ЖЭТФ 1967, т.53, N5, с.1789-1805

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 3394 - 2

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович

КУЛОНОВСКИЕ СОУДАРЕНИЯ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

1967 г.

Р9 - 3394 - 2

В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович

КУЛОНОВСКИЕ СОУДАРЕНИЯ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Направлено в ЖЭТФ

В в е д е н и е

В последнее время интенсивно разрабатывалась теория нелинейного взаимодействия волн в турбулентной плазме (см. [1,2,3]). В этих работах влияние кулоновских соударений частиц на нелинейное взаимодействие не исследовалось. Настоящая работа ставит целью восполнить этот пробел.

Следует с самого начала отметить, что кулоновские соударения в турбулентной плазме могут быть существенны, даже если в линейном приближении их влияние пренебрежимо мало. Это связано с тем обстоятельством, что в нелинейном рассеянии участвует виртуальная волна, частота которой является разностью частот двух взаимодействующих волн и может быть меньше эффективной частоты соударений $\nu_{эф}$, тогда как частота каждой из волн значительно больше $\nu_{эф}$. Для ленгмюровских колебаний такая разность особенно мала при больших фазовых скоростях,

$$\omega_- = \omega_1 - \omega_2 \approx \frac{3}{2}\omega_{0e}\left(\frac{v_{Te}}{v}\right)^2, \quad v_ф = \frac{\omega_{0e}}{k}, \quad v_{Te} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}.$$

Вместе с тем процесс нелинейного рассеяния, увеличивая $v_ф$, приводит к уменьшению ω_-. В связи с этим можно ожидать, что независимо от начального спектра колебаний, спектральная перекачка переведет их в ту область волновых чисел, где соударения существенны[x)]. При этом естественно возникает вопрос о том, могут ли соударения изменить <u>направление</u> спектральной перекачки. Как известно, в турбулентной жидкости масштаб пульсаций уменьшается, что диаметрально противоположно ситуации, имеющей место в

---

x) Однако, как показывает последующий анализ, кроме критерия $\omega_- \ll \nu_{эф}$, для ряда случаев возникает также критерий $k_- v_{Ta} < \nu_{эф}$ (т.е. $\nu_{эф} > \omega$ $(v_T/v_ф)$). Для дальнейшего существенно, что оба неравенства начинают выполняться при больших $v_ф$.

бесстолкновительной турбулентной плазме. Здесь, однако, нужно отметить, что для описанного выше нелинейного взаимодействия в плазме в область частых соударений попадает лишь виртуальная волна, в то время как в жидкости – все взаимодействующие турбулентные пульсации. Поэтому вопрос о направлении и интенсивности спектральной перекачки требует специального исследования. Проведенный авторами анализ на основе модельных интегралов соударений показывает, что интенсивность и направление перекачки может измениться, однако результат зависит от выбранной модели для stoss –члена [/5/]. В [/5/] было также отмечено, что соударения могут изменить дисперсионные свойства взаимодействующих волн при изотропной турбулентности.

В настоящей работе рассматривается задача о нелинейном взаимодействии в полностью ионизированной плазме на основе интеграла соударений в форме Ландау [/6/]. Следует отметить, что полученные результаты могут иметь также приложения к вопросу взаимодействия волн в плотной плазме, например, плазме твердого тела или плазме искры, создаваемой в фокусе лазера [/7/].

§ 1. Общие соотношения

Для слабозатухающих волн нелинейные эффекты в приближении слабой турбулентности определяются компонентами нелинейного тока

$$j_i^{(2)}(k) = \int S_{ij\ell}(k, k_1, k_2) E_{k_1 j} E_{k_2 \ell}\, \delta(k - k_1 - k_2)\, dk_1 dk_2 ,$$
$$j_i^{(3)}(k) = \int \Sigma_{ij\ell s}(k, k_1, k_2, k_3) E_{k_1 j} E_{k_2 \ell} E_{k_3 s}\, \delta(k - k_1 - k_2 - k_3)\, dk_1 dk_2 dk_3 . \qquad (1.1)$$

Будем считать, без ограничения общности, что функции $S_{ij\ell}$ и $\Sigma_{ij\ell s}$ удовлетворяют следующему условию симметрии:

$$S_{ij\ell}(k,k_1,k_2) = S_{i\ell j}(k,k_2,k_1), \quad \Sigma_{ij\ell s}(k,k_1,k_2,k_3) = \Sigma_{ijs\ell}(k,k_1,k_3,k_2). \qquad (1.2)$$

Уравнения Максвелла с учетом (1.1), а также обычного линейного тока, после усреднения по статистическому ансамблю турбулентных пульсаций приводят к нелинейному уравнению для квадратов амплитуд полей продольных волн[x)].

x) Здесь мы пренебрегаем эффектами рассеяния через виртуальную поперечную волну, так как обычно они существенны для плазмы почти релятивистских температур [/2/].

$(\langle E_i^o(k_1)E_j^o(k_2)\rangle = |E^o(k_1)|^2\delta(k_1+k_2)\dfrac{k_{1i}k_{1j}}{k_1^2}$,

здесь E^o – поля первого приближения),

$$\epsilon(k)\,|E^o(k)|^2 = |E_k^o|^2\int \alpha_{kk_1}|E_{k_1}^o|^2 +$$

$$+\int\beta_{kk_1k_2}|E_{k_1}^o|^2|E_{k_2}^o|^2\delta(k-k_1-k_2)dk_1dk_2\ ,$$

где

$$\alpha_{kk_1} = \frac{8\pi i}{\omega}\Big[\Sigma(k,k_1,k,-k_1) - \frac{4\pi i}{\omega_-\epsilon(k_-)}S(k_-,k_-,k_1)S(k,k_1,k_-)\Big]. \qquad (1.4)$$

В пренебрежении соударениями α_{kk_1} описывает эффекты индуцированных распадов и индуцированного рассеяния, а $\beta_{kk_1k_2}$ – эффекты спонтанных распадов. При учете соударений, строго говоря, такое деление не правомочно. Наиболее простую форму уравнение (1.3) приобретает в том случае, когда распады запрещены законами сохранения, например, для ленгмюровских волн. При этом уравнение (1.3) имеет вид нелинейного дисперсионного уравнения. Поправки к частоте ленгмюровских волн малы в силу слабой нелинейности, поэтому

$$\epsilon(\vec{k},\omega) = \epsilon(\vec{k},\omega_k+\omega') \approx \omega'\frac{\partial\epsilon}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega_k}\ ,\ \Big|\frac{\omega'}{\omega_k}\Big| \ll 1\ .$$

Действительная и мнимая части ω' определяют соответственно дисперсионные свойства и интенсивность спектральной перекачки взаимодействующих волн. Отметим здесь, что при достаточно больших $v_\phi \gg v_{Te}\sqrt{\frac{M_i}{m_e}}$ дисперсия волн определяется первым членов в уравнении (1.4), вклад второго члена мал ввиду больших значений ϵ. Что касается мнимой части ω', то наиболее эффективным, без учета соударений, является рассеяние на ионах, определяемое вторым членом уравнения (1.4), который описывает нелинейное рассеяние, а $\frac{1}{\epsilon}$, – входящее в (1.4), описывает виртуальную продольную волну, о которой говорилось выше. Как нетрудно показать, в отсутствие соударений второй член в (1.4) можно записать в виде

$$S_1\frac{\mathrm{Im}\,\epsilon_i}{|\epsilon|^2}S_2\ . \qquad (1.5)$$

Отсюда следует, что так как $\mathrm{Im}\epsilon_i \approx \delta(\omega_- - \vec{k}_-\vec{v}_i)$, то (1.4), действительно, описывает рассеяние на ионах. Нужно отметить, что вклад ионов в $S_{1,2}$ и Σ оказывается пренебрежимо малым, так как эти функции содержат высокую степень массы ионов в знаменателе. С учетом соударений картина изменяется следующим образом: ион-ионные соударения вносят вклад в ϵ_1 и $|\epsilon|^2$, электрон-ионные и электрон-электронные соударения изменяют функции Σ и S.

§ 2. Общие выражения для нелинейных токов плазмы

Вследствие того, что частота и волновой вектор лишь виртуальной волны попадает в область частых соударений, для нахождения нелинейных поляризуемостей $S(k_-,k_1,-k_2)$, $S(k_1,k_2,k_-)$ $\Sigma(k_1,k_2,k_1,-k_2)$, $\Sigma(k_1,k_2,-k_2,k_1)$, $(k_-=k_1-k_2)$ необходимо использовать новый кинетико-гидродинамический подход. Если все частоты находятся в области частых соударений, то для нахождения компонент нелинейных токов можно пользоваться известными гидродинамическими уравнениями (см. /10/). Случай, когда частоты всех волн больше эффективной частоты соударений, в настоящее время хорошо изучен (см. /1,2/). Однако оба эти метода непригодны для наших целей. Здесь мы изложим кинетико-гидродинамический подход, позволяющий вычислять компоненты нелинейных токов в случае, когда

$$|\omega_- - k_- v_{T\alpha}| \ll \nu_{эф} \ll |\omega_{1,2} - k_{1,2} v_{T\alpha}|, \quad \alpha = e, i. \tag{2.1}$$

Проиллюстрируем этот метод на примере расчета нелинейной поляризуемости $S(k_-,k_1,-k_2)$. Разложим функцию распределения по ступеням электрического поля $f=f_0+f^{(1)}+f^{(2)}+f^{(3)}+\ldots$. Кинетическое уравнение для компонент Фурье $f_k^{(i)}$ с учетом интеграла столкновений имеет вид

$$-i(\omega-\vec{k}\vec{v})f^{(1)}_{\alpha k} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E_k \frac{(\vec{k}\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}})}{k} = I_{\alpha k}(1,0) + I_{\alpha k}(0,1), \tag{2.2}$$

$$-i(\omega-\vec{k}\vec{v})f^{(2)}_{\alpha k} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\epsilon\int E_{k_1}\left(\frac{\vec{k}_1}{k_1}\frac{\partial f^{(1)}_{\alpha k_2}}{\partial \vec{v}}\right)\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1 dk_2 = \tag{2.3}$$

$$= I_{\alpha k}(2,0) + I_{\alpha k}(1,1) + I_{\alpha k}(0,2),$$

$$-i(\omega-\vec{k}\vec{v})f^{(3)}_{\alpha k} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\int E_{k_1}\left(\frac{\vec{k}_1}{k_1}\frac{\partial f^{(2)}_{\alpha k_2}}{\partial \vec{v}}\right)\delta(k-k_1-k_2)\,dk_1 dk_2 + \tag{2.4}$$

$$+ I_{\alpha k}(3,0) + I_{\alpha k}(2,1) + I_{\alpha k}(1,2) + I_{\alpha k}(0,3).$$

Здесь $I_a = \sum_{a'} I_{aa'}$, $a = e, i$; а $I_{aa'}$ берем в форме Ландау [6] :

$$I_{aa'} = -\frac{2\pi L e^4}{m_a} \frac{\partial}{\partial v_i} \int \left\{ \frac{f_a(\vec{v})}{m_{a'}} \frac{\partial f_{a'}(\vec{v}')}{\partial v_j'} - \frac{f_{a'}(\vec{v}')}{m_a} \frac{\partial f_a(\vec{v})}{\partial v_j} \right\} V_{ij}\, d\vec{v}' ; \tag{2.5}$$

$$V_{ij} = \frac{1}{w^3} (w^2 \delta_{ij} - w_i w_j), \quad \vec{w} = \vec{v} - \vec{v}' ;$$

L – кулоновский логарифм.

$I(m,n)$ означает, что в интеграле столкновений вместо $f(v)$ нужно брать $f^{(m)}(v)$, а вместо $f(v')-f^{(n)}(v')$, $I_k(m,n)$ есть компонента Фурье функции $I(m,n)$. В том случае, когда ω совпадает с частотой турбулентных пульсаций, интеграл столкновений может быть учтен по обычной теории возмущений. Уравнение, в котором ω равна разности частот турбулентных пульсаций, нужно решать методом, сходным с методом Энскоса [9]. Уравнение (2.2) для нахождения $S(k_-, k_1, -k_2)$ в первом приближении имеет решение

$$f^{(1)}_{ek} = -\frac{ieE_k}{m_e(\omega - \vec{k}\vec{v})} \left(\vec{k} \frac{\partial f_{oe}}{\partial \vec{v}} \right). \tag{2.7}$$

Подставляя это выражение в правую часть (2.2), учтем поправки порядка $\frac{\nu}{\omega} \ll 1$ [8]. Учет этих поправок необходим, так как согласно (1.4) нелинейное взаимодействие определяется симметричной комбинацией $S(k_-, k_1, -k_2) + S(k_-, -k_2, k_1)$, в которой вклад (2.7) имеет относительный порядок (ω_- / ω_o) , а поправок – порядок $(\nu_{эф}/\omega_o) \gg (\omega_- / \omega_o)$. Интегрируя (2.7) с учетом поправочных членов получим следующее выражение для тока электронов первого порядка:

$$j^{(1)}_k = E_k \frac{e^2 n_0 i}{m_e \omega} \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega}\right) \equiv e n_0 V^{(1)}_k,$$

$$\nu_e = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \; \frac{L n_0 e^4}{m_e^2 v_{Te}^3} , \tag{2.8}$$

L – кулоновский логарифм.

Решение уравнения (2.3) в первом приближении должно обращать в нуль интеграл столкновений. Выделим в интеграле столкновений наибольшие члены, а остальные перенесем в левую часть (2.3), которую будем учитывать по теории возмущений. Основными членами в интеграле столкновений являются

$$I_{ee}(0,2) + I_{ee}(2,0) + I_{ei}(2,0).$$

В пренебрежении членами порядка $(m_e/m_i) \ll 1$

$$I_{kei}(2,0) = \frac{2\pi n_0 e^4}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_i} V_{ij}(v) \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial v_j}, \tag{2.9}$$

а $I_{kej}(0,2)$ пренебрежимо мало потому, что содержит $f_{ik}^{(2)} \approx \frac{1}{m_i^2}$. Из (2.9) удобно выделить малый член

$$\delta I_{kei}(2,0) = \frac{4\pi L e^4 f_0(\vec{v})}{m_e^2 v_{Te}^2 v^3} \int (\vec{v} \, \vec{v}')\, f_{ek}^{(2)}(\vec{v}')\, d\vec{v}' \tag{2.10}$$

и перенести его в левую часть[x)]. Тогда уравнение нулевого приближения имеет вид

$$I_{kee}(2,0) + I_{kee}(0,2) + I_{kei}(2,0) - \delta I_{kei}(2,0) = 0. \tag{2.11}$$

Простой подстановкой можно убедиться, что уравнению (3.10) удовлетворяет функция

$$f_{ek}^{(2)0} = f_{00}\left\{ \frac{n_k^{(2)}}{n_0} + \frac{\vec{v}\vec{V}_k^{(2)}}{v_{Te}^2} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{v^2}{3v_{Te}^2}\right)\frac{T_k^{(2)}}{T_e} \right\}, \tag{2.12}$$

где

$$n_k^{(2)} = \int f_k^{(2)0}\, d\vec{v}\ ; \quad \vec{V}_k^{(2)} = \frac{1}{n_0}\int \vec{v}\, f_k^{(2)0}\, d\vec{v}\ ; \quad T_k^{(2)} = \frac{1}{3n_0}\int \frac{m_e v^2}{2} f_k^{(2)0} d\vec{v} - \frac{n_k^{(2)}}{n_0} T_e\ ; \tag{2.13}$$

$$f_{00} = \left(n_0 / v_{Te}^3 (2\pi)^{3/2}\right) \exp\left(- v^2/2v_{Te}^2\right),$$

n_0, T_e – невозмущенные плотность и температура плазмы. Функция (2.12) представляет первый член разложения разности двух максвелловских функций

$$f_e^{(2)0} = n\left(\frac{m_e}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(\vec{v}-\vec{V})^2}{2T_e} m_e\right) - n_0\left(\frac{m_e}{2\pi T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T_e}\right), \tag{2.14}$$

$$n = \int (f_{00} + f^{(2)0})\, d\vec{v}\ ; \quad \vec{V} = \int (f_{00} + f^{(2)0})\, \vec{v}\, d\vec{v}\ ; \quad T = \frac{1}{3}\int (f_{00} + f^{(2)0}) \frac{m_e v^2}{2} d\vec{v}. \tag{2.15}$$

---

x) Относительный порядок (2.10)$(\omega_-/k v_{Te})$, в чем можно убедиться, используя результаты решения уравнения (2.3).

Так как в (2.12) не входят моменты функции распределения первого порядка[x)], то система уравнений, получающихся при учете малой левой части (2.3), сильно отличается от гидродинамических уравнений. Интегрируя (2.3), получим уравнения для моментов функции $f_k^{(2)}$ (которые, как и в методе Энскога [9], совпадают с моментами функции $f_k^{(2)0}$):

$$-i\omega n_k^{(2)} = -n_0 (\vec{k}\,\vec{V}_k^{(2)}), \tag{2.16}$$

$$-m_e n_0 i\omega V_{k\alpha}^{(2)} + i k_\alpha (n_0 T_k^{(2)} + T_e n_k^{(2)}) + i k_\beta \pi_{\alpha\beta,k}^{(2)} - e\int E_{k_1} \frac{k_{1\alpha} n_{k_2}^{(1)}}{k_1} \delta(k - k_1 - k_2) = R_{k,\alpha} \tag{2.17}$$

$$-\frac{3}{2} n_0 i\omega T_k^{(2)} + n_0 T_e i(\vec{k}\,\vec{V}_k^{(2)}) + i(\vec{k}\,\vec{q}_{ek}) - e n_0 \int E_{k_1} \frac{\vec{k}_1 \vec{V}_{k_2}^{(1)}}{k_1} \delta(k - k_1 - k_2)\, dk_1 dk_2 = 0 \tag{2.18}$$

где

$$\vec{R}_k = \int m_e \vec{v}\, I_{eik}(2,0)\, d\vec{v} \tag{2.19}$$

является аналогом силы трения и термосилы в обычной гидродинамике,

$$\vec{q}_k = \int \frac{m_e v^2}{2} \vec{v}\, f_{ek}^{(2)}\, d\vec{v} \quad - \tag{2.20}$$

аналогом электронного потока тепла из-за соударений,

$$k_s \pi_{\alpha sk}^{(2)} = m_e \int \left(v_\alpha (\vec{k}\,\vec{v}) - \frac{1}{3} k_\alpha v^2 \right) f_{ek}^{(2)}\, d\vec{v} \quad - \tag{2.21}$$

аналогом электронной вязкости.

Обычно, кроме $\vec{q}$ и $\vec{R}$, в правую часть (2.18) входит величина $Q = \int \frac{m_e v^2}{2} I_{ei}(2)\, d\vec{v}$, выражающая выделение тепла в электронах вследствие их столкновений с ионами. С точностью до членов первого порядка по $f_{ek}^{(2)}$, $Q = -\frac{m_e}{m_i} \nu_e T_k^{(2)} n_0$. Для того, чтобы замкнуть систему уравнений (2.16) - (2.18), нам нужно в (2.20), (2.21) выразить $f_k^{(2)}$ через искомые

x) Нетрудно показать, что если в (2.15) $f = f_{00} + f^{(1)} + f^{(2)}$, то (2.14) не удовлетворяет (2.11). Справедливо и более общее утверждение. Любая функция $f^{(2)0}$, содержащая моменты первого порядка, не может удовлетворять уравнению (2.11).

величины $n_k^{(2)}, \vec V_k^{(2)}$ и $T_k^{(2)}$. Рассмотрим полное уравнение для $f_k^{(2)}$ с учетом малых членов, перенесенных в левую часть (2.3). Тогда в левой части приближенно полагаем $f_k^{(2)} = f_k^{(2)0}$ согласно (2.12), а в правой части учтем малую поправку к $f_k^{(2)0}$, которую удобно представить в виде $f_k^{(2)} = f_k^{(2)0} + f_{00}\Phi$ $(f_{00}\Phi \ll f_k^{(2)0})$.
В результате левая часть искомого уравнения становится равной

$$f_{00}\Big\{\Big(\frac{v^2}{2v_{Te}^2} - \frac{5}{2}\Big)\frac{T_k^{(2)}}{T_e} i(\vec k \vec v) + \Big(3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{v_{Te}^3}{v^3} - 1\Big)\nu_e \frac{(\vec V_k^{(2)} \vec v)}{v_{Te}^2} +$$

$$+ \frac{1}{n_0 T_e}(\vec R\,' \vec v) + \frac{v_i v_j}{2 v_{Te}^3}(W_{ij} - A^0_{ij}) - \frac{3}{4}\frac{\nu_e}{\omega} A'_{ij}\Big(a\,\delta_{ij} + b\frac{v_i v_j}{v_{Te}^2}\Big)\Big\}, \tag{2.22}$$

$$A_{ij} = \frac{ie^2}{m_e^2 v_{Te}^2}\int E_{k_1} E_{k_2} \frac{k_{1i} k_{2j}}{k_1 k_2}\frac{1}{\omega_2}\Big(1 - i\frac{\nu}{\omega}\Big)\delta(k - k_1 - k_2)\,dk_1\,dk_2\,, \tag{2.23}$$

$$A^0_{ij} = A_{ij} + A_{ji} - \frac{2}{3}\delta_{ij} A_{ii}\,, \tag{2.24}$$

$$W_{ij} = ik_i V^{(2)}_{kj} + ik_j V^{(2)}_{ki} - \frac{2}{3} i(\vec k \vec V_k^{(2)}), \tag{2.25}$$

$$A'_{ij} = \frac{ie^2}{m_e^2 v_{Te}^2}\int E_{k_1} E_{k_2} \frac{k_{1i} k_{2j}}{k_1 k_2}\frac{\omega_0}{\omega_2^2}\delta(k - k_1 - k_2)\,dk_1\,dk_2\,. \tag{2.26}$$

Последний член (2.22) получен из $I_{ee}(1,1)$, в нем a и b – громоздкие функции от $y = (v\sqrt{2}\,v_{Te})$, которые составляют величину порядка единицы при $y \approx 1$. Здесь выражение для a и b не приводятся, так как в силу $a \approx b \approx 1$ весь указанный член имеет относительный порядок $\frac{1}{\nu_e}\max\big(\omega_-, \frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e}\big) \ll 1$ (см. ниже), и им мы пренебрегаем. В силу симметризации A_{ij} по k_1 и k_2 первый член (2.23) мал по сравнению со вторым $(\approx \frac{\omega_-}{\nu})$, который имеет порядок $\frac{\nu_e}{\omega_0}A'_{ij}$, и в тех же предположениях может быть отброшен $(\nu\ (y \approx 1) \approx \nu_e)$. Заметим, что члены, содержащие A_{ij} и A'_{ij}, имеют характер поправок к тензору скорости сдвигов W_{ij}, связанных с наличием полей E_{k_1}, E_{k_2}. В этом приближении как левая, так и правая части уравнения (2.3) приобретают стандартный вид, использованный, например, в работе Брагинского /10/. Используя результаты этой работы, мы можем написать вместо (2.19–2.21):

$$\vec{R}_k = -m_e n_o \nu_e 0{,}51\vec{V}_k^{(2)} - 0{,}71\, i\, n_o \vec{k}\, T_k^{(2)}. \tag{2.27}$$

$$\vec{q}_k = 0{,}71\, n_o T_e \vec{V}_k^{(2)} - 3{,}16\, i \vec{k}\, T_k^{(2)} \frac{n_o T_e}{m_e \nu_e}, \tag{2.28}$$

$$k_\beta \pi_{\alpha\beta}^{(2)} = -0{,}73 \frac{n_o T_e}{\nu_e} k_\beta W_{\alpha\beta}. \tag{2.29}$$

Используя равенства (2.27)-(2.29), а также (2.8) в системе уравнений (2.16)-(2.19), получим искомый продольный ток

$$j_{k_-}^{(2)} = e n_o \frac{\vec{V}_{k_-}^{(2)} \vec{k}_-}{|k_-|} = \tag{2.30}$$

$$= -\frac{i n_o e^3 1{,}71 \nu_e}{m_e^2 \omega_o^2} \int E_{k_1} E_{k_2} |k_-| \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)}{k_1 k_2} \frac{\delta(k - k_1 - k_2)}{\Omega\, \Omega_e} dk_1 dk_2 .$$

Этот результат выписан с точностью $\frac{1}{\nu_e} \max\left(\omega_-, \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}\right)$.

$$\Omega = -i\omega_- + 0{,}51 \nu_e + i \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_-}\left(1 - 2{,}96 \frac{i\omega_-}{\Omega_e}\right), \tag{2.31}$$

$$\Omega_e = -\frac{3}{2} i\omega_- + 3{,}16 \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}. \tag{2.32}$$

Для оценки порядка отброшенных членов достаточно учесть, например, $\overset{o}{A}_{\alpha\beta}$, так как остальные члены имеют тот же порядок. В силу того, что тензорные свойства $\overset{o}{A}_{\alpha\beta}$ совпадают с тензорными свойствами $W_{\alpha\beta}$, учет $\overset{o}{A}_{\alpha\beta}$ приведет лишь к тому, что в (2.29) войдет $W_{\alpha\beta} - \overset{o}{A}_{\alpha\beta}$ вместо $W_{\alpha\beta}$. Отсюда вместо (2.30) получим

$$j_{k_-}^{(2)} = \int E_{k_1} E_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 \frac{n_o |k_-| e^3}{m_e^2 \omega_{oe}^2 \Omega} \left\{ \left(1{,}71 \frac{\nu_e}{\Omega_e} - 0{,}49\right) \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)}{k_1 k_2} + 1{,}46 \frac{(\vec{k}_- \vec{k}_1)(\vec{k}_- \vec{k}_2)}{k_1 k_2 k_-^2} \right\}. \tag{2.33}$$

Из (2.33) следует, что результат (2.30) справедлив при выполнении неравенства

$$\left| -\frac{3}{2} i\omega_- + 3{,}16 \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e} \right| \ll \nu_e . \tag{2.34}$$

Из (2.30) следует искомое выражение для $S(k_-, k_1, -k_2)$:

$$S(k_-, k_1, -k_2) = i\,\frac{|k_-|\, n_o e^3\, 1{,}71\, \nu_e}{m_e^2\, \omega_{oe}^2\, \Omega\, \Omega_e}\;\frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)}{k_1 k_2}\,. \tag{2.35}$$

Обратимся к нахождению $S(k_1, k_2, k_-)$. В этом случае в уравнении (2.2) интеграл столкновений является определяющим. Используя метод Энскога вместо (2.2), считая $k = k_-$, получим систему гидродинамических уравнений, которые в фурье-представлении имеют вид

$$-i\omega_-\, n^{(1)}_{ek_-} + i\vec{k}_-\vec{V}^{(1)e}_{k_-}\, n = 0\,, \quad -i\omega_-\, n^{(1)}_{ik_-} + i\vec{k}_-\vec{V}^{(1)i}_{k_-}\, n_0 = 0\,,$$

$$-i\omega_-\, m_e n_o V^{(1)e}_{k_-\alpha} = -ik_{-\alpha}\left(n_o T^{(1)}_{ek_-} + T_e n^{(1)}_{ek_-}\right) - ik_{-\beta}\pi^{(1)e}_{\alpha\beta}(k_-) + e n_o E_{k_-}\frac{k_{-\alpha}}{|k_-|} + R^{(1)}_{k_-\alpha} \tag{2.36}$$

$$-i\omega_-\, m_i n_0 V^{(1)i}_{k_-\alpha} = ik_{-\alpha}\left(n_0 T^{(1)}_{ik_-} + T_i n^{(1)}_{ik_-}\right) - ik_{-\beta}\pi^{(1)i}_{\alpha\beta}(k_-) - e n_o E_{k_-}\frac{k_{-\alpha}}{|k_-|} - R^{(1)}_{k_-\alpha}$$

$$-\frac{3}{2}\, i\omega_-\, n_o T^{(1)}_{ek_-} + n_o T_e\, i\left(\vec{k}_-\vec{V}^{(1)e}_{k_-}\right) = -i\vec{k}_-\vec{q}^{(1)e}_{k_-}\,,$$

$$-\frac{3}{2}\, i\omega_-\, n_0 T^{(1)}_{ik_-} + n_0 T_i\, i\left(\vec{k}_-\vec{V}^{(1)i}_{k_-}\right) = -i\vec{k}_-\vec{q}^{(1)i}_{k_-}\,;$$

где

$$\vec{R}^{(1)}_{k_-} = -0{,}51\, m_e n_o \nu_e\left(\vec{V}^{(1)e}_{k_-} - \vec{V}^{(1)i}_{k_-}\right) - 0{,}71\, n_o\, i\vec{k}_- T^{(1)}_{ek_-}\,,$$

$$\vec{q}_{k_-} = 0{,}71\, n_o T_e\left(\vec{V}^{(1)e}_{k_-} - \vec{V}^{(1)i}_{k_-}\right) - 3{,}16\,\frac{n_o T_e}{m_e \nu_e}\, i\vec{k}_- T^{(1)}_{ek_-}\,, \tag{2.37}$$

$$\vec{q}^{(1)i}_{k_-} = -3{,}9\,\frac{n_o T_i}{m_i \nu_i}\, i\vec{k}_- T^{(1)}_{ik_-}\,,$$

$$\pi^{(1)e}_{\alpha\beta} = -0{,}73\,\frac{n_o T_e}{\nu_e}\left(ik_{-\alpha} V^{(1)e}_{k_-\beta} + ik_{-\beta} V^{(1)e}_{k_-\alpha} - \frac{2}{3}\, i\vec{k}_-\vec{V}^{(1)e}_{k_-}\,\delta_{\alpha\beta}\right),$$

$$\pi^{(1)i}_{\alpha\beta} = -0{,}96\,\frac{n_e T_i}{\nu_i}\, i\left(k_{-\alpha} V^{(1)i}_{k_-\beta} + k_{-\beta} V^{(1)i}_{k_-\alpha} - \frac{2}{3}\vec{k}_-\vec{V}^{(1)i}_{k_-}\,\delta_{\alpha\beta}\right).$$

Для того, чтобы были справедливы уравнения (2.36) с постоянными T_e и T_i , необходимо, чтобы либо частота ω_- была больше обратного времени релаксации температур $\frac{m_e}{m_i}\nu_e$, либо чтобы плазма была изотермической $\left(T_e = T_i\right)$.

Решая систему (2.36), (2.37), получим

$$V^{(1)e}_{k_-} = \frac{e E_{k_-}}{m_e \kappa \omega_e}, \quad V^{(1)i}_{k_-} = -\frac{e E_{k_-}}{m_i \kappa \omega_i}, \quad V^{(1)\alpha}_{k_-} = \frac{\vec{k}_- \vec{V}^{(1)\alpha}_{k_-}}{|\vec{k}_-|}, \tag{2.38}$$

где

$$\kappa = 1 + \left(0{,}51\, \nu_e + 1{,}22\, \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\Omega_e}\right)\left(\frac{1}{\omega_e} + \frac{m_e}{m_i}\,\frac{1}{\omega_i}\right), \tag{2.39}$$

$$\omega_e = -i\,\omega_- + i\,\frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_-}\left(1 - 1{,}71\,\frac{i\,\omega_-}{\Omega_e}\right), \tag{2.40}$$

$$\omega_i = -i\,\omega_- + i\,\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-}\left(1 - \frac{i\,\omega_-}{\Omega_i} - 1{,}28\,\frac{i\,\omega_-}{\nu_i} + 0{,}71\, i\,\frac{T_e}{T_i}\,\frac{\omega_-}{\Omega_e}\right), \tag{2.41}$$

$$\Omega_i = -\frac{3}{2}\, i\,\omega_- + 3{,}9\,\frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i}, \qquad \nu_i = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,\frac{L n_0 e^4}{m_i^2 \vec{v}_{Ti}^3}. \tag{2.42}$$

С помощью (2.38) можно найти как $S(k_1, k_2, k_-)$, так и линейную диэлектрическую проницаемость $\epsilon(k_-)$ плазмы. Имеем

$$\epsilon(k_-) = 1 + i\,\frac{4\pi n_0 e\,(V^{(1)e}_{k_-} - V^{(1)i}_{k_-})}{\omega_- E_{k_-}} = 1 + i\,\frac{\omega_{0e}^2}{\kappa\omega_-\omega_e} + i\,\frac{\omega_{0i}^2}{\kappa\,\omega_-\omega_i}. \tag{2.43}$$

С другой стороны, пренебрегая интегралом соударений в (2.3)[x], получим

$$j^{(2)}_{k_1} = e\int f^{(2)}_{k_1 e}\frac{\vec{v}\vec{k}_1}{k_1}d\vec{v} = \frac{e^2}{m_e}\int \frac{\vec{k}_1\vec{v}}{k_1}\,\frac{d\vec{v}\,E_{k_2}}{i(\omega_1 - \vec{k}_1\vec{v})}\left(\frac{\vec{k}_2}{k_2}\,\frac{\partial f^{(1)}_{ek'}}{\partial \vec{v}}\right)\delta(k_1 - k' - k_2)\,dk'\,dk_2 \approx$$

$$\approx \frac{ie^2}{m_e}\int \frac{\vec{k}_1\vec{k}_2}{k_1 k_2}\,\frac{1}{\omega_i}\,E_{k_2}\, n^{(1)}_{k_- e}\,\delta(k_1 - k_- - k_2)\,dk_-\,dk_2 \;. \tag{2.44}$$

В (2.44) пренебрегается допплеровскими поправками к ω_i. Их учет приводит к малым поправкам относительного порядка $\frac{\omega_-}{\omega_i}$. Из первых уравнений (2.36) и (2.38) получим

$$j^{(2)}_{k_1} = \frac{ie^3 n_0}{m_e^2}\int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)}{k_1 k_2}\,|\vec{k}_-|\,\frac{E_{k_-} E_{k_2}}{\omega_i\omega_e\kappa\omega_-}\,\delta(k_1 - k_2 - k_-)\,dk_2\,dk_-, \tag{2.45}$$

---

[x] В данном случае достаточно ограничиться этим приближением в отличие от расчета $S(k_-, k_1, -k_2)$, когда интеграл соударений необходимо учитывать в первом порядке теории возмущений. Это является следствием того, что в нелинейном взаимодействии (1.4) симметризация по $k_1 k_2$ в $S(k_1, k_2, k_-)$ отсутствует.

т.е. искомая S_2 есть

$$S_2(k_1, k_2, k_-) = \frac{ie^3 n_0 |\vec{k}_-| (\vec{k}_1 \vec{k}_2)}{k_1 k_2 m_e^2 \omega_{oe} \kappa\omega_e \omega_-} , \tag{2.46}$$

3. Обратимся в к вычислению $\Sigma(k_1, k_2, k_1, -k_2) + \Sigma(k_1, k_2, -k_2, k_1)$.

Пренебрегая допплеровскими поправками и интегралом соударений в (2.4), имеем

$$j_k^{(3)} = e \int \frac{\vec{k}\vec{v}}{k} f_k^{(3)} d\vec{v} \approx \frac{e^2}{m_e} \int E_{k_1} \frac{\vec{k}\vec{v}}{i\omega k} \left(\frac{\vec{k}_1}{k_1} \frac{\partial f_{k_-}}{\partial \vec{v}} \right) \delta(k - k_1 - k_-) dk_1 dk_- d\vec{v} \approx$$

$$\approx \frac{ie^2}{m_e \omega} \int \frac{(\vec{k}\,\vec{k}_1)}{k k_1} E_{k_1} n_{k_-}^{(2)} \delta(k - k_1 - k_-) dk_- dk_1 = \frac{ie^2}{m_e \omega} \int \frac{|\vec{k}_-| (\vec{k}\,\vec{k}_1)}{k k_1 \omega_-} n_0 V_{k_-}^{(2)} E_{k_1} \tag{2.47}$$

$$\times \delta(k - k_1 - k_-) dk_1 dk_- =$$

$$= \frac{ie}{m_e \omega} \int \frac{|\vec{k}_-| (\vec{k}\,\vec{k}_1) E_{k_1}}{\omega_- k k_1} j_{k_-}^{(2)} \delta(k - k_1 - k_-) dk_1 dk_- ,$$

или, используя (2.30):

$$j_k^{(3)} = \frac{1{,}71 \nu_e n_o e^4}{m_e^3 \omega_{oe}} \int E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3} \frac{(\vec{k}_2 \vec{k}_3) |\vec{k}_2 + \vec{k}_3| \, |\vec{k} - \vec{k}_1| \, (\vec{k}\,\vec{k}_1) \delta(k - k_1 - k_2 - k_3)}{\omega_{oe}^2 k k_1 (\omega - \omega_1) k_2 k_3 \Omega(k_2 + k_3) \Omega_e(k_2 + k_3)} dk_1 dk_2 dk_3 . \tag{2.48}$$

Заметим, что искомая сумма $\Sigma(k_1, k_2, k_1, -k_2) + \Sigma(k_1, k_2, -k_2, k_1)$ представляет собой выражение, симметризованное по индексам 2,3, что оправдывает использование (2.30), при получении которого указанное свойство симметрии было существенным образом использовано.

Из (2.48) получим

$$\frac{1}{2} \left(\Sigma(k_1, k_2, k_1, -k_2) + \Sigma(k_1, k_2, -k_2, k_1) \right) = - \frac{n_0 e^4 k_-^2 (\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2 1{,}71 \nu_e}{\omega_- k_1^2 k_2^2 m_e^3 \omega_{oe}^3 \Omega \Omega_e} . \tag{2.49}$$

§ 3. Спектральная перекачка слабых ленгмюровских турбулентных пульсаций

Будем предполагать, что, с одной стороны, интенсивность ленгмюровских пульсаций настолько мала, что изменением их дисперсионных свойств из-за нелинейных взаимодействий можно пренебречь, с другой стороны – настолько велика, что характерный инкремент спектральной перекачки много больше ν_e [x]. Термин "слабые ленгмюровские пульсации" употребляется в дальнейшем в этом смысле. Для слабых волн $\omega_- \equiv \frac{3}{2} \frac{v_{Te}^2 (k_1^2 - k_2^2)}{\omega_{oe}}$. Спектральная перекачка определяется мнимой частью (1.4)

$$\gamma_{k_1} = \mathrm{Im} \int \Sigma' (\vec{k}_1, \vec{k}_2) |E_{k_2}|^2 d k_2, \quad |E_{k_2}|^2 = |E_{k_2}|^2 \delta(\omega - \omega_{\vec{k}_2}), \tag{3.1}$$

где

$$\Sigma(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = 2\pi i \{ \Sigma(k_1, k_2, k_1, -k_2) + \Sigma(k_1, k_2, -k_2, k_1) - \tag{3.2}$$

$$- \frac{8\pi i}{\omega_- \epsilon(k_-)} S_1(k_-, k_1, -k_2) S_2(k_1, k_2, k_-) \}.$$

Используя (2.35), (2.46), (2.43), (2.49), можно получить

$$\Sigma(k_1, k_2) = -i \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2 1{,}71 \, \nu_e k_-^2 e^2}{\omega_{oe} k_1^2 k_2^2 \omega_- \Omega \Omega_e m_e^2} \left(1 - \frac{\epsilon(k_-) - 1}{\epsilon(k_-)}\right). \tag{3.3}$$

Первый член (3.3) соответствует вкладу тока третьей степени по полю, а второй член – второй степени, $\epsilon(k_-) = \epsilon_e(k_-) + \epsilon_i(k_-) + 1$. Если пренебречь ионным слагаемым в ϵ, то при $\epsilon_e \gg 1$ происходит полная компенсация этих вкладов. Полученный эффект компенсации аналогичен компенсации нелинейного и комптоновского рассеяния в бесстолкновительном случае /2/. Область применимости (3.3) согласно (2.1), так как $\omega_- \ll k_- v_{T\alpha}$, имеет вид

$$k_- v_{Te} \ll \nu_e, \quad k_- v_{Ti} \ll \nu_i. \tag{3.4}$$

---

[x] Поглощение Ландау ленгмюровских волн считаем экспоненциально малым, поглощение же из-за столкновений имеет порядок ν_e.

В силу этих неравенств фазовые скорости волн достаточно велики и допплеровские поправки в (3.3) пренебрежимо малы в сравнении с ионным вкладом. Тогда

$$\Sigma(k_1, k_2) = -i\,\frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2\, 1{,}71\, \nu_e\, k_-^2 e^2\, \epsilon_i(k_-)}{\omega_{oe} k_1^2 k_2^2 m_e^2 \omega_- \Omega \Omega_e\, \epsilon(k_-)} \quad . \tag{3.5}$$

В условиях $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$, т.е. достаточно больших фазовых скоростей, если

$$\frac{\nu_i}{\omega_{oe}} \gg \frac{T_i}{T_e}\,\frac{m_e}{m_i}\,, \tag{3.6}$$

получим при

$$\max\left(\nu_e^2,\ \nu_i\,\omega_{oe}\right) \gg k_-^2 v_{Te}^2 \gg \nu_e \nu_i \frac{T_e}{T_i} \tag{3.7}$$

$$\gamma_{\vec{k}_1} = \frac{1}{|E_{\vec{k}_1}|^2}\frac{\partial}{\partial t}|E_{\vec{k}_1}|^2 = -\,\omega_{oe}\int \frac{\nu_e^2\, \omega_-\, T_i\, (\vec{k}_1\vec{k}_2)\ 0{,}69}{\nu_i\, |\vec{k}_-|^2 T_e \left(1+\frac{5}{3}\frac{T_i}{T_e}\right)^2 k_1^2 k_2^2}\ \frac{|E_{\vec{k}_2}|\, d\vec{k}_2}{n_0\, m_e\, v_{Te}^2}\ . \tag{3.8}$$

Неравенство (3.7) выполняется, если $(T_e / T_i)^5 \ll \frac{m_i}{m_e}$, что всегда имеет место для изотермической плазмы $T_e = T_i$. Подчеркнем, что также, как и в отсутствие соударений /2/, перекачка идет в сторону уменьшения частот турбулентных пульсаций. Заметим, что необходимым условием проявления нелинейного взаимодействия (3.8) является $\gamma_k \gg \nu_e$. Учитывая, что T_e не может сильно отличаться от T_i , получим при $T_e \gtrless T_i$ $\gamma \approx \nu_e \frac{\nu_e W}{\nu_i n_0 T_e} \approx \nu_e \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\,\frac{W}{n_0 T_e}$, т.е. необходимо $\frac{W}{n_0 T_e} > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. Вопрос в том, может ли изменение дисперсии при таких интенсивностях быть малым, требует специального рассмотрения (§ 5). В другом предельном случае, когда (3.6) выполнено, но (3.7) нарушено, а именно:

$$\nu_e\, \omega_{oe} \frac{m_e}{m_i} \ll k_-^2 v_{Te}^2 \ll \nu_e \nu_i \frac{T_e}{T_i}\,, \tag{3.9}$$

имеем

$$\gamma_{\vec{k}_1} = \omega_{oe}\int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}\ \frac{\omega_-\nu_e^3\ 0{,}12}{k_-^4 v_{Te}^4}\ \frac{|E_{\vec{k}_2}|^2\, d\vec{k}_2}{4\pi n_0 T_e\left(1+\frac{5}{3}\frac{T_i}{T_e}\right)^2}\ . \tag{3.10}$$

В этом случае направление спектральной перекачки соответствует увеличению частот турбулентных пульсаций. Область, в которой (3.9) имеет место, исчезает, если нарушается (3.6). Таким образом, для того, чтобы (3.10) имело место, необходимо выполнение (3.6) с хорошим запасом. Для того, чтобы оценить выполнимость (3.6), удобно записать это неравенство в другой форме, вводя число электронов в дебаевской сфере

$$N_D \cong \frac{\omega_{oe}}{\nu_e} . \tag{3.11}$$

Тогда вместо (3.6) имеем

$$1 \ll N_D \lll \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{5/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} . \tag{3.12}$$

Для изотермической плазмы $T_e \approx T_i$ плотность плазмы должна быть достаточно большой, а ее температура малой. Для $T_e \gg T_i$ условие (3.12) выполняется при значительно меньших температурах и больших плотностях. Спектральная перекачка превалирует над линейным затуханием, если выполнено

$$\frac{W}{n_o T_e} > \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e^2} . \tag{3.13}$$

Рассмотрим теперь нелинейное взаимодействие в условиях неравенства, обратного (3.6)

$$\frac{\nu_e}{\omega_{oe}} \ll \frac{T_i}{T_e} \frac{m_e}{m_i} . \tag{3.14}$$

Имеем

$$\gamma_{\vec{k}_1} = -\omega_{oe} \int \frac{0{,}13\, \nu_e^2\, \nu_i\, \omega_-\, m_i\, (\vec{k}_1\, \vec{k}_2)^2}{|\vec{k}_-|\, 4 m_e v_{Te}^4 \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)^2 k_1^2 k_2^2} \frac{|E_{\vec{k}_2}|^2\, d\vec{k}_2}{4\pi n_0 T_e} . \tag{3.15}$$

Порядок инкремента (3.15) есть

$$\gamma \approx \frac{W}{n_o T_e} \nu_e \frac{\nu_e \nu_i}{|k_-|^2 v_{Te}^2} \frac{m_i}{m_e} ,$$

следовательно, $\gamma > \nu_e$ при

$$\frac{W}{n_o T_e} > \frac{v_{Te}^2}{v^2} \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{oe}^2}{\nu_e \nu_i} \gg N_D \frac{T_e}{T_i} \frac{v_{Te}^2}{v^2} . \tag{3.16}$$

Отметим, что формулы, полученные в настоящем параграфе справедливы и в том случае, когда учитывается изменение дисперсии волн из-за нелинейных взаимодействий.

§ 4. Изменение дисперсии ленгмюровских волн при $\omega_- \ll \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$

Наряду с изменением спектральной перекачки соударения могут существенно изменить спектры ленгмюровских волн достаточно больших фазовых скоростей. Поправка к частоте ленгмюровских волн $\delta\omega_k$ имеет вид

$$\delta\omega_{\vec{k}_1} = \mathrm{Re} \int \Sigma(\vec{k}_1, \vec{k}_2) |E_{\vec{k}_2}|^2 d\vec{k}_2 . \tag{4.1}$$

Так как

$$\omega_- \ll \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e} , \tag{4.2}$$

где ω_- – разность частот ленгмюровских волн с учетом (5.1), то

$$\delta\omega_{\vec{k}_1} = -\omega_{oe} \int \frac{1{,}71\, \nu_e^2 (\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2 |E_{\vec{k}_2}|^2 d\vec{k}_2}{k_-^2 v_{Te}^2 \left(1 + \epsilon \frac{T_i}{T_e}\right) k_1^2 k_2^2 4\pi n_0 T_e} . \tag{4.3}$$

Здесь $\epsilon = \frac{5}{3}$ при выполнении (3.6) и $\epsilon = 1$ при выполнении неравенства, обратного (3.6). Порядок $\delta\omega_{k_1}$ есть $\delta\omega_k \approx \omega_{oe} \times \frac{\nu_e^2}{k_-^2 v_{Te}^2} \frac{W}{n_o T_e}$. С учетом $\delta\omega_k$ может существенно измениться разность частот турбулентных пульсаций ω_-, из которой выпадает большой член ω_{oe},

$$\tilde{\omega}_- = \omega_{\vec{k}_1} + \delta\omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2} - \delta\omega_{\vec{k}_2} \approx \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_{oe}} + \omega_{oe} \frac{\nu_e^2}{k_-^2 v_{Te}^2} \frac{W}{n_o T_e} .$$

Отсюда следует, что изменение дисперсии из-за нелинейности существенно при

$$\frac{W}{n_o T_e} > \frac{k_-^4 v_{Te}^4}{\omega_{oe}^2 \nu_e^2} . \tag{4.4}$$

С другой стороны, в силу (4.2)

$$\frac{W}{n_o T_e} \ll \frac{k_-^4 v_{Te}^4}{\omega_{oe} \nu_e^3} . \tag{4.5}$$

Очевидно, что в безграничной плазме всегда можно найти такие малые k, для которых (4.4) выполнено. В ограниченной плазме $k_{min} \approx \frac{1}{a}$ и в силу $\frac{W}{n_o T_e} \ll 1$ имеем

$$v_{Te}^4 \ll a^4 \omega_{oe}^2 \nu_e^2 , \tag{4.6}$$

что, вообще говоря, также может выполняться. Заметим, что результаты, полученные в § 3, справедливы при

$$\frac{W}{n_o T_e} \ll \frac{k_-^4 v_{Te}^4}{\omega_{oe}^2 \nu_e^2} . \qquad (4.6)$$

Это неравенство находится в противоречии с (3.13), что указывает на то, что дробление масштабов турбулентности, описываемое (3.10), может возникнуть лишь на фоне более интенсивного процесса их поглощения из-за соударений. Учтем далее изменение дисперсии волн в (3.10). В силу того, что $\delta\omega_k$ обратно пропорционально k, знак $\tilde{\tilde{\omega}}_-$ совпадает с знаком $k_1 - k_2$. Это показывает, что (3.10) описывает перекачку, приводящую также к дроблению масштабов турбулентности. При выполнении (4.5) получим

$$\gamma \approx \omega_{oe}^2 \left(\frac{W}{n_o T_e} \right)^2 \frac{\nu_e^5}{k^6 v_{Te}^6} \qquad (4.7)$$

Этот инкремент больше ν_e, если $\frac{W}{n_o T_e} \gg \frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e^2} \frac{k v_{Te}}{\omega_{oe}}$.

Совместно с (4.5) дает $\nu_e \ll k_- v_{Te}$ и противоречит (3.4). Это опять-таки указывает на то, что дробление масштабов турбулентности происходит на фоне более интенсивного процесса их диссипации. Заметим, что (4.6) не противоречит условию применимости (3.8), однако если дисперсия определяется нелинейным взаимодействием, т.е. выполнено (4.4), (4.5), то для оценки интенсивности спектральной перекачки следует в (3.8) ω_- заменить на $\tilde{\tilde{\omega}}_-$:

$$\gamma \cong \left(\frac{W}{n_o T_e} \right)^2 \omega_{oe}^2 \frac{\nu_e^4}{k_-^4 v_{Te}^4 \nu_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right)^{-4} \frac{T_i}{T_e} , \qquad (4.8)$$

что больше ν_e при

$$\frac{W}{n_o T_e} > \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\omega_{oe} \nu_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/4} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{5/4} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right)^2 , \qquad (4.9)$$

в этом случае спектральная перекачка происходит в сторону укрупнения масштабов турбулентности. Однако сопоставляя условия (4.9) и (4.5), видим, что взаимодействие (4.8) возможно лишь на фоне интенсивного затухания. Аналогично в тех же предположениях, что и для (4.8), получаем оценку для нелинейного инкремента (3.15)

$$\gamma \approx \left(\frac{W}{n_o T_e} \right)^2 \omega_{oe}^2 \frac{\nu_e^4 \nu_i}{k_-^6 v_{Te}^6} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right)^{-4} , \qquad (4.10)$$

который превосходит ν_e при

$$\frac{W}{n_0 T_e} > \frac{k_-^3 v_{Te}^3}{\omega_{oe}\nu_e^2}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/4}\left(1+\frac{T_i}{T_e}\right)^2, \tag{4.11}$$

сопоставляя условия (3.16), (4.5), (3.14), получим, что оценка (4.11) справедлива при выполнении неравенств

$$\frac{k_-^4 v_{Te}^4}{\omega_{oe}\nu_e^3} > \frac{W}{n_0 T_e} > \frac{m_e}{m_i}\frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e \nu_i}, \quad \frac{T_i}{T_e}\frac{m_e}{m_i} \gg \frac{\nu_i}{\omega_{oe}} > \frac{m_e}{m_i}, \tag{4.12}$$

которые противоречивы. Таким образом, взаимодействия, протекающие в условиях $\omega_- \ll \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$, вообще говоря, не могут привести к заметному искажению распределения энергии по спектру.

§ 6. Дисперсия и спектральная перекачка при наличии интенсивной турбулентности ($\omega_- \gg \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$)

Отметим, что этот случай представляет наибольший интерес. Если

$$\frac{m_e}{m_i} \ll \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^5 \quad \text{и} \quad \frac{k_-^2 v_{Te}^2}{\nu_e} \ll \omega_- \ll k_- v_{Te},\ k_- v_{Ti} \tag{5.1}$$

то

$$\gamma_{\vec{k}_1} = -\int \frac{|E_{\vec{k}_2}|^2 (\vec{k}_1\vec{k}_2)^2\, 31\,\omega_{oe} k_-^4 v_{Te}^4 (1{,}85 + \frac{T_i}{T_e})}{4\pi n_0 T_e k_1^2 k_2^2 \omega_-^2 \nu_e (2{,}14 + T_i/T_e)^2}\, d\vec{k}_2 \,. \tag{5.2}$$

Изменение спектра пульсаций определяется уравнением[x)]

$$\delta\omega_{\vec{k}_1} = \omega_{oe}\int \frac{|E_{\vec{k}_2}|^2 (\vec{k}_1\vec{k}_2)^2\, 3{,}84\, k_-^2 v_{Te}^2\, d\vec{k}_2}{4\pi n_0 T_e k_1^2 k_2^2 \omega_-^2 (2{,}14 + \frac{T_i}{T_e})} \,. \tag{5.3}$$

Следует заметить, что правые части (5.2) и (5.3) представляют собой мнимую и действительную части дисперсионного уравнения поправок к частоте ленгмюровских колебаний из-за нелинейных взаимодействий. Из условия (5.1) видно, что

---

x) Уравнение, совпадающее с (5.3), может быть получено как дисперсионное для электрического поля слабых волн, возбуждаемых интенсивной турбулентностью (фазы слабых волн произвольны). Это замечание относится ко всем рассмотренным дисперсионным соотношениям.

мнимая часть этого уравнения мала по сравнению с действительной, а решения уравнения, получающегося из (5.3)

$$\delta\omega_{\vec{k}_1} = \omega_{oe} \int \frac{|E_{\vec{k}_2}|^2 \, 3{,}84 \, (\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2 \, k_-^2 v_{Te}^2 \, d\vec{k}_2}{4\pi n_o T_e \, k_1^2 k_2^2 (2{,}14 + \frac{T_i}{T_e})(\delta\omega_{\vec{k}_1} - \delta\omega_{\vec{k}_2})^2}, \tag{5.4}$$

вообще говоря, комплексны, и мнимые части этих решений, как видно из самого вида (6.4), порядка действительных. В этом случае ответственным за нелинейную неустойчивость, приводящую к спектральной перекачке, будут решения (5.4). В связи с тем, что решение уравнения (5.4) затруднительно, мы ограничимся его качественным исследованием, позволяющим получить оценки характерных времен и выяснить направление процесса перекачки. Допустим, что спектр шумов сосредоточен в некой области волновых чисел вблизи $k_2 \cong k_{20}$. Рассмотрим вначале предельный случай $k_1 \gg k_{20}$. Тогда (5.4) в предположении $\delta\omega_{\vec{k}_1} \gg \delta\omega_{\vec{k}_2}$ дает:

$$(\delta\omega_{\vec{k}_1})^3 = -\omega_{oe} k_1^2 v_{Te}^2 \, 3{,}84 \int \frac{|E_{\vec{k}_2}|^2 (\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2 d\vec{k}_2}{4\pi n_o T_e k_1^2 k_2^2 (2{,}14 + \frac{T_i}{T_e})}. \tag{5.5}$$

Для неустойчивого корня:

$$\gamma_{\vec{k}_1} = \operatorname{Im} \delta\omega_{\vec{k}_1} = \frac{1{,}36 \, \omega_{oe}^{1/3}}{(2{,}14 + \frac{T_i}{T_e})^{1/3}} k_1^{2/3} v_{Te}^{2/3} \Big[\int \frac{|E_{\vec{k}_2}|^2 (\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2 \, d\vec{k}_2}{4\pi n_o T_e \, k_1^2 \, k_2^2} \Big]^{1/3}. \tag{5.6}$$

Как видно (5.6) $\delta\omega_{\vec{k}_1}$ растет с ростом k_1 , что оправдывает допущение $\delta\omega_{\vec{k}_1} \gg \delta\omega_{\vec{k}_2}$ при $k_1 \gg k_2$. Оценка инкремента (5.6) при $T_e \approx T_i$ имеет вид

$$\gamma \approx \omega_{oe} \left(\frac{k_1 v_{Te}}{\omega_{oe}} \right)^{2/3} \left(\frac{W}{n_o T_e} \right)^{1/3}.$$

Заметим, что действительная часть $\delta\omega_{\vec{k}_1}$ имеет порядок мнимой части и, таким образом, пространственная дисперсия ленгмюровских колебаний почти полностью связана с их нелинейной неустойчивостью. Заметим также, что (5.2) дает оценку нелинейного инкремента, обусловленного мнимой частью в дисперсионном соотношении (что аналогично кинетической неустойчивости в линейной теории) и, следовательно, $\gamma' \approx \frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e}$. В силу же (5.1) и $\omega_- \approx \gamma$, $\gamma' \ll \gamma$, т.е. в рамках исходных предположений (5.1), "кинетической" неустойчивостью можно пренебречь. Условие (5.1) выполняется, если

$$\frac{v_{Ti}^2}{v_{Te}^2}\frac{k v_{Ti}}{\omega_{oe}} \gg \frac{W}{n_o T_e} \gg \frac{\nu_e^3}{k^2 v_{Te}^2 \omega_{oe}} . \tag{5.7}$$

Следует особо подчеркнуть, что условие малости соударений в данном случае не является ограничивающим, так как при $\gamma \ll \nu_e$ также возникает "нелинейная диссипативная неустойчивость". Действительно, для учета поглощения ленгмюровских волн из-за соударений достаточно левую часть (5.3) заменить на $\delta\omega_{\vec{k}_1} + i\,\nu_e$, и при $\delta\omega_{k_1} \gg \delta\omega_{k_2}$ получим для нарастающего корня

$$\gamma_{k_1} = \mathrm{Im}\,\delta\omega_{\vec{k}_1} = \frac{1{,}39\, k_1 v_{Te}}{(2{,}14 + \frac{T_i}{T_e})^{1/2}} \left[\frac{\omega_{oe}}{\nu_e} \int \frac{|E_{\vec{k}_2}|^2 (\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2 d\vec{k}_2}{4\pi n_o T_e k_1^2 k_2^2} \right]^{1/2} . \tag{5.8}$$

При этом вместо (5.7) имеем

$$\frac{k^2 v_{Te}^2}{\nu_e \omega_{oe}} \ll \frac{W}{n_o T_e} \ll \frac{\nu_e}{\omega_{oe}} \frac{v_{Ti}^2}{v_{Te}^2} . \tag{5.9}$$

Рассмотрим теперь $\delta\omega_{k_1} \ll \delta\omega_{k_2}$. Тогда из (5.4) получим

$$\delta\omega_{\vec{k}_1} = \omega_{oe} \int \frac{|E_{\vec{k}_2}|^2 d\vec{k}_2\, 3{,}84\, (\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2 k_-^2 v_{Te}^2}{4\pi n_o T_e k_1^2 k_2^2 (2{,}14 + \frac{T_i}{T_e}) (\delta\omega_{\vec{k}_2})^2} . \tag{5.10}$$

Оценивая $\delta\omega_k$ из (5.10) и подставляя в (5.2), мы получаем противоречие с исходными предположениями. Таким образом, во всей исследованной области спектральная перекачка идет в сторону дробления масштабов турбулентности.

§ 6. Обсуждение результатов

Подведя итог проделанному анализу, отметим, что исследованная область была ограничена условиями $\nu_e \gg k_- v_{Te}$, $\nu_i \gg k_- v_{Ti}$, а также $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$, $\omega_- \ll k_- v_{Te}$. Именно в области $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$ нелинейные взаимодействия бесстолкновительной плазмы являются наиболее сильными. Этим определяется интерес к указанной области в случае наличия соударений. Вместе с тем использованное условие $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$ не является принципиальным, и из полученных общих формул нетрудно найти также конкретные выражения для нелинейных взаимодействия при $\omega_- \gg k_- v_{Ti}$. Кратко резюмируем результаты:

1. Обнаружено, что ранее рассматривавшаяся в бессоударительной плазме спектральная перекачка является частным случаем более общей нелинейной неустойчивости. Такая неустойчивость может носить как кинетический, так и гидродинамический характер. В первом случае она определяется мнимой частью нелинейного дисперсионного уравнения, а во втором случае – его действительной частью.

2. Как и в линейной теории, инкременты кинетических неустойчивостей, как правило, меньше инкрементов гидродинамических неустойчивостей. В частности, поэтому, как показал анализ, нелинейные кинетические неустойчивости в условиях частых соударений для виртуальных волн обычно задавлены линейным затуханием.

3. Нелинейная гидродинамическая неустойчивость проявляется в широкой области параметров плазмы и приводит к качественно новому эффекту: происходит изменение направления спектральной перекачки. Это имеет место в области фазовых скоростей.

$$\frac{v_{\phi}}{v_{Te}} \gg N_D . \tag{6.1}$$

Практически во всей исследованной области спектральная перекачка приводит к дроблению масштабов турбулентных пульсаций.

4. Нелинейная гидродинамическая неустойчивость развивается и в том случае, когда ее инкременты много меньше частоты соударений. Это приводит к новому важному выводу, состоящему в том, что в области применимости (5.10) затухание ленгмюровских волн из-за соударений отсутствует и при любых, даже очень частых соударениях имеет место нелинейная диссипативная неустойчивость.

5. Обычное деление нелинейных взаимодействий на распадные и процессы индуцированного рассеяния теряет смысл. Вместе с тем в эффектах спектральной перекачки могут проявляться характерные резонансные эффекты, соответствующие обращению в нуль знаменателя (3.5). Если

$$\operatorname{Im} \Sigma(k_1, k_2) \approx \operatorname{Im} \frac{1}{\epsilon_e(k_-) + \epsilon_i(k_-)} = i\pi \frac{\omega_-}{|\omega_-|} \delta(\epsilon_e(k_-) + \epsilon_i(k_-)), \tag{6.2}$$

то такие процессы связаны с обращением в нуль функции Грина виртуальной волны и, следовательно, аналогичны процессам, в которых ленгмюровские волны распадаются на низкочастотные. Соответствующий член (6.2) описывает, следовательно, спектральную перекачку ленгмюровских волн из-за их распадов на звуковые волны, находящиеся в области частых соударений $\omega_j \ll \nu_e, \nu_i$ и определяемые дисперсионным уравнением

$$\epsilon_e(k_-) + \epsilon_i(k_-) = 0 . \tag{6.3}$$

Отметим, что как спектр "столкновительного" звука плазмы, так и спектральная перекачка из-за распадов ленгмюровских волн на такой звук может быть легко получена с помощью результатов (2.43), (3.5). В таком процессе перекачки $\omega_- = k v_s$ и по порядку $\omega_- \approx k_- v_{Ti}$. Использованное выше условие $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$ не носит принципиального характера. Нетрудно выписать также формулы для изменения дисперсии и спектральной перекачки при $\omega_- = k v_s$ и $\omega_- \gg k_- v_{Ti}$. Однако условие $\omega_- \ll k_- v_{Te}$ является весьма существенным, т.е. при его нарушении весь расчет должен быть сделан заново развитым выше методом, при этом следует решать (2.11) без выделения члена (2.10), который в этих условиях уже не мал. Нарушение условия $\omega_- \ll k_- v_{Te}$, естественно, возможно лишь в том случае, если нелинейное изменение дисперсии ленгмюровских волн весьма велико.

Наконец, при $T_e \gg T_i$ существует широкая область значений волновых чисел турбулентных пульсаций, для которых

$$\nu_e \ll k_- v_{Te} \quad , \quad \nu_i \gg k_- v_{Ti} . \tag{6.4}$$

В этом случае можно воспользоваться известными выражениями для S_1 и S_2 бесстолкновительной плазмы, а для $\epsilon_i(k_-)$ величиной (2.43). Полученный эффект изменения направления спектральной перекачки имеет важное значение с точки зрения многих вопросов, в частности, в проблеме эффективности турбулентного нагрева плазмы, эффективности взаимодействия пучков с плазмой и др. Помимо этих вопросов, связанных с разнообразными приложениями обнаруженного эффекта изменения спектральной перекачки, следует обратить внимание на то, что увеличение интенсивности перекачки на малые ω_-, для которых следует учитывать соударения, может изменить общие оценки эффективности нелинейных взаимодействий.

Л и т е р а т у р а

1. Б.Б. Кадомцев. Вопросы теории плазмы, т. 4, М., Атомиздат, 1964.

2. В.Н. Цитович. УФН, 90, 435 (1966).

3. А.А. Галеев, В.Н. Карпман, Р.З. Сагдеев. Ядерн. синтез. 5, 20 (1965).

4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Мех. сплошн. сред. ГИТТЛ, 1954.

5. В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович. ЖТФ, XXXVII, №8, 1967.

6. Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 7, 203 (1937).

7. С.Л. Мандельштам, П.П. Пашинин, А.М. Прохоров и др. ЖЭТФ, 47, 2003 (1964).

8. В.Л. Силин, А.А. Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Атомиздат, 1961.

9. С. Чепмен, Т. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М., ИЛ, 1960.

10. С.И. Брагинский. Вопросы теории плазмы, т. 1, М., Атомиздат, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июня 1967 г.