\bar{A}$ "развязанные" уравнения:

---

x) Здесь и далее под $I_{n(x)}$ следует понимать обычную, немодифицированную функцию Бесселя.

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} + \left[r^2 - \frac{(n-1)^2}{r^2} \right] A = -4\pi e \sigma_n \beta_\phi \delta(r-a)$$

$$\frac{d^2 \bar{A}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} + \left[r^2 - \frac{(n+1)^2}{r^2} \right] \bar{A} = -4\pi e \sigma_n \beta_\phi \delta(r-a). \tag{12}$$

Представляя $\delta(r-a)$ в виде интеграла типа (6), но с индексами функций Бесселя, равными $n-1$ для A и $n+1$ для $\bar{A}$, получим решения вида (9) с произвольными постоянными C_1 и C_2. Для Фурье компонент A_r и A_ϕ решения следующие:

$$A_\phi = \frac{1}{2} C_1 I_{n-1}(rr) + \frac{1}{2} C_2 I_{n+1}(rr) + \pi^2 e a \sigma_n \beta_\phi i \{ \sigma(a-r) \times$$

$$\times [I_{n-1}(rr) H^{(1)}_{n-1}(ra) + I_{n+1}(rr) H^{(1)}_{n+1}(ra)] + \sigma(r-a) \times [I_{n-1}(ra) H^{(1)}_{n-1}(rr) + \tag{13}$$

$$+ I_{n+1}(ra) H^{(1)}_{n+1}(rr)] \}.$$

$$A_r = \frac{1}{2i} C I_{n-1}(rr) - \frac{1}{2i} C_2 I_{n+1}(rr) + \pi^2 e a \sigma_n \beta_\phi \{ \sigma(a-r) [I_{n-1}(rr) H^{(1)}_{n-1}(ra) \tag{14}$$

$$- I_{n+1}(rr) H^{(1)}_{n+1}(ra)] + \sigma(r-a) [I_{n-1}(ra) H^{(1)}_{n-1}(rr) - I_{n+1}(ra) H^{(1)}_{n+1}(rr)] \}.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 необходимо использовать еще 2 граничных условия на поверхности совершенного проводника:

$$H_r /_{r=b} = 0,$$

$$\frac{dH_z}{dr} /_{r=b} = 0$$

или для компонент Фурье векторного потенциала

$$A_\phi /_{r=b} = 0,$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial r} /_{r=b} = -\frac{1}{b} A_r(b). \tag{15}$$

Вычисления дают:

$$C_1 = \frac{i\pi^2 a e \sigma_n \beta_\phi}{I'_n(\gamma b)} \{ I_{n-1}(\gamma a)[\frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{I_n(\gamma b)} I_{n+1}(\gamma b) - H_{n-1}^{(1)}(\gamma b)] +$$

$$+ I_{n+1}(\gamma a)[\frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{I_n(\gamma b)} I_{n+1}(\gamma b) - H_{n+1}^{(1)}(\gamma b)] \} . \tag{16}$$

$$C_2 = - \frac{i\pi^2 a e \sigma_n \beta_\phi}{I'(\gamma b)} \{ I_{n-1}(\gamma a)[\frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{I_n(\gamma b)} I_{n-1}(\gamma b) - H_{n-1}^{(1)}(\gamma b)] +$$

$$+ I_{n+1}(\gamma a)[\frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{I_n(\gamma b)} I_{n-1}(\gamma b) - H_{n+1}^{(1)}(\gamma b)] \} . \tag{17}$$

Имея теперь выражения для электромагнитных потенциалов, можно вычислить напряженность электрического поля E_ϕ и, следовательно, среднюю за период интенсивность излучения по формуле:

$$- \frac{\overline{dW}}{dt} = 2 \,\mathrm{Re} \sum_{n>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} j^*_{\phi_n} E_{\phi_n} r\, dr\, d\phi'\, dz . \tag{18}$$

Учитывая (1), будем иметь для интенсивности излучений на n -ой гармонике:

$$- \frac{dW_n}{dt} = 2c\beta_\phi a e \,\mathrm{Re}\, \sigma^*_n \int_{-\infty}^{+\infty} E^\phi_{n,k}(r=a)\, dk . \tag{19}$$

Имеем

$$E^\phi_{n,k}(a) = in [\frac{\omega_H}{c} A^\phi_{n,k}(a) - \frac{\Phi_{n,k}(a)}{a}] = \frac{in}{a} [\beta_\phi A^\phi_{n,k}(a) - \Phi_{n,k}(a)]. \tag{20}$$

Выражение (13) с постоянными (16) и (17) при $r = a$ можно упростить, используя соотношения:

$$2 I'_n(x) = I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x),$$

$$I_n N'_n - N_n I'_n = \frac{2}{\pi x} . \tag{21}$$

Тогда

$$A^{\phi}_{n,k}(r=a) = -\pi^2 a e \sigma_n \beta_\phi \{ I_{n-1}(ra) N_{n-1}(ra) - I_{n+1}(ra) N_{n+1}(ra) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\frac{4}{\pi r b} I_{n+1}(ra) I_{n-1}(ra) - I^2_{n-1}(ra) [I_n(rb) N_{n-1}(rb) - N_n(rb) I_{n+1}(rb)] -}{I_n(rb) I'_n(rb)} \tag{22}$$

$$\frac{-I^2_{n+1}(ra) [I_{n-1}(rb) N_n(rb) - I_n(rb) N_{n+1}(rb)]}{} \} .$$

При подстановке (20) в (19) с A_ϕ и Φ, даваемыми выражениями (11) (при $r = a$) и (22), оставим члены, которые могут дать вклад в вещественную часть потерь; при этом нетрудно убедиться, что интегрирование следует проводить по области вещественных значений r, т.е. по k от нуля до $\pm \frac{n \omega_H}{c}$. Тогда получим:

$$-\frac{d \bar{W}_n}{dt} = -4 \pi^2 c \beta_\phi a e^2 | \sigma_n |^2 n \operatorname{Re} i \int_0^{\frac{n\omega_H}{c}} \{ 2 I^2_n(ra) \frac{N_n(rb)}{I_n(rb)} +$$

$$\frac{\beta^2 \phi}{2} \frac{\frac{4}{\pi r b} I_{n+1}(ra) I_{n-1}(ra) - I^2_{n-1}(ra) [I_n(rb) N_{n-1}(rb) - N_n(rb) I_{n+1}(rb)] -}{I_n(rb) I'_n(rb)} \tag{23}$$

$$\frac{-I^2_{n+1}(ra) [I_{n-1}(rb) N_n(rb) - I_n(rb) N_{n+1}(rb)]}{} \} dk .$$

Вклад в мнимую часть интеграла в (23) дают полюса подынтегрального выражения, соответствующие уравнениям:

$$I_n(rb) = 0, \quad rb = s_{np}, \quad p = 1, 2, 3, \dots . \tag{24}$$

и

$$I'_n(rb) = 0, \quad rb = s'_{np}, \quad p = 1, 2, 3, \dots . \tag{25}$$

При отличном от нуля затухании полюса лежат выше действительной оси, поэтому интеграл (23) сводится к главному значению, вклад от которого равен нулю, и полувычетам в полюсах, умноженных на $+\pi i$ (обход особых точек производится снизу при интегрировании по вещественной оси k и использовании действительного r).

После вычисления вычетов и несложных, но длинных преобразований и упрощений, окончательный результат будет иметь вид:

$$\frac{d\overline{W}_n}{dt} = 8\pi^3 a c \beta_\phi e^2 |\sigma_n|^2 n \{ \sum_{k_{np}} \frac{s_{np}}{b^2 k_{np}} \frac{I_n^2(s_{np}\frac{a}{b}) N_n(s_{np})}{I'_n(s_{np})} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{n^2 b^2 \beta_\phi^2}{a^2 s_{np}^2}\right) - \beta_\phi^2 \sum_{k'_{np}} \frac{s'_{np}}{b^2 k'_{np}} \frac{I'^2_n(s'_{np}\frac{a}{b}) N'_n(s'_{np})}{I''_n(s'_{np})} \}. \tag{27}$$

В формуле (27) суммирование в первом члене идет по всем p при вещественном k_{np}, удовлетворяющих уравнению:

$$k_{np} = \sqrt{\frac{n^2\omega_H^2}{c^2} - \frac{s_{np}^2}{b^2}}, \tag{28}$$

а во втором по всем p при вещественных k'_{np}, находимых из уравнения:

$$k'_{np} = \sqrt{\frac{n^2\omega_H^2}{c^2} - \frac{s'^2_{np}}{b^2}}. \tag{29}$$

Уравнение (24) есть не что иное, как дисперсионное уравнение E – волн, а (25) – дисперсионное уравнение H – волн в круглом волноводе. Таким образом, неоднородное вращающееся кольцо возбуждает и те и другие типы волн с интенсивностью на n -ой гармонике, определяемой формулой (27).

3. Результат (27) получен для неподвижного кольца в трубе. Сохранится ли он, если кольцо как целое движется с произвольной, но постоянной скоростью вдоль оси трубы? Если условие черенковского излучения в трубе ($\epsilon = \mu = 1$) не выполнено, то все излучение связано с криволинейным движением электронов в магнитном поле. Известно, что интенсивность излучения Лоренц-инвариантна, поэтому в системе координат, в которой кольцо как целое покоится (сопутствующей системе координат), излучение будет таким же, как и в лабораторной системе.

В сопутствующей системе будем иметь следующую задачу: в магнитном поле H (в том же самом, что и в лабораторной системе) вращается кольцо с ϕ -ой скоростью $c\beta_\phi$ (равной $c\beta^\phi_{\text{лаб}} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_z^2}}$). На него параллельно самой себе налетает металлическая труба. Нетрудно установить с помощью формул Лоренц-преобразования полей и общих граничных условий в движущихся средах /5/, что граничные условия на поверхности движущегося параллельно самому себе ($v_n = 0$) совершенного проводника остаются теми же, что и для неподвижного проводника.

Таким образом, задача целиком сводится к уже решенной, и формула (27) описывает излучение и движущегося кольца. При этом под β_ϕ надо подразумевать ϕ-ую скорость в сопутствующей системе координат.

4. Прежде чем исследовать полученное решение, совершим предельный переход к излучению кольца в свободном пространстве, т.е. устремим "b" к бесконечности.

Вклад в сумму вносят большие корни функций Бесселя, порядка $\frac{n\omega_H}{c} b$ и разность между соседними значениями k_{np} становится очень малой.

$$\Delta k_{np} = k_{n,p+1} - k_{n,p} = - \frac{s_{np}\,\Delta s_{np}}{k_{np} b^2} = - \frac{\pi s_{np}}{k_{np} b^2}, \tag{30}$$

$$\Delta k'_{np} = - \frac{\pi s'_{np}}{k_{np} b^2}.$$

Подставляя (30) в (27), заменяя функции Бесселя от аргумента s_{np} асимптотическими выражениями и переходя от суммирования к интегрированию, получим:

$$\frac{d\bar{W}_n}{dt} = 8\pi^2 a c \beta_\phi e^2 |\sigma_n|^2 n \Big\{ - \int_0^{\frac{n\omega_H}{c}} I_n^2(ra)\Big(1 - \frac{n^2\beta_\phi^2}{r^2 a^2}\Big) dk + \tag{31}$$

$$+ \beta_\phi^2 \int_0^{\frac{n\omega_H}{c}} I'^2_n(ra)\, dk \Big\}.$$

В обоих интегралах сделаем замену переменных:

$$ra = \beta_\phi n \sin\theta, \quad dk = - \frac{n\beta_\phi}{a} \sin\theta\, d\theta,$$

тогда

$$\frac{d\bar{W}_n}{dt} = 4\pi^2 e^2 |\sigma_n|^2 c\beta_\phi^2 n^2 \int_0^\pi [\,\mathrm{ctg}^2\theta\, I_n^2(n\beta_\phi \sin\theta) + \beta_\phi^2 I_n'^2(n\beta_\phi \sin\theta)]\sin\theta\, d\theta. \qquad (32)$$

С учетом того, что для точечного заряда $\left(\ell = 1,\ \sigma(\phi') = \frac{\delta(\phi')}{a}\right)$ формула (2) дает

$$|\sigma_n|^2 = \frac{1}{4\pi^2 a^2}, \qquad (33)$$

полученный результат предельного перехода (32) совпадает с известной формулой Шотта /1/ для интенсивности излучения на n -ой гармонике.

Проведем дальнейшее преобразование к более удобному виду формулы (27). В первом члене, так как $I_n(s_{np}) = 0$, заменим $N_n(s_{np}) = -\frac{2}{\pi s_{np} I_n'(s_{np})}$; во втором члене, при $I_n'(s'_{np}) = 0$, можно получить:

$$I_n''(s'_{np}) = \left(\frac{n^2}{s'^2_{np}} - 1\right) I_n(s'_{np}).$$

Учтем также, что

$$k_{np}^2 = \frac{n^2\omega_H^2}{c^2} - \frac{s_{np}^2}{b^2} = \frac{s_{np}^2}{b^2}\left(\frac{n^2\beta_\phi^2 b^2}{s_{np}^2 a^2} - 1\right). \qquad (34)$$

Тогда вместо (27) будем иметь:

$$\frac{d\bar{W}_n}{dt} = 16\pi^2 a c\beta_\phi e^2 |\sigma_n|^2 n \Bigg[\sum_{k_{np}} \frac{k_{np}}{s_{np}^2} \frac{I_n^2(s_{np}\frac{a}{b})}{I_n'^2(s_{np})} + \frac{\beta_\phi^2}{b^2}\sum_{k'_{np}} \frac{1}{k'_{np}\left(1 - \frac{n^2}{s'^2_{np}}\right)} \frac{I_n'^2(s'_{np}\frac{a}{b})}{I_n^2(s'_{np})}\Bigg]. \qquad (35)$$

Условия распространения E и H – волн в трубе (условие вещественности k_{np} и k'_{np}) можно записать так:

$$\beta_\phi > \frac{s_{np}}{n}\frac{a}{b} \qquad \text{или} \qquad \frac{s'_{np}}{n}\frac{a}{b}. \qquad (36)$$

Корни функций Бесселя удовлетворяют условиям [4]:

$$s_{np} > s'_{np} > n \qquad \frac{s_{np}}{n} \to \frac{s'_{np}}{n} \to 1 \qquad \text{при} \quad n \to \infty . \tag{37}$$

Таким образом, когда заряды вращаются достаточно близко к поверхности круглой трубы , могут возбуждаться только высокие гармоники, причем всегда раньше излучаются Н-волны. Например, при $\frac{a^2}{b^2} = 0,7$ ($\beta_\phi \approx 1$) Н-волны возбуждаются начиная с $n = 12$, а Е-волны,-примерно, с $n = 40$. Если же $\frac{a}{b}$ достаточно близко к единице и

$$\beta_\phi < \frac{a}{b} , \tag{38}$$

то излучения вообще нет на любых гармониках. Этот вывод существенно отличается от результатов расчета излучения заряда, вращающегося вблизи металлической поверхности [3].

Отсутствие излучения на близких расстояниях от изогнутой металлической поверхности можно понять, если обратиться к аналогии с излучением Черенкова.

Фазовый множитель n -ой гармоники имеет вид

$$e^{-i(\omega t - n\phi - kz)},$$

отсюда можно написать для фазовой скорости волны по азимуту ϕ .

$$v_\phi = \frac{\omega r}{n} . \tag{39}$$

Используя связь между ω и k согласно дисперсионному уравнению, например, (24):

$$\omega^2 = c^2 \left(k^2 + \frac{s^2_{np}}{b^2} \right) , \tag{40}$$

можно получить условие, при котором фазовая скорость (39) на данном радиусе r будет меньше c :

$$\frac{r^2}{n^2} \left(k^2 + \frac{s^2_{np}}{b^2} \right) < 1 . \tag{41}$$

В силу (37) условие (41) выполняется для r, не слишком близком к b и, следовательно, возбуждение волн при данной скорости v_ϕ электронов возможно лишь на конечном расстоянии от поверхности волновода.

Если возбуждение волны с частотой $n\omega_H$ возможно при данных параметрах волновода, то, как нетрудно проверить, фазовая скорость волны (39) будет совпадать с азимутальной скоростью электронов и синхротронное излучение можно трактовать как излучение Черенкова на ϕ-ых волнах. Такого рода трактовка встречается в ряде работ последнего времени (см., например, /6,7/). Собственно говоря, и излучение при движении по кругу в свободном пространстве можно отождествлять с излучением Черенкова (частоты $n\omega_H$ там всегда возможны и условие синхронизма выполняется при любых скоростях v_ϕ).

Однако, по нашему мнению, специфическое излучение, связанное с ускорением зарядов, в данном случае синхротронное, имеет много отличий от собственно черенковского излучения, не связанного с ускорением, и поэтому является самостоятельным физическим явлением, хотя соображения аналогии и могут оказаться полезными, как показано выше.

Сделаем еще одно замечание к формуле (35). При ее выводе неявно предполагалось, что ни один из корней функций Бесселя не совпадает с началом координат оси k. Если это имеет место, то можно показать, что $k=0$ является полюсом 2-го порядка подынтегрального выражения (23) и вычет в нем равен нулю. Излучение соответствующей моды в критической точке ($k_{np}=0$ или $k'_{np}=0$) отсутствует. При малых k'_{np} второй член в (35) дает сколь угодно большую интенсивность излучения моды вблизи критической точки, что связано с предположением об отсутствии затухания в среде и стенках волновода. Указанная особенность приводит к нерегулярному характеру начального участка спектра излучения: гармоники с номером n, высшие моды которых близки к критической точке ($k'_{np}=0$), возбуждаются весьма сильно, и при изменении характерных параметров β_ϕ, a и b эти флюктуации перемещаются по спектру.

Учет малого, но конечного затухания приведет к некоторому сглаживанию спектра, но это требует особого рассмотрения. При увеличении радиуса волновода "b" за счет большего числа генерируемых мод выбросы в спектре также сглаживаются и характер спектра приближается к распределению Шотта (32) в свободном пространстве.

5. В предыдущие формулы для излучения неоднородного по ϕ кольца вошел фактор $|\sigma_n|^2$, определяемый формулой (2). Величину $4\pi^2 a^2 |\sigma_n^2|$ можно назвать фактором когерентности синхротронного излучения кольца на n-ой гармонике; обозначим его через $s_{n,N}$:

$$s_{n,N} = 4\pi^2 a^2 |\sigma_n|^2, \quad n = k\ell, \; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{42}$$

Как уже отмечалось, для точечного заряда $s_{n,N} = N^2$, что соответствует полной когерентности излучения. Аналогичная (42) величина вводилась при рассмотрении излучения отдельных сгустков $(\ell = 1)$ заряженных частиц в ускорителях/2/.

Представляет интерес оценить зависимость фактора когерентности от номера гармоники n для некоторых моделей распределения плотности в кольце по азимуту. Обозначим постоянную составляющую линейной плотности через σ_0 и глубину модуляции через α_0 :

$$\alpha = \frac{|\sigma - \sigma_0|_{max}}{\sigma_0}, \tag{43}$$

$\alpha = \alpha_0$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(\phi')\, d\phi' = \frac{N}{2\pi a}$$

N – полное число частиц в кольце.

Ступенчатая модель:

$$\sigma(\phi') = \sigma_0 + \alpha\sigma_0 \times \begin{cases} 1 & 0 \le \phi' \le \pi/\ell \\ -1 & \frac{\pi}{\ell} \le \phi' \le \frac{2\pi}{\ell} \end{cases} \tag{44}$$

Тогда

$$S_{k\ell, N} = \frac{4\alpha^2 N^2}{\pi^2 k^2}; \quad k = 2m - 1, \; m = 1, 2, 3, \ldots$$

Более близкой к возможным распределениям может быть следующая модель, в которой плотность меняется по степенному закону:

$$\sigma(\phi') = \sigma_0 + \frac{4a\sigma_0 \ell^2}{\pi^2} \times \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 - \phi'^2, & -\pi/2\ell < \phi' < \pi/2\ell. \\ -\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\ell} - \phi'\right)^2, & \frac{\pi}{2\ell} < \phi' < \pi/\ell. \\ -\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 + \left(\phi' + \frac{\pi}{\ell}\right)^2, & -\pi/\ell < \phi' < -\pi/2\ell. \end{cases} \tag{45}$$

Вычисления для этой модели дают:

$$S_{k\ell,N} = \frac{2^8 a^2 N^2}{\pi^6 k^6}, \quad k = 2m-1, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{46}$$

Приведенные примеры показывают, что с ростом номера гармоники фактор когерентности весьма быстро уменьшается и при модуляции, имеющей несколько периодов по кольцу, фактически интенсивно может излучаться первая гармоника с номером $n = \ell$. В этом существенное отличие излучения сгустка частиц от излучения точечного заряда. Сопоставляя этот вывод с результатами п.4, приходим к выводу, что эффективное излучение кольца в круглой трубе при данном ℓ будет иметь место, если при заданных параметрах кольца и волновода возбуждается ℓ -ая мода и, наоборот, если ℓ -мода не разрешена в волноводе $\left(\frac{a}{b} \approx 1\right)$, то излучение будет практически отсутствовать.

Литература

1. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Теория поля М. 1962.
2. L.I. Shiff Rev. Sci. Instr. 17, p. 6, 1946.
3. J. Nodvick and D. Saxon Phys. Rev. 96, p. 180, 1954.
4. Г.Н. Ватсон. "Теория бесселевых функций" ИЛ 1949, Москва, ч.1, стр.471.
5. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ФМ М, 1957.
6. К.А. Барсуков. ЖТФ, т. XXXIII, в. 5, стр. 561, 1963 г.
7. А.Н. Диденко. ЖТФ, т. XXXIII, вып. 6, стр. 731, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июня 1967 г.