

СООБЩЕНИЯ Объединенного института ядерных исследований дубна

818 2-80

25 2-80 P9 - 12830

П.Ф.Белошицкий, Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн, Б.Г.Щинов

20

О КОМПРЕССОРЕ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ С ВЫСОКОЙ ЦИКЛИЧНОСТЬЮ



Белошицкий П.Ф. и др.

# 0 компрессоре электронных колец с высокой цикличностью

Обсуждается вариант компрессора электронных колец с высокой цикличностью. Компрессия осуществляется при продвижении кольца волной импульсного магнитного поля в нарастающее статическое поле. Методом численного моделирования проведено исследование динамики сжатия кольца в суммарном магнитном поле с учетом влияния экранирования импульсных магнитных полей. Результаты численного моделирования показывают возможность получения электронных колец с параметрами, близкими к имеющимся в настоящее время, при существенно большей цикличности работы компрессора.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение	Объединенного	<b>ИНСТИТУТА</b>	ядерных	исследований.	Дубна	1979
-----------	---------------	------------------	---------	---------------	-------	------

Beloshitsky P.F. et al.

P9 - 12830

A Varient of High Intensity Electron Ring Compressor

A high intensity electron ring compressor is discussed. The increasing cycle of operation of the compressor is achieved by using a static magnetic field for compression and pulse magnetic field for moving of a ring in a region of a strong static field. The results of a numerical study of dynamics of an electron ring are presented.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

С 1979 Объединенный институт ядерных исследований Дубиа

С целью повышения цикличности коллективного ускорителя ионов в работе /1/ была предложена схема компрессора, основанная на совместном использовании статического и импульсного магнитных полей. В металлическую камеру помещалась спиральная замедляющая линия, в которой распространялся токовый импульс. Снаружи располагался соленоид, создающий статическое магнитное поле. Электронное кольцо, помещенное внутри спиральной линии, под действием волны В, /знак здесь и в дальнейшем означает принадлежность к импульсным величинам/ продвигалось в область сильного статического магнитного поля, одновременно сжимаясь по среднему радиусу Фаза кольца по отношению к ими размерам сечения. пульсному магнитному полю выбиралась так, чтобы обеспечить фокусировку кольца и увеличение вращательной энергии электронов. Целью настоящей работы является моделирование динамики сжатия электронного кольца с учетом экранирования импульсных магнитных полей.

## 1. РАСЧЕТ ИМПУЛЬСНОГО ПОЛЯ КОМПРЕССОРА С УЧЕТОМ ЭКРАНИРОВАНИЯ

В работе  $^{/1}$  был предложен способ расчета импульсных магнитных полей, создаваемых движущимся по замедляющей линии токовым импульсом. Простейшая эквивалентная схема, включающая в себя основные элементы линии, изображена на <u>рис. 1.</u> При расчете токов I<sub>k</sub> в витках учитывалось их попарное взаимодействие через взаимные индуктивности. Изменение величин I<sub>k</sub>(t) во времени описывается системой симметризованных линейных уравнений, решение которой находилось путем разложения по собственным векторам симметричных матриц /1/. Число витков в линии /и уравнений/ в настоящей работе выбрано равным 161.

Существующие в настоящее время стандартные библиотечные программы нахождения собственных векторов и собственных чисел вещественной симметричной матрицы с размерностью N~150



Рис. 1. Эквивалентная электрическая схема замедляющей линии.

требуют существенной оперативной памяти ЗВМ. Так, например, программа КІМ требует  $2 \times N \times (N+1)$  машинных слов. При числе уравнений N = 161 это составляет около  $140000_8$  слов / ~ 48K/. С целью более эффективного использования оперативной памяти ЗВМ одним из авторов /Б.Г.Щиновым/ создана библиотека программ, включающая программу нахождения собственных векторов и собственных чисел вещественной симметричной матрицы /требует оперативной памяти N×(N+2) при примерно таких же, как и в КІМе, затратах времени центрального процессора/ и ряд сервисных программ для обмена с дисками. Более подробное описание библиотеки дано в приложении 2.

Характерные параметры замедляющей линии: шаг витков -2 см,емкости конденсаторов -  $15 \cdot 10^{-9}$  Ф, напряжение на входе замедляющей линии  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$ ,  $t \le T_0/2$ , U(t) = 0,  $t > \frac{T_0}{2}$  с  $U_0 = 50 \div 70$  кВ,  $T_0 = 10 \div 30$  мкс. Конкретное значение

величины  $T_0$  выбиралось с учетом минимальных искажений формы импульса при его распространении в линии при одновременном достаточно большом значении амплитуды волны  $B_{\rm r}$  /с увеличением периода  $T_0$  амплитуда волны  $B_{\rm r}$  падает, как это очевидно из энергетических соображений/. Максимально допустимое значение  $U_0$  определялось условиями фокусировки электронного кольца при фиксированных радиусе и начальной энергии инжектируемого пучка.

Следуя работе  $^{/2/}$ , учтем влияние экранирования магнитного поля. Условие квазистационарности  $\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} < \frac{\ell^2}{2}$  /  $v_{\Phi}$  - фазовая скорость волны, при выбранных параметрах линии  $v_{\Phi}$ -10<sup>7</sup> см/с,  $\mathcal{L}_0$  - длина экрана,  $\ell$  - характерный размер области, в которой поле отлично от нуля/ выполняется с большим запасом. Пусть азимутальное сечение экрана задано в виде гладкой кривой r = r(z). Тогда плотность тока в экране /бесконечно тон-ком и идеально проводящем/

$$j_{\phi}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = -\frac{c}{\mathcal{Q}_{0}^{2}} \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i} \frac{1}{\lambda_{i}} \phi_{i}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \int_{\mathcal{Q}} A_{\phi}(\mathbf{r}', \mathbf{z}', t) \sqrt{r'} \phi_{i}(\mathbf{r}', \mathbf{z}') f(\mathbf{z}') d\mathbf{z}', \quad /1/$$

где интегрирование ведется по контуру азимутального сечения экрана  $\pounds$ ,  $A_{\phi}$  - векторный потенциал поля в отсутствие экрана,  $f(z') = \sqrt{1 + (\frac{dr'}{dz'})^2}$ ,  $\phi_i$  и  $\lambda_i$  - собственные функции и собственные числа ядра G(r,r', z, z') · f(z').

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{z},\mathbf{z}') = \frac{4}{k} [(1 - \frac{k^2}{2})K(k) - E(k)], \qquad k^2 = \frac{4 \mathbf{r}\mathbf{r}'}{(\mathbf{r} + \mathbf{r}')^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2},$$

$$\lambda_i \phi_i(\mathbf{r},\mathbf{z}) = \frac{1}{\mathcal{L}_0} \int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{r}',\mathbf{z}') G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{z},\mathbf{z}') f(\mathbf{z}') d\mathbf{z}',$$
/2/

через К и Е обозначены полные эллиптические интегралы первого и второго рода, значок  $\Sigma$  означает суммирование по всем  $i=1,2,\ldots,N$ , N – число собственных функций.

. В уравнении /2/ перейдем от интегрирования к суммированию, используя формулу Симпсона

$$\lambda_{i} \phi_{n}^{(i)} = \sum_{m} \phi_{m}^{(i)} G_{nm} f_{m} Q_{m}, \qquad /3/$$
$$Q_{m} = \frac{z_{N} - z_{1}}{(N-1)\mathcal{L}_{0}} q_{m} = \Delta v \cdot q_{m},$$

где нижний индекс означает порядковый номер на контуре 2,  $q_1 = q_N = \frac{1}{3}$ ,  $q_2 = q_4 = \dots = q_{N-1} = \frac{4}{3}$ ,  $q_3 = q_5 = \dots = q_{N-2} = \frac{2}{3}$ . Симметризуя уравнение /3/, получим

$$\lambda_{i} \vec{\phi}^{(i)} = \vec{G} \vec{\phi}^{(i)}, \qquad (4/2)$$
$$\vec{\phi}_{n}^{(i)} = \sqrt{Q_{n} f_{n}} \phi_{n}^{(i)}, \quad \vec{G}_{nm} = \sqrt{Q_{n} Q_{m} f_{n} f_{m}} \quad \vec{G}_{nm},$$

т.е. задача свелась к определению собственных чисел и собственных векторов симметричной матрицы  $\tilde{G}$  \*. Переходя в /1/ к суммированию, окончательно получаем для токов в экране

\* Вычисление элементов G<sub>вр</sub> проведено в Приложении 1.

4

5

и создаваемых ими полей

$$\begin{split} \mathbf{j}_{\phi}(\mathbf{r}_{n},\mathbf{z}_{n}) &= -\frac{c}{\mathcal{L}_{0}} \Delta \mathbf{v} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{q}_{n}\mathbf{f}_{n}\mathbf{r}_{n}}} \sum_{i,k} \frac{1}{\lambda_{i}} \vec{\phi}_{n}^{(i)} \vec{\phi}_{k}^{(i)} \sqrt{\frac{\mathbf{q}_{k}\mathbf{r}_{k}}{\mathbf{f}_{k}}} \mathbf{A}_{k}^{(t)}. \quad /4/\\ \mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{z}) &= \frac{1}{c} \Delta \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{L}}_{0} \sum_{n} \mathbf{j}_{\phi}^{(\mathbf{r}_{n},\mathbf{z}_{n})} \mathbf{G}_{n}^{(\mathbf{r},\mathbf{z})} \cdot \mathbf{q}_{n} = \\ &= -\Delta \mathbf{v} \sum_{n} \sqrt{\frac{\mathbf{q}_{n}}{\mathbf{f}_{n}\mathbf{r}_{n}}} \mathbf{G}_{n}^{(\mathbf{r},\mathbf{z})} \sum_{i,k} \frac{1}{\lambda_{i}} \vec{\phi}_{n}^{(i)} \vec{\phi}_{k}^{(i)} \sqrt{\frac{\mathbf{q}_{k}\mathbf{r}_{k}}{\mathbf{f}_{k}}} \mathbf{A}_{k}^{(t)}, \end{split}$$

где G - геометрические факторы  $^{/3/}$ , соответствующие вычисляемой величине F, которая обозначает  $B_r$ ,  $B_z$  и т.д. При расстоянии между экраном и спиралью в 10 см величина экранирования магнитного поля в области траектории кольца составляла ~20%, а период входного сигнала - ~25 мкс, при расстоянии в 5 см экранирование увеличивалось примерно вдвое. Характерный вид импульсных полей, возникающих при распространении токового импульса вдоль линии, показан на рис. 2.



Рис. 2. Распространение волны внутри компрессора. Сплошными линиями представлены импульсные поля в экранированном компрессоре, штриховыми – без учета экранирования. Экран расположен на расстоянии 10 см от витков линии, поля вычислялись на расстоянии 8 см от витков. 1 – поля в момент  $t=0.4T_0 = 10$  мкс; 2 – t = 25 мкс; 3 – t = 32.5 мкс.

### 2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ КОМПРЕССОРА

При сжатии положение электронного кольца /точнее, равновесной частицы/ определяется уравнениями /1/

$$\tilde{B}_{r}(r, z, t) + B_{r}^{s}(r, z) = 0,$$
 (6/

$$M_{\phi} = r^{2} B_{z\Sigma} - rA_{\phi\Sigma} = \text{const}, \qquad /7/$$

$$B_{z\Sigma}(r, z, t) = \widetilde{B}_{z}(r, z, t) + B_{z}^{8}(r, z),$$

$$A_{z}(r, z, t) = \widetilde{A}_{z}(r, z, t) + A_{z}^{8}(r, z),$$

здесь величины с индексом "s" относятся к статическим полям. В уравнении /7/ импульсные величины в течение всего процесса сжатия остаются много меньше статических. Это обстоятельство значительно упрощает задачу формирования статического поля, необходимого для движения кольца по заранее выбранной траектории  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{o}(\mathbf{z})$ .

Пусть в некоторой окрестности траектории статическое магнитное поле имеет вид /4/

$$A_{\phi}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = A_{0}(\mathbf{z}) + A_{1}(\mathbf{z})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0}(\mathbf{z})) + A_{2}(\mathbf{z})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0}(\mathbf{z}))^{2}.$$
 /8/

Коэффициенты разложения определим из уравнений

$$|\mathbf{r}_{0}^{2}(z)\mathbf{B}_{z}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0}(z)} - |\mathbf{r}_{0}(z)\mathbf{A}_{\phi}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0}(z)} = \operatorname{const} = \mathbf{r}_{i}^{2}\mathbf{B}_{2}^{i} - \mathbf{r}_{i}\mathbf{A}_{\phi}^{i} = \mathbf{C}, /9/$$

$$B_{r}|_{r=r_{0}(z)} = -B_{0} - B_{1}(z - z_{1}) - B_{2}(z - z_{1})^{2}, \qquad /10,$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{z}}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0}(\mathbf{z})} = \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{r}}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0}(\mathbf{z})}, \qquad (11)$$

где индекс "i" означает взятие величины в момент инжекции пучка. Решая систему /9/-/11/, получаем

$$A_{0}(z) = -\frac{C}{r_{0}(z)} + B_{0}(z-z_{1}) + \frac{1}{2}B_{1}(z-z_{1})^{2} + \frac{1}{3}B_{2}(z-z_{1})^{3} + r_{1}B_{z}^{i},$$

$$A_{1}(z) = \frac{C}{r_{0}^{2}(z)},$$

$$A_{2}(z) = \frac{\frac{A_{0}(z)}{r_{0}^{2}(z)} - \frac{A_{1}(z)}{r_{0}(z)}(1+r_{0}^{*2}) - B_{1}-2B_{2}(z-z_{1})}{2(1+r_{0}^{*2})}.$$
(12)

$$B_{r}(r, z) = -A_{0}'(z) + A_{1}(z)r_{0}'(z) + [A_{2}(z)r_{0}'(z) - A_{1}'(z)](r - r_{0}(z)),$$

$$B_{z}(r, z) = \frac{A_{0}(z)}{r_{0}} + A_{1}(z) + [\frac{A_{1}(z)}{r} + 2A_{2}(z)](r - r_{0}(z)),$$

$$\frac{\partial B_{z}}{\partial r}|_{r=r_{0}(z)} = -\frac{A_{0}(z)}{r_{0}^{2}(z)} + \frac{A_{1}(z)}{r_{0}(z)} + 2A_{2}(z),$$

$$\frac{\partial B_{z}}{\partial z}|_{r=r_{0}(z)} = \frac{A_{0}'(z)}{r_{0}(z)} + A_{1}'(z) - [\frac{A_{1}(z)}{r_{0}(z)} + 2A_{2}(z)]r_{0}'(z).$$

#### 3. ДИНАМИКА СЖАТИЯ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА

При исследовании динамики сжатия электронного кольца его положение /координаты г, z / в каждый момент времени определялось путем численного решения уравнений /6/, /7/ со статическим полем вида /8/, /12/, /13/. Уравнения решались в последовательные моменты времени, в каждый из которых вычислялись величины токов в линии и экране. С целью более компактного хранения информации о токах в последних оставлялись первые 4 цифры, после чего они упаковывались по 4 в одно машинное слово. При вычислении полей это обеспечивало точность не хуже 0,05%. Изменение малых полуразмеров кольца  $a_1$ ,  $a_2$  в процессе сжатия определялось из уравнений

$$y^{2}a_{1,2}^{4}(\frac{\nu_{1,2}^{2}}{r^{2}}-\frac{Q}{a_{1,2}(a_{1}+a_{2})}) = const,$$
 /14/

где  $Q = \frac{4\nu}{\beta^2 \gamma^3}, \nu = \frac{N_e}{2\pi r}, \frac{e^2}{mc^2}, \gamma$  - релятивистский фактор,  $\beta = \frac{V_\phi}{c}, N_e$  - число электронов в кольце,  $\nu_{1,2}$  - частоты нормальных колебаний /4/,

$$\nu_{1,2}^{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p^{2} - n(1-n)},$$

$$n = -\frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{\partial B_{z\Sigma}}{\partial r} = -\frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{\partial B_{r\Sigma}}{\partial z},$$

$$p = \frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{\partial B_{z\Sigma}}{\partial z} = -\frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{\partial B_{r\Sigma}}{\partial r}.$$
(15)

В конце сжатия  $p^2 \sim n^2 \ll n \ll 1$ ,  $\nu_1^2 = 1 - n$ ,  $\nu_2^2 = n \ll 1$ , что приводит к необходимости дополнительной аксиальной фокусировки кольца, например с помощью "беличьего колеса" /5/. Приведем типичные параметры электронного кольца и суммарного магнитного поля в одном из вариантов моделирования сжатия кольца. Траектория кольца в компрессоре изображена на рис. 3. Параметры в начале сжатия: R = 22,4 см;  $a_{1,2}=1$  см; y = 6;  $B_{25}=457$  Э. Параметры в конце сжатия: R = 3,1 см;  $a_{1}=0,2$  см;

 $\gamma = 17; B_z \le 9,2$  кГс. Число электронов в кольце  $N_e = 10^{13}$ . Изменение малых полуразмеров  $a_1, a_2$  и релятивистского Фактора у в процессе сжатия представлено на рис. 4.

Исследование различных режимов сжатия кольца показывает слабую зависимость конечных его параметров от выбора начальных условий - времени и точки инжекции. Их выбор в основном определяется условиями устойчивости кольца. При небольших начальных значениях  $\nu_0$  /в большинстве вариантов  $\nu_0 < 0,15/$ кулоновское расталкивание ограничивает минимально допустимую величину у. Форма спирали в области сжатия кольца выбиралась в виде  $A \exp(-\alpha z) + B$ , как подобная траектории кольца. В то же время выбор оптимальной формы представляется сложной задачей. Так, при расширении спирали с целью более длительного сжатия кольца /R; -34 см/ конечные величины а, о оказались теми же, что и в приведенном варианте, что связано с более медленным набором энергии у /причем начальная энергия у, в этом варианте должна быть в 1,5 раза выше, чем в приведенном ранее/. В целом результаты численного моделирования показывают возможность получения электронных колец с параметрами, близкими к имеющимся в настоящее время /8/, при существенно большей цикличности работы компрессора.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

#### Вычисление диагональных элементов матрицы G

Используя асимптотические выражения для эллиптических функций К и Е, выделим особенность в ядре G(r,r',z,z') при  $r \rightarrow r', z \rightarrow z'$ .

$$G_0(z,z') = \ln \frac{64r^2}{[1+(dr'/dz')_{z'=z}^2](z'-z)^2} - 4.$$
 / \Pi. 1/

Теперь уравнения /2/ и /4/ можно записать в виде

$$\lambda_{i}\phi_{i}(\mathbf{r},z) = \frac{1}{\mathcal{L}_{0}} \{ \int_{\Omega} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',z,z') [\phi(\mathbf{r}',z') - \phi(\mathbf{r},z)] f(z') dz' + /\Pi.2/ \\ +\phi(\mathbf{r},z) \int_{\Omega} [G(\mathbf{r},\mathbf{r}',z,z') f(z') - G_{0}(z,z') f(z)] dz' + \phi(\mathbf{r},z) f(z) \int_{\Omega} G_{0}(z,z') dz' \}.$$

8



Рис. 3. Принципиальная схема компрессора. 1 - металлический экран; 2 - витки замедляющей линии; 3 - траектория кольца при сжатии.





- Topper a la

$$\lambda_{i} \vec{\phi}^{(i)} = \vec{G} \vec{\phi}^{(i)} . \qquad /\Pi.3/$$

$$\vec{\phi}_{n}^{(i)} = \sqrt{Q_{n} f_{n}} \phi_{n}^{(i)}, \quad \vec{G}_{nm} = \begin{cases} \sqrt{Q_{n} Q_{m} f_{n} f_{m}} G_{nm}, \quad n \neq m, \\ f_{n} (A_{n} - \sum_{k \neq n} G_{kn}^{\circ} Q_{k}), n = m, \\ f_{n} (A_{n} - \sum_{k \neq n} G_{kn}^{\circ} Q_{k}), n = m, \\ A_{n} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} G_{0}(z_{n}, z^{*}) dz' = \frac{1}{2} i(z_{f} - z_{i}) \left[ \ln \frac{64r_{n}^{2}}{1 + (dr'/dz)^{2} z' = z_{n}} - 2 \right] - z_{n} - z_{n}$$

Здесь z; и zf - начальная и конечная координаты экрана.

### приложение 2

E:

# Описание программы нахождения собственных чисел и собственных векторов больших симметрических матриц (RMSEVEV) и краткое описание библиотеки LIBRMS

Метод Якоби, или метод вращений, является одним из наиболее известных итерационных методов нахождения собственных чисел и собственных векторов симметричных матриц. Исследованию метода Якоби и его применению на ЭВМ посвящено большое число работ /см., например, /7-10//.

Известны основные достоинства метода Якоби:

 простота алгоритма и, следовательно, отсутствие какихлибо трудностей при написании программы,

2/ безусловная и достаточно быстрая сходимость метода,

3/ применимость метода без его изменения для вычисления близких и кратных собственных значений.

Однако для достижения хорошей точности сходимости необходимо совершить значительное число элементарных поворотов, что приводит к большим затратам времени центрального процессора /СР/ и ошибкам округления. Чтобы уменьшить число поворотов, можно было бы отыскивать и исключать максимальный по абсолютной величине недиагональный элемент. Для этого пришлось бы перед каждым вращением просматривать всю матрицу, что нежелательно из-за дополнительных затрат времени СР. Предложено два оптимизированных метода поиска элемента, подлежащего исключению. Первый - оптимизированный метод порогов /барьеров/<sup>9/</sup>, в котором просматриваются подряд все недиагональные элементы и исключаются те из них, которые по модулю больше некоторого фиксированного числа, называемого барьером. Затем величина барьера уменьшается согласно не-

10

11

которой специальной процедуре /см. <sup>/9/</sup> /, достигая после нескольких частичных преобразований исходной матрицы требуемых значений точности диагонализации. Таким путем удается оптимизировать вычисления на 30  $\div$  40%. Второй метод предложен В.В.Воеводиным и Г.Кимом <sup>/8/</sup>. Они заметили, что можно просматривать не n(n-1)/2 элементов, а лишь 2n-1. Действительно, если необходимо исключить элемент  $a_{ij}$ , то матрицу простого поворота выберем в виде



где с=  $\cos\phi$ , s =  $\sin\phi$ ,  $\phi$  - угол поворота. Преобразованная матрица  $B_{ii}$  равна:

 $B = T_{ii} A T_{ii} .$ 

Выполнив это преобразование и составив сумму квадратов недиагональных элементов произвольной строки  $k \neq i,j$ , можно убедиться, что она равна сумме квадратов соответствующих элементов исходной матрицы A, т.e.  $\sum_{\ell=1}^{n} (b_{k\ell}^2 - a_{k\ell}^2) = 0$ , штрих означает  $\ell \neq k$ , а  $k \neq i,j$ . Поэтому элемент, подлежащий исключению, можно находить следующим образом: сначала ищем строку с максимальной суммой квадратов недиагональных элементов, а в ней находим максимальный по модулю недиагональный элемент.

Именно с учетом этой модификации метода Якоби написана программа КІМ, имеющаяся в библиотеке программ CDC-6500 и БЭСМ-6 ОИЯИ.

Для дальнейшего существенно отметить, что в обоих методах положение следующего исключаемого элемента предсказать невозможно.

Все вышеизложенное относится, вообще говоря, к матрицам любого порядка. Однако при переходе к большим матрицам, с размерностью  $n \ge 200$ , необходимо учитывать ограниченность оперативной памяти (СМ) ЭВМ. Дело в том, что обычно в программах, основанных на методе Якоби, используют две матрицы размерностью  $n \times n$ : одна из них исходная, другая служит для размещения вычисляемых в программе собственных векторов. Так, при n = 200 необходимо  $80000 = 234\ 200_8$  слов в СМ, что превышает доступную пользователю память на ЭВМ ОИЯИ. Таким

образом, уже при n = 200 необходимо хранить часть информации на внешних носителях, например на дисках.

Обмен с диском на CDC-6500 происходит через периферийный процессор /PP/, характерное время работы которого в 10 раз больше, чем характерное время CP. Время, в течение которого задача пользователя находится в CDC-6500, равно сумме времен работы CP и PP /плюс время на ввод-вывод/. Отсюда следует, что число обменов не должно быть слишком большим.

Была сделана следующая попытка видоизменить программу КІМ. На диске хранилась одна из матриц - матрица собственных векторов. Эта матрица в методе Якоби получается из единичной преобразованиями

$$\begin{split} \widetilde{\mathbf{U}}_{ki} &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{U}_{ki} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{U}_{kj} ,\\ \widetilde{\mathbf{U}}_{kj} &= -\mathbf{s} \cdot \mathbf{U}_{ki} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{U}_{kj} , \quad \mathbf{k} = 1, 2, \dots, n \end{split}$$

на каждом шаге исключения. В преобразовании участвуют два столбца, поэтому обмен с диском происходил столбцами: два массива размерности п читались до преобразования и два записывались после преобразования. В пробных расчетах при n = 100 и точности диагонализации  $10^{-5}$  требовалось приблизительно  $\sim n^2$  элементарных поворотов, т.е. происходило -40000 обращений к диску. На эти вычисления требовалось  $\sim 4$  мин работы СР и  $\sim 20$  мин работы РР, что совершенно неудовлетворительно.

Такой результат получился из-за необходимости совершать 4 обращения к диску после каждого поворота, что, в свою очередь, является следствием непредсказуемости положения следующего максимального элемента /как уже отмечалось выше/. Однако сходимость метода не зависит от того, будем ли мы исключать каждый раз максимальный элемент или любой элемент, который больше EPS /точности диагонализации/. Для того, чтобы убедиться в этом, выпишем формулы преобразования для элементов матрицы В:

$$b_{ii} = c^{2}a_{ii} + s^{2}a_{jj} + 2csa_{ij} ,$$

$$b_{jj} = s^{2}a_{ii} + c^{2}a_{jj} - 2csa_{ij} ,$$

$$b_{ik} = ca_{ki} + sa_{kj} \\
b_{jk} = -sa_{ki} + ca_{kj} \end{pmatrix} k = 1, 2, ..., n ; k \neq i, j,$$

$$b_{ij} = -sca_{ii} + csa_{jj} + c^{2}a_{ij} - s^{2}a_{ij} ,$$

$$c = \sqrt{\frac{1+K}{2}}, \quad s = \epsilon \sqrt{\frac{1-K}{2}}, \quad K = \sqrt{1-\frac{(2a_{ij})^2}{(a_{ii}-a_{jj})^2+(2a_{ij})^2}},$$

$$\epsilon = \begin{cases} \operatorname{sign} a_{ij}, & \operatorname{если} a_{ii} = a_{jj}, \\ \operatorname{sign} \frac{a_{ii} - a_{jj}}{a_{ij}} & \operatorname{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Вычислив квадрат суммы и разности  $b_{ii}$  и  $b_{jj}$ , а также используя равенство  $b_{ii}$  =0, легко получим

$$b_{ii}^{2} + b_{jj}^{2} = a_{ii}^{2} + a_{jj}^{2} + 2a_{ij}^{2}$$

т.е. сумма квадратов диагональных элементов после преобразования увеличивается. Кроме того,  $\sum_{l=1}^{n} b_{kl}^{2} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}^{2}$ , следовательно, сумма квадратов недиагональных элементов уменьшается на ту же величину 2221 . Это означает сходимость к диагональной матрице независимо от последовательности, в которой происходит исключение ненулевых недиагональных элементов, Основываясь на этом факте, построим новый алгоритм с использованием одной матрицы в СМ следующим образом. Исходная матрица А находится в СМ. На диск записывается единичная матрица U. Просматриваем элементы матрицы А поочередно и исключаем элементарными поворотами те из них, которые по абсолютной величине больше заданной EPS. Учитывая симметричность матрицы А. просматриваем лишь n(n-1)/2 недиагональных элементов в нижнетреугольной части матрицы. В ее верхнетреугольную часть А, на места, симметричные исключаемым элементам, записываем синусы преобразования. Совершив максимум n(n - 1)/2 преобразований, записываем всю матрицу А на диск, помещая на ее место в памяти матрицу U.

Считываем с диска в рабочий массив размерности п первый столбец А, находим косинусы преобразования и выполняем необходимые преобразования матрицы U. Повторяем этот процесс, считывая в тот же рабочий массив второй столбец А и т.д. Выполнив все преобразования с U, записываем ее на диск и помещаем в СМ матрицу А. Вновь просматриваем все n(n-1)/2 элементов А, отыскивая и исключая те, абсолютная величина которых больше EPS. Если таких элементов нет, процесс нахождения собственных чисел и векторов завершен. В противном случае повторяем обмен с диском так, как описано выше.

Можно ожидать, что только что описанный алгоритм потребует несколько больших затрат времени СР по сравнению с алгоритмами с выбором максимального элемента, но существенно сократит время использования PP, Поэтому он годится и для малых, и для достаточно больших матриц. Целесообразно использовать этст алгоритм и на малых ЭВМ, где проблема времени стоит менее остро, чем проблема памяти.

В данной работе программа RMSEVEV, основанная на предлагаемом алгоритме, использовалась для решения задачи на собственные значения для матриц с размерностью до 161 /см. §1./. При n = 161 и точности EPS = 10<sup>-5</sup> потребовалось ~70000 элементарных поворотов и около 6000 обменов с диском /столбцами с длиной 161 элемент/. Время работы центрального и периферического процессоров равнялось ~15 и ~2 мин.

Обмены с диском в программе RMSEVEV осуществляются подпрограммами READCOL, WRITCOL, которые позволяют прочитать или записать произвольный столбец хранящейся на диске матрицы. Эти подпрограммы в настоящее время используют подпрограммы из библиотек SL-FORTRAN, READMS и WRITMS, дающих возможность находить нужный рекорд файла без применения операторов REWIND и BACKSPACE /так называемый random file access/.

Кроме трех указанных подпрограмм (RMSEVEV, READCOL, WRITCOL) в библиотеку LIBRMS входит подпрограмма RMSMATR, носящая установочный характер, и подпрограмма AMULTB, служащая для умножения двух матриц, одна из которых находится на диске, а другая в СМ.

В дальнейшем целесообразно переписать внутренний цикл в RMSEVEV на COMPASSe, а подпрограммы READCOL и WRITCOL перестроить на основе макросов обменов с диском из системной библиотеки СРС, что приведет к дальнейшей оптимизации использования СР и РР.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Барабаш Л.С. и др. ОИЯИ, Р9-11776, Дубна, 1978.
- 2. Алексахин Ю.И., Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ЖТФ, 1975, т.45, с.933.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
- 4. Laslett L.Y., Sessler A.M. IEEE Trans. Nucl.Sci., 1969, NS-16, No.3, p.1034.
- Долбилов Г.В. и др. В кн.: Труды VII Международной конференции по ускорителям заряженных частиц. Ереван, 1970, с. 535. ОИЯИ, Р9-4737, Дубна, 1969.
- Саранцев В.П., Перельштейн Э.А. Физика плазмы, 1977, т.3, с.449.
- 7. Коллатц Л., Альбрехт Ю. Задачи по прикладной математике. "Мир", М., 1978.

- Вычислительные методы и программирование. Сб. работ ВЦ МГУ. Изд-во МГУ, 1962, с.269-276.
- Rutishauser H. In: Handbook for Automatic Computation. (J.H.Wilkinson and R.Reinsch, Eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1971, v.II (Linear Algebra), pp.202-211.
- Birge R.R., Hubbard L.N. Eigenvector Eigenvalue Theory: The Diagonalization of Symmetric Matrices Using a Least-Squares Optimized Threshold Method. J.Comp.Phys., 1978, v.29, p.199-207.

Рукопись поступила в издательский отдел 3 октября 1979 года.