ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 3373 - 2

В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН И ИОН-ИОННЫЕ СОУДАРЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1967.

Р9 - 3373 - 2

В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН И ИОН-ИОННЫЕ СОУДАРЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

§ 1. Введение

В настоящее время теория взаимодействия ленгмюровских волн в турбулентной плазме без учета кулоновских соударений частиц разработана весьма подробно[1]. В работах авторов[2,3] было обращено внимание на то, что парные соударения частиц могут заметно изменить нелинейные взаимодействия в случае, когда разность частот взаимодействующих волн намного меньше эффективной частоты соударений

$$|\omega_-| = |\omega_1 - \omega_2| \ll \nu \qquad (1.1)$$

Разработанная в[2] теория показала, что если наряду с (1.1) выполнены неравенства

$$|\vec{k}_-| v_{Te} \ll \nu_e \; ; \; |\vec{k}_-| v_{Ti} \ll \nu_i$$

(где $\vec{k}_- = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ -разность волновых векторов взаимодействующих волн, v_{Te} и v_{Ti}, соответственно, тепловые скорости электронов и ионов, ν_e и ν_i – эффективные частоты соударений, соответственно, электронов со всеми частицами и ионов со всеми частицами), то нелинейные взаимодействия меняются коренным образом; в частности, изменяется направление спектральной перекачки, а спектральная перекачка носит характер нелинейной неустойчивости гидродинамического типа в противоположность перекачке в отсутствие соударений, которая имеет характер нелинейной неустойчивости кинетического типа. Настоящая работа посвящена подробному анализу нелинейных взаимодействий ленгмюровских волн при выполнении неравенств

$$\frac{\nu_i}{v_{Ti}} \gg |\vec{k}_-| \gg \frac{\nu_e}{v_{Te}} . \tag{1.3}$$

Если угол между взаимодействующими пульсациями не мал, то $|\vec{k}_-|$ порядка $k_1 \approx k_2 \approx \frac{\omega_{0e}}{v_\Phi}$. Так как $\nu_i \approx \nu_e \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}$, а $\frac{\omega_{0e}}{\nu_e}$ порядка N_d –числа частиц в дебаевской сфере, то (1.3) означает

$$\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2 N_D \ll \frac{v_\Phi}{v_{Te}} \ll N_D . \tag{1.4}$$

Здесь $v_\Phi = \frac{\omega_{0e}}{k}$ –характерная фазовая скорость взаимодействующих волн. Область (1.4) весьма широка в неизотермической плазме.

$$T_e \gg T_i . \tag{1.5}$$

Если нелинейное изменение дисперсии ленгмюровских волн мало, то условие (1.1) в данном случае означает

$$\frac{\Delta k\, k\, v_{Te}^2}{\omega_{0e}} \ll \nu_i \approx \nu_e \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} , \tag{1.6}$$

или при $\Delta k \approx k$

$$\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \gg N_D^{1/2} , \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/4} . \tag{1.7}$$

Совместно с (1.4) это дает

$$N_D \gg \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} . \tag{1.8}$$

В силу $T_e \gg T_i$ последнее условие обычно всегда выполняется (т.к. $N_D \gg 1$) и, следовательно, имеется широкая область параметров, для которых выписанные неравенства выполняются. Условие (1.6) может выполняться и в случае, когда (1.7) нарушено, если:

$$\frac{\Delta k}{k} \ll \frac{1}{N_D} \frac{v_\text{ф}^2}{v_{Te}^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} , \tag{1.9}$$

т.е. перекачка происходит на $\Delta k \ll k$. Это показывает, что в процессах спектральной перекачки на малые Δk соударения всегда существенны. Если же рассматривать процессы спектральной перекачки не на угол порядка единицы, а на малый угол, то k_- –порядка Δk и условие (1.3) означает

$$\frac{1}{N_D} \frac{v_\text{ф}}{v_{Te}} \ll \frac{\Delta k}{k} \ll \frac{v_\text{ф}}{v_{Te}} \frac{1}{N_D} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^2 , \tag{1.10}$$

т.е. накладывает ограничение не на значение фазовых скоростей, а на величину $\frac{\Delta k}{k}$. Ниже показывается, что учет ион–ионных соударений может намного увеличить эффективность нелинейных взаимодействий. Это означает, что при перекачке на угол порядка единицы, например, для $N_D \approx 10^2$ и $\frac{T_e}{T_i} \approx 10$ полученные результаты применимы для $1 \ll \frac{v_\text{ф}}{v_{Te}} \ll 10^2$, т.е. в весьма широкой области фазовых скоростей, начиная с минимально возможных $v_\text{ф}$ порядка v_{Te}. С ростом N_D нижняя граница (1.4) отодвигается и возникает область значений $v_\text{ф}$, в которой ион–ионные соударения при рассеянии на угол порядка единицы роли не играют. Однако при перекачке на малые углы соударения, согласно (1.10), могут сказаться, и, если эффективность перекачки высока, то возможна такая ситуация, когда в результате многократной перекачки каждый раз на малый угол и малое Δk турбулентные пульсации будут перекачаны на угол порядка единицы и Δk порядка k. Такая эстафетная перекачка при учете соударений может оказаться более эффективной нежели однократная перекачка на угол порядка единицы и $\Delta k \approx k$ без учета соударений. Именно в этой ситуации учет соударений приобретает принципиальный характер, и, следовательно, без учета соударений нельзя составить представления даже о порядках величин нелинейных взаимодействий.

Естественно, при очень больших N_D ($N_D \to \infty$) исследуемая область (1.4) смещается в область столь высоких частот, что учет соударений при перекачке даже эстафетного характера оказывается ненужным, и в этом случае справедливы результаты [1]. Однако в конкретных условиях, встречающихся в лабораторных экспериментах, величина N_D часто не очень велика (в отличие от астрофизических условиях, например, межзвездной плазмы). Поэтому в оценках, например, стабилизации пучковых неустойчивостей [4] из-за нелинейных взаимодействий и других эффектах учет соударений в нелинейном взаимодействии может быть весьма существенным. Полученные результаты будут иметь приложение также для проблемы взаимодействия волн в относительно плотной плазме, создаваемой лазерной искрой [5], и др. проблем.

В настоящей работе получены конкретные критерии, позволяющие оценить влияния соударений ионов на нелинейные взаимодействия в зависимости от плотности и температуры и других параметров плазмы.

§ 2. Общие соотношения

Рассмотрим нелинейное дисперсионное уравнение для ленгмюровских волн [2,3]

$$\omega_1 - \omega^{\ell}(\vec{k}_1) = \int \Sigma'(k_1, k_2) |E_{\vec{k}_2}|^2 d\vec{k}_2 , \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma'(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = 2\pi i \{ & \Sigma(k_1, k_2, k_1, -k_2) + \Sigma(k_1, k_2, -k_2, k_1) - \\ & - \frac{8\pi i}{\omega_- \epsilon(k_-)} S_1(k_-, k_1, -k_2) S_2(k_1, k_2, k_-) \}_{\substack{\omega_1 = \omega^{\ell}(\vec{k}_1) \\ \omega_2 = \omega^{\ell}(\vec{k}_2)}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

здесь $k = \{\vec{k}, \omega\}$, S и Σ -нелинейные поляризуемости плазмы, характеризующие нелинейные токи второго и третьего порядка по электрическому полю взаимодействующих волн

$$j_k^{(2)} = \int S(k, k_2, k_1) \delta(k - k_1 - k_2) E_{k_1} E_{k_2} dk_1 dk_2 \tag{2.3}$$

$$j_k^{(3)} = \int \Sigma(k, k_1, k_2, k_3)\,\delta(k-k_1-k_2-k_3)\,E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3}\, dk_1\, dk_2\, dk_3\,. \qquad (2.4)$$

Наконец, $\epsilon(k)$ –есть продольная диэлектрическая проницаемость плазмы.

В уравнении (2.2) учтен лишь процесс взаимодействия через виртуальную продольную волну (об обычно малом взаимодействии через виртуальные поперечные волны см. /1/). Заметим, что при выполнении $|\vec{k}_-| v_{Te} \gg \nu_e$ соударения электронов не сказываются на величинах S, Σ, ϵ. Учитывая кроме того, что из-за наличия высоких степеней m в знаменателях S и Σ в этих выражениях следует учитывать лишь электронные вклады, мы видим, что при принятых условиях S и Σ соответствуют бессоударительному случаю, а ион-ионные соударения сказываются лишь на ϵ. Величина ϵ с учетом ион-ионных соударений при $|\vec{k}_-| v_{Ti} \ll \nu_i$ и $\omega_- \ll \nu_i$, $|\vec{k}_-|\, v_{Te}$ имеет вид (см. /3/).

$$\epsilon(k_-) = 1 + \epsilon^e(k_-) + \epsilon^i(k_-), \qquad (2.5)$$

где $\epsilon^e(k_-)$ и $\epsilon^i(k_-)$ вклады электронов и ионов в полную $\epsilon(k_-)$ соответственно

$$\epsilon^i(k_-) = -\frac{\omega_{0i}^2/\omega_-}{\omega_- - \dfrac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_-} - \dfrac{2}{3}\,\dfrac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\omega_- + 2{,}6 i\,\dfrac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i}} + 1{,}28 i\,\dfrac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i}} \qquad (2.6)$$

$$\epsilon^e(k_-) = \frac{\omega_{0e}^2}{k_-^2 v_{Te}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega_-}{k_- v_{Te}}\exp\left\{-\frac{\omega_-^2}{2k_-^2 v_{Te}^2}\right\}\right). \qquad (2.7)$$

Общие выражения для функций S_1, S_2 и Σ приведены в /1/, в интересующем нас пределе $(\omega_-/k_- v_{Te}) \ll 1$ они имеют приближенный вид

$$S_1(k_-, k_1, -k_2) = -\frac{1}{8\pi}\,\frac{e}{m_e}\,\frac{\omega_-(\vec{k}_1 \vec{k}_2)}{k_- k_1 k_2 v_{Te}^2} \qquad (2.8)$$

$$S_2(k_1, k_2, k_-) = \frac{1}{8\pi}\,\frac{e}{m_e}\,\frac{\omega_{0e}(\vec{k}_1\vec{k}_2)}{k_- k_1 k_2 v^2_{Te}} \tag{2.9}$$

$$\frac{8\pi i}{\omega_-} S_1 S_2 \frac{1}{\epsilon^e(k_-)} = \Sigma(k_1, k_2, k_1, -k_2) + \Sigma(k_1, k_2, -k_2, k_1). \tag{2.10}$$

Подставляя эти выражения в (2,2), получаем

$$\Sigma'(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = -\frac{1}{4}\,\frac{e^2}{m_e^2}\,\frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2\,\omega_{0e}}{k_-^2 k_1^2 k_2^2 v^4_{Te}}\,\frac{\epsilon^1(k_-)}{\epsilon^0(k_-)[\epsilon^e(k_-)+\epsilon^1(k_-)]}\,. \tag{2.11}$$

Заметим, что в S_1 и S_2 (а также Σ) мы пренебрегли мнимыми частями, связанными как с бессоударительной диссипацией, так и с электронными соударениями. Первые из них вместе с $\mathrm{Jm}\,\epsilon^e(k_-)$ в отсутствие соударений приводят к рассеянию на электронах. С другой стороны, даже в бесстолкновительной плазме рассеяние на ионах является преобладающим в случае больших фазовых скоростей, а именно: в области больших фазовых скоростей (см.(1.4)) существенен учет ион-ионных соударений. Поэтому мы в первую очередь учтем эффекты, возникающие от мнимых частей ϵ^1, связанных с ион-ионными соударениями. Эти эффекты аналогичны процессам рассеяния на ионах в бесстолкновительном случае. Вместе с тем имеется одно качественно важное отличие, состоящее в том, что в бесстолкновительной плазме мнимые части ϵ^1 пропорциональны $\exp\{-\omega_-^2/2k_-^2 v^2_{T1}\}$ и весь эффект взаимодействия оказывается малым при $\omega_- \gg k_- v_{T1}$. Наличие величины $\exp(-\omega_-^2/2k_-^2 v^2_{T1})$ в нелинейном взаимодействии имеет простой физический смысл: интенсивность взаимодействия пропорциональна числу ионов, которые могут принимать участие в рассеянии. В рассматриваемом здесь случае, когда существенны ион-ионные соударения, указанный экспоненциальный обрыв взаимодействия отсутствует, и эффекты, связанные с мнимой частью $\epsilon^1(k_-)$, описывают взаимодействие без каких-либо ограничений на фазовые скорости волн. С этим, в частности, связана возможность увеличения эффективности нелинейного взаимодействия для волн малых фазовых скоростей. Поэтому ниже эффектами рассеяния на электронах в первом приближении пренебрегается. В дальнейшем, однако, производится относительное сравнение полученных результатов с эффектами рассеяния на электронах, а также обсуждается эффект изменения интенсивности такого рассеяния из-за наличия ион-ионных соударений. Заметим, что эффекты взаимодействия с ионами не могут быть в данном случае интерпретированы как эффекты рассеяния, т.к. выполнение условия $\omega_- = \vec{k}_- \vec{v}$ не является при учете ионных соударений существенным.

§ 3. Влияние ион-ионных соударений на спектральную перекачку ленгмюровских волн

Выпишем выражение для мнимой части $\omega - \omega_{0e}$ (см. (2.1), определяющей интенсивность спектральной перекачки при пренебрежении $\mathrm{Jm}\,\epsilon^e(k_-)$,

$$\frac{1}{|E_{\vec{k}_1}|^2}\frac{\partial}{\partial t}|E_{\vec{k}_1}|^2 = \gamma_{\vec{k}_1} = \mathrm{Jm}\,(\omega_1 - \omega^\ell(\vec{k}_1))$$

$$\gamma_{\vec{k}_1} = -\frac{\omega_{0e}^3}{16\pi n_0 T_e}\int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2 |E_{\vec{k}_2}|^2\,\mathrm{Jm}\,\epsilon^i(k_-)\,d\vec{k}_2}{k_1^2 k_2^2 |\vec{k}_-|^2 v_{Te}^2 |\epsilon^e(k_-)+\epsilon^i(k_-)|^2}. \tag{3.1}$$

1. Рассмотрим конкретные виды нелинейных взаимодействий в некоторых предельных случаях. Пусть $\omega_- \gg |\vec{k}_-| v_{Ti}$. Это соответствует приближению, когда рассеяние на ионах в бессоударительном случае отсутствует. При учете соударений ($\nu_i \gg |\vec{k}_-| v_{Ti}$) и при $\omega_- \gg |\vec{k}_-| v_{Ti} (T_e/T_i)^{1/2}$, т.е. при $\theta \approx 1$ и при

$$v_\phi \ll v_{Te}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \tag{3.2}$$

имеем

$$\gamma_{\vec{k}_1} = -\frac{1{,}28\,\omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e}\int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}|E_{\vec{k}_2}|^2 \frac{|\vec{k}_-|^3 v_{Ti}^3}{\omega_-^2}\frac{|\vec{k}_-| v_{Ti}}{\nu_i}\,d\vec{k}_2. \tag{3.3}$$

В тех же условиях нелинейное взаимодействие при рассеянии на электронах имеет вид /1/

$$\gamma_{\vec{k}_1} = -\frac{\sqrt{2\pi}\,\omega_{0e}}{4\pi n_0 T_e} \int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2 [\vec{k}_1 \vec{k}_2]^2 v_{Te}^2 \omega_- |E_{\vec{k}_2}|^2}{k_1^2 k_2^2 |k_-|^2 \omega_{0e}^2 |\vec{k}_-| v_{Te}} d\vec{k}_2 , \tag{3.4}$$

при

$$v_ф \ll v_{Te} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3}$$

и

$$\gamma_{\vec{k}_1} = -\frac{\sqrt{2\pi}\,\omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e} \int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2 |\vec{k}_-|^3 v_{Te}^3 |E_{\vec{k}_2}|^2}{k_1^2 k_2^2 \omega_-^3} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 d\vec{k}_2 , \tag{3.5}$$

при

$$v_{Te} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3} \ll v_ф \ll v_{Te} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} .$$

Отсюда следует, что (3.3) доминирует над (3.4) при

$$\frac{v_ф}{v_{Te}} \gg \left(\frac{1}{N_D}\right)^{1/5} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{3/10} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} .$$

Вместе с (3.2) получим, что область, где соударение доминирует, не исчезает при

$$N_D \ggg \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2} . \tag{3.6}$$

Сравнивая (3.3) с (3.5) , получим

$$\frac{v_ф}{v_{Te}} \ll N_D \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} , \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2} . \tag{3.7}$$

Вместе с условием $\frac{v_\phi}{v_{Te}} \gg (\frac{m_i}{m_e})^{1/3}$ это дает

$$N_D \gg (\frac{T_e}{T_i})^{5/2} (\frac{m_e}{m_i})^{1/6}$$

Условие доминирования спектральной перекачки (3,3) над затуханием из-за парных соударений имеет вид

$$1 \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{1}{N_D^2} \frac{v_{Te}^2}{v_\phi^2} (\frac{T_e}{T_i})^{7/2} (\frac{m_i}{m_e})^{3/2}$$

$$= [\frac{1}{N_D^2} (\frac{T_e}{T_i})^4 (\frac{v_\phi}{v_{Te}})^2 (\frac{v_{Te}}{v_\phi})^4 (\frac{m_i}{m_e})^2] (\frac{T_i m_e}{T_e m_i})^{1/2} . \qquad (3.8)$$

$W = \int |E_{\vec{k}}|^2 d\vec{k}$ – полная энергия шумов.

Выражение в квадратных скобках в силу (3.2) (1.4) всегда велико. Поэтому (3.8) выполняется лишь в том случае, когда малый множитель $(\frac{T_i m_e}{T_e m_i})^{1/2}$ компенсирует этот большой множитель. В частности, (3.8) совместно с (1.4) дает еще одно необходимое условие существования области, в которой проявляется взаимодействие (3.3)

$$\frac{v_\phi}{v_{Te}} \gg (\frac{T_i}{T_e})^{1/8} (\frac{m_i}{m_e})^{3/8} .$$

Условие (3.8) существенно облегчается в области

$$\frac{v_\phi}{v_{Te}} \gg (\frac{m_i}{m_e})^{1/3} .$$

2. Рассмотрим теперь нелинейное взаимодействие в случае, когда

$$(\frac{T_e m_i}{T_i m_e})^{1/2} \gg \frac{v_\phi}{v_{Te}} \gg \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} . \qquad (3.9)$$

Имеем из (3.1)

$$\gamma_{\vec{k}_1} = -\frac{1{,}28\,\omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e}\int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2\, T_i\, \omega_-}{k_1^2 k_2^2\, T_e\, \nu_i}\,|E_{\vec{k}_2}|^2\, d\vec{k}_2 . \qquad (3.10)$$

Этот результат также целесообразно сравнить с эффектом рассеяния на электронах, который описывается формулой [1]

$$\gamma_{\vec{k}_1} = -\frac{\sqrt{2\pi}\,\omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e}\int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2\, \omega_-}{k_1^2 k_2^2 |\vec{k}_-|\, v_{Te}}\,|E_{\vec{k}_2}|^2\, d\vec{k}_2 . \qquad (3.11)$$

Из сравнения (3.11) и (3.10) получим критерий доминирования найденного здесь нелинейного взаимодействия (3.10)

$$\frac{v_ф}{v_{Te}} \ll \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} N_D . \qquad (3.12)$$

Сравнивая (3.12) с (3.9) получим, что область, где соударения существенны, не равна нулю всегда, если

$$N_D \gg \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2} . \qquad (3.13)$$

Условие доминирования взаимодействия (3.10) над затуханием из-за соударений имеет вид

$$1 \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{1}{N_D}\frac{v_{Te}^2}{v_ф^2}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2} , \qquad (3.14)$$

т.е.

$$N_D \gg \frac{v_{Te}}{v_ф}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/4} . \qquad (3.15)$$

В данном случае область выполнения (3.14) (3.15) весьма широка.

Подчеркнем, что все проведенные сравнения не учитывали возможности эстафетной перекачки, которая может лишь расширить область применимости полученных формул.

3. Рассмотрим теперь нелинейные взаимодействия при $v_ф \gg v_{Te}(T_e m_i/T_i m_e)^{1/2}$ или точнее $\omega_- \ll |\vec{k}_-| v_{Ti}$. Нелинейные взаимодействия в этом случае оказываются различным в зависимости от того, выполнено или нет следующее неравенство

$$\omega_- \gg \frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i}. \tag{3.16}$$

При выполнении (3.14) столкновительная перекачка определяется инкрементом

$$\gamma_{\vec{k}_1} = -\frac{1{,}73\ \omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e}\int\frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2 k_-^2 v_{Ti}^2 T_i}{k_1^2 k_2^2 \omega_- \nu_i T_e}|E_{\vec{k}_2}|^2 d\vec{k}_2 . \tag{3.17}$$

Сравнение интенсивности нелинейного взаимодействия (3.17) с соответствующим бессоударительным инкрементом спектральной перекачки при рассеянии на ионах

$$\gamma = -\frac{\sqrt{2\pi}\,\omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e}\int\frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2\omega_- T_i}{k_1^2 k_2^2 k_- v_{Ti} T_e}|E_{\vec{k}_2}|^2 dk_2 \tag{3.18}$$

показывает, что существует довольно широкая область фазовых скоростей, определяемая неравенствами

$$\begin{gathered} N_D \gg \frac{v_ф}{v_{Te}} \gg \frac{1}{N_D}\frac{m_i}{m_e}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^3 \\ \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/2} \ll \frac{v_ф}{v_{Te}} \ll \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \\ \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \ll N_D \ll \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}, \end{gathered} \tag{3.19}$$

где определяющим является нелинейное взаимодействие с учетом ион-ионных столкновений.

Взаимодействие (3.17) доминирует над затуханием из-за соударений, если

$$1 \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{1}{N_D^2} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2}, \qquad (3.20)$$

что находится в согласии с (3.19) при $\left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/4} \gg 1$.

4. Рассмотрим нелинейное взаимодействие при

$$v_ф \gg v_{Te} \sqrt{\frac{T_e m_i}{T_i m_e}}$$

$$\omega_- \ll \frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i} \qquad (3.21)$$

или

$$N_D \gg \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{5/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}. \qquad (3.22)$$

Из (3.1) получим

$$\gamma_{\vec{k}_1} = - \frac{0{,}06\, \omega_{0e}}{4\pi n_0 T_e} \int \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2 \nu_i \omega_- T_i}{k_1^2 k_2^2 k_-^2 v_{Ti}^2 T_e} |E_{\vec{k}_2}|^2 d\vec{k}_2 . \qquad (3.23)$$

Это взаимодействие всегда превосходит бесстолкновительное (3.18) при выполнении (1.4). Инкремент взаимодействия (3.23) превосходит ν_e, если

$$1 \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}. \qquad (3.24)$$

§ 4. Влияние ион-ионных соударений на нелинейные дисперсионные свойства ленгмюровских волн

Из (2.1) нетрудно получить нелинейные поправки к действительной части частоты ленгмюровских колебаний, описывающие эффекты изменения их дисперсионных свойств из-за нелинейных взаимодействий

$$\delta\omega = \mathrm{Re}\,(\omega - \omega^{l}(\vec{k}_1)) =$$

$$= -\frac{\omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e}\int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}|E_{\vec{k}_2}|^2\,\mathrm{Re}\,\frac{\epsilon^{i}(k_-)\,d\vec{k}_2}{\epsilon^{e}(k_-)+\epsilon^{i}(k_-)}. \tag{4.1}$$

1. Если

$$\omega_- \gg k_- v_{Te}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \tag{4.2}$$

то вклад ион-ионных соударений пренебрежимо мал и из (4.1) следует

$$\delta\omega = \frac{\omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e}\frac{m_e}{m_i}\int \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2 k_-^2 v_{Te}^2}{k_1^2 k_2^2\,\omega_-^2}|F_{\vec{k}_2}|^2\,d\vec{k}_2. \tag{4.3}$$

Нелинейные поправки, как следует из оценки рассеяния (4.3), превалируют над дисперсией ленгмюровских волн из-за теплового движения при

$$1 \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{m_i}{m_e}\left(\frac{v_{Te}}{v_ф}\right)^4, \tag{4.4}$$

т.е. во всяком случае при $\dfrac{v_ф}{v_{Te}} \gg \left(\dfrac{m_i}{m_e}\right)^{1/4}$.

Следовательно, полученный выше результат (3.3) справедлив, если

$$\frac{W}{n_0 T_e} \ll \frac{m_i}{m_e}\left(\frac{v_{Te}}{v_ф}\right)^4. \tag{4.5}$$

Совместно с (3.8) и (1.4) это означает, что

$$\frac{v_ф}{v_{Te}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \gg N_D \gg \frac{v_ф}{v_{Te}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{7/4}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} \tag{4.6}$$

или $\frac{T_e}{T_i} \gg \frac{m_i}{m_e}$. При выполнении условия обратного (4,5) необходимо решать уравнение (4.3), которое по своей структуре совпадает с ранее исследованным авторами уравнением (5.10) работы /3/. Исходя из этой аналогии, можно утверждать, что уравнение (4.3) описывает нелинейное взаимодействие, приводящее к дроблению масштаба турбулентных пульсаций, при этом уровень энергии этих пульсаций должен быть достаточно высоким см. (4.4). Инкремент этого процесса имеет порядок

$$\gamma \approx \omega_{0e} \left(\frac{W}{n_0 T_e}\right)^{1/3} \left(\frac{v_{Te}}{v_\phi}\right)^{2/3} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}. \tag{4.7}$$

Именно этот инкремент следует сравнивать с (3.3), который при подстановке (4.7) имеет оценку

$$\gamma_\nu \approx \omega_{0e} N_D \left(\frac{v_{Te}}{v_\phi}\right)^2 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2}. \tag{4.8}$$

В результате $\gamma_\nu > \gamma$, если

$$N_D \gg \left[\frac{W}{n_0 T_e} \left(\frac{v_\phi}{v_{Te}}\right) \frac{m_e}{m_i}\right]^{1/3} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2}, \tag{4.9}$$

учитывая также условие (1.4), имеем

$$\frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{v_{Te}}{v_\phi} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2}. \tag{4.10}$$

Вместе с неравенством (4.4) это дает $\frac{v_\phi}{v_{Te}} \gg \sqrt{\frac{m_i T_e}{m_e T_i}}$, что противоречит условию $\omega_- > k_- v_{Te} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. Таким образом, в области, определяемой неравенствами (4.4) и (4.2), гидродинамическая нелинейная неустойчивость превалирует над кинетической.

2. Перейдем к рассмотрению нелинейных поправок к дисперсии и их влияния на рассмотренные выше процессы перекачки в условиях противоположных (4.2). Заметим, что существенное изменение дисперсионных свойств ленгмюровских колебаний происходит лишь при изотропной турбулентности, что отмечалось авторами в /2/. В области $\omega_- \gg k_- v_{Ti}$ из (4.1) получим, что ион-ионные соудерения слабо сказываются на нелинейных поправках к дисперсии ленгмюровских волн:

$$\omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2} =$$

$$= \frac{\omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e} \int \left[\frac{(k_1 k')^2 \, (\omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}'})^2}{k_1^2 k'^2 v_{Te}^2 |\vec{k}_1 - \vec{k}'|^2} - \frac{(\vec{k}_2 \vec{k}')^2 (\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'})^2}{k_2^2 k'^2 v_{Te}^2 |\vec{k}_2 - \vec{k}'|^2} \right] \frac{m_i}{m_e} |E_{\vec{k}'}|^2 \, d\vec{k}' \qquad (4.11)$$

Из (4.11) получаем, что изменение дисперсионных свойств ленгмюровских волн в данной области происходит в условиях

$$\frac{m_e}{m_i} \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \, \frac{v_{Te}}{v_ф}, \qquad (4.12)$$

при этом ω_- имеет порядок

$$\omega_- \approx \omega_{0e} \, \frac{n_0 T_e}{W} \, \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{v_{Te}}{v_ф} \right)^2 . \qquad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (3.10), получим, что инкремент (3.10) заметно возрастает и имеет порядок

$$\gamma \approx \omega_{0e} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{5/2} N_D \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(\frac{v_{Te}}{v_ф} \right)^2 . \qquad (4.14)$$

Для того, чтобы инкремент (4.14) превосходил ν_e, необходимо

$$N_D \gg \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{5/4} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4} \frac{v_ф}{v_{Te}}. \qquad (4.15)$$

Совместно с условием (1.4) это означает, что

$$\frac{T_e}{T_i} \gg \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/3} . \qquad (4.16)$$

Таким образом, в рассмотренном пределе имеется широкая область параметров, где существенны ион-ионные соударения в перекачке и несущественно изменение дисперсии, а также широкая область параметров, где изменение дисперсии влияет на столкновительную перекачку.

3. Перейдем к рассмотрению нелинейных поправок к дисперсии в области $\omega_- \ll k_- v_{Ti}$. Если, кроме того,

$$\omega_- \ll \frac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i}, \tag{4.17}$$

то

$$\delta\omega = \frac{2/3\,\omega_{0e}}{(2,6)^2 n_0 T_e} \int \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \frac{m_i \omega_-^2 \nu_e}{m_e k_-^4 v_{Te}^4} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^3 |E_{\vec{k}_2}|^2 d\vec{k}_2 . \tag{4.18}$$

Здесь отброшены все члены, выпадающие из разности частот ленгмюровских колебаний в случае изотропной турбулентности. Полученный результат справедлив при выполнении неравенства

$$\frac{\omega_-^2 \nu_e m_i}{k_-^3 v_{Te}^3 m_e} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^3 \gg 1. \tag{4.19}$$

Последнее соотношение получено из сравнения с поправками к дисперсии из-за электронных соударений, найденных в работе /2/. Сравнение (4.17) и (4.19) показывает, что изменение дисперсии в рассматриваемой области определяется электронными соударениями: при этом, согласно /2/, порядок величины $\delta\omega$ есть

$$\delta\omega \approx \frac{W}{n_0 T_e} \frac{1}{N_D} \frac{v_\phi}{v_{Te}} \omega_{0e} , \tag{4.20}$$

и, следовательно, инкремент спектральной перекачки при

$$1 \gg \frac{W}{n_0 T_e} \gg N_D \left(\frac{v_{Te}}{v_\phi}\right)^3 \tag{4.21}$$

имеет порядок (см. 3.23)

$$\gamma \approx \omega_{0e} \left(\frac{W}{n_0 T_e}\right)^2 \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{v_\phi^3}{v_{Te}^3} \frac{1}{N_D^2} . \tag{4.22}$$

Сравнивая (4.22) с ν_e видим, что $\gamma \gg \nu_e$ при выполнении условий

$$\frac{v_\phi}{v_{Te}} \ll N_D \ll \left(\frac{v_\phi}{v_{Te}}\right)^3 \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{W}{n_0 T_e}\right)^2 , \tag{4.33}$$

что обычно легко выполняется.

4. Рассмотрим теперь изменение дисперсии ленгмюровских волн при выполнении неравенства противоположного (4.17). Согласно (4.1) имеется для вклада в ω_- – при изотропной турбулентности

$$\delta\omega = -\frac{2}{3}\frac{(2{,}6)^2\omega_{0e}}{16\pi n_0 T_e}\int\frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)^2 k_-^4 v_{Ti}^4 T_i}{k_1^2 k_2^2 \nu_i^2 \omega_-^2 T_e}|E_{\vec{k}_2}|^2 d\vec{k}_2 . \tag{4.34}$$

Этот результат справедлив при пренебрежении вкладом электронных соударений (см.[2]), когда

$$\omega_-^2 \ll \frac{T_i}{T_e}\frac{k_-^4 v_{Te}^4}{\nu_i^2}\frac{k_- v_{Te}}{\nu_e} . \tag{4.35}$$

Это неравенство вместе с $\omega_- \gg \dfrac{k_-^2 v_{Ti}^2}{\nu_i}$ и (1.4) дает

$$\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \gg N_D \frac{v_{Te}}{v_\phi} \gg \frac{T_e}{T_i} . \tag{4.36}$$

Уравнение, получаемое из (4.34), описывает нелинейную диссипативную неустойчивость, которая так же как и в[3] соответствует спектральной перекачке, имеющей направление, противоположное бессоударительному пределу (см.[3]), т.е. происходит дробление масштабов турбулентности. Для того чтобы это имело место, необходимо, чтобы инкремент гидродинамической неустойчивости, получаемый из (4.34), и имеющий порядок

$$\gamma \approx \omega_{0e}\left(\frac{W}{n_0 T_e}\right)^{2/3}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}\left(\frac{v_{Te}}{v_\phi}\right)^{1/3} N_D^{2/3} , \tag{4.37}$$

был больше кинетического (3.17). Это имеет место при

$$\frac{W}{n_0 T_e} \ll N_D \left(\frac{v_{Te}}{v_\phi}\right)^2 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} . \tag{4.38}$$

С другой стороны, для того чтобы нелинейная дисперсия была больше тепловой, необходимо, согласно (4.37), чтобы

$$\frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{1}{N_D^2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^6 \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{v_{Te}}{v_\phi}\right)^2 . \tag{4.39}$$

Неравенства (4.38),(4.39) совместны при

$$\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \frac{v_\phi}{v_{Te}} \gg N_D \gg \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{5/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} . \tag{4.40}$$

Этот анализ показывает, что существует широкая область возникновения нелинейной диссипативной неустойчивости, описывающей дробление масштабов турбулентности. Вместе с тем и нелинейная кинетическая неустойчивость (3.17) возможна в достаточно широкой области. Наконец, следует отметить, что условие $\gamma > \gamma_e$ не является для возникновения нелинейной диссипативной неустойчивости определяющим (см. /3/).

§ 5. Обсуждение результатов

1. Таким образом, учет ион-ионных соударений коренным образом изменяет нелинейное взаимодействие в области, определяемой (1.4).

1. Такие взаимодействия оказываются значительно более эффективными, нежели взаимодействия без учета столкновений. Следовательно, экстраполяция результатов бесстолкновительной теории в эту область является незаконной.

2. С нашей точки зрения весьма существенным является то обстоятельство, что в области (1.4) зависимость нелинейных взаимодействий от плотности плазмы совершенно иная, чем это имело место в бесстолкновительной теории.

Такая зависимость может проявиться при нелинейной стабилизации пучковой неустойчивости в неизотермической плазме, если ее плотность попадает в область (1.4). При этом в силу того, что эффективность нелинейных взаимодействий возросла, эффекты стабилизации могут наблюдаться при относительно малой скорости пучков, кроме того, критерий стабилизации будет зависеть от плотности плазмы, тогда как в бесстолкновительном случае такая зависимость отсутствует [4]. Это указывает на то, что, согласно развиваемым теоретическим представлениям, эффективность взаимодействия пучков с плазмой должна быть определенной функцией плотности последней. Существенная зависимость эффективности взаимодействия пучков с плазмой от ее плотности наблюдалась в экспериментах [6] и до сих пор не находила объяснения. Мы надеемся, что развитые соображения будут полезны при анализе указанных экспериментальных работ.

3. Полученные результаты позволяют также оценить эффективность эстафетной перекачки на величину k_-, удовлетворяющую условию $k_- v_{Ti} > \nu_i$, в то время, как k_- на каждом этапе такой перекачки удовлетворяет обратному условию.

4. В заключение следует особо подчеркнуть, что обнаруженный эффект изменения направления спектральной перекачки в условиях гидродинамической нелинейной столкновительной неустойчивости имеет существенное значение с точки зрения общей теории турбулентной плазмы.

Литература

1. В.Н. Цытович. УФН 90, 435, 1966.
2. В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович. ЖТФ № 8, XXXVII (1967).
3. В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович. Препринт ОИЯИ Р9-3373-2, Дубна 1967.
4. В.Н. Цытович, В.Д. Шапиро. Ядерный синтез, 5, 228 (1965).
5. С.Л. Мандельштам, П.И. Пашинин, А.М. Прохоров и др. ЖЭТФ, 47, 2003 (1964).
6. Я.Б. Файнберг. Сб. Пучки частиц № 2, изд. ХГУ, 1965-1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 июня 1967 г.