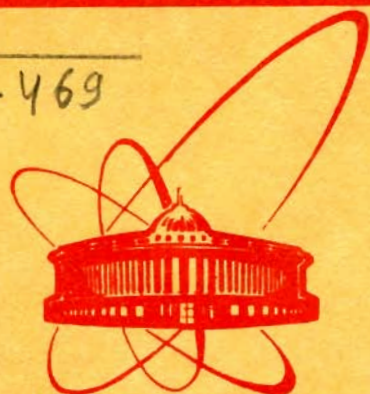


A-469



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

5589 / 2-79

41-80

P9 - 12739

Ю.И.Алексахин, И.Габанец, З.Г.Гаврилова

АНАЛОГОВЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ
ПРОДОЛЬНОГО ИМПЕДАНСА
ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА В КАМЕРЕ,
СОДЕРЖАЩЕЙ РЕЗОНАНСНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

1979

P9 - 12739

Ю.И.Алексахин, И.Габанец, З.Г.Гаврилова

АНАЛОГОВЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ
ПРОДОЛЬНОГО ИМПЕДАНСА
ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА В КАМЕРЕ,
СОДЕРЖАЩЕЙ РЕЗОНАНСНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Направлено в "Particle Accelerators"

Алексахин Ю.И., Габанец И., Гаврилова З.Г.

Аналоговый метод измерения продольного импеданса электронного кольца в камере, содержащей резонансные элементы

Рассматривается аналоговый метод измерения продольного импеданса связи пучка заряженных частиц с камерой ускорителя. Дано обобщение аналогового метода для систем, включающих азимутально-неоднородные и резонансные элементы. Приведены схема и результаты измерений импеданса связи электронного кольца с инжектором в камере адгезатора коллективного ускорителя. Полученные результаты свидетельствуют о том, что резонансная связь с инжектором /играющим роль четверть-волнового вибратора/, может оказать существенное влияние на электронное кольцо в момент его образования и на начальном этапе компрессии.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований, Дубна 1979

Alexahin Yu.I., Gabanec J., Gavrilova S.G.

Analog Method for Measurement of Longitudinal Coupling Impedance of Electron Ring in a Chamber Containing Resonant Elements

An analog method for measurement of the longitudinal coupling impedance of charged particle beam with the accelerator chamber is considered. The method is generalized for systems containing azimuthally inhomogeneous and resonant elements. Scheme and measurement results for electron ring coupling impedance with the injector snout in the compressor chamber are given. These results testify that resonant coupling with the injector snout (acting as a quarter-wave vibrator) may affect the electron ring significantly during its formation and at first stage of compression.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

ВВЕДЕНИЕ

В работе ^{1/} предложен аналоговый метод измерения импеданса связи кольцевого пучка заряженных частиц с камерой ускорителя - величины, характеризующей взаимодействие пучка с камерой и определяющей его устойчивость по отношению к продольным /азимутальным/ возмущениям тока. В основе метода лежит аналогия между волнами, распространяющимися в системе пучок-камера, и аналоговой системе, в которой пучок имитируется токами, текущими в проводнике, помещенном в камеру. Установленное в работе ^{1/} соответствие между дисперсионными характеристиками этих волн позволяет по измеренной фазовой скорости волны в системе проводник - камера определять импеданс связи пучок - камера в случаях, когда он слабо зависит от частоты.

В камере реального ускорителя присутствуют многочисленные элементы /инжектор, дефлекторные пластины, измерительные устройства/, имеющие собственные частоты электромагнитных колебаний. В случае близости этих частот к одной из гармоник частоты обращения частиц имеет место резонансная связь, приводящая к сильной неустойчивости пучка. Вычисление импеданса связи пучка со сосредоточенными элементами является трудоемкой задачей, поэтому желательно его прямое экспериментальное определение.

Особое значение эта проблема имеет для коллективных ускорителей с электронными кольцами, где знание импеданса важно не только для анализа устойчивости электронного кольца, но и для понимания процессов, происходящих при инжекции электронного пучка в камеру адгезатора /компрессора/.

В настоящей работе аналоговый метод ^{1/} распространяется на случай резонансной зависимости импеданса от частоты, причем за основу принята модификация метода, предложенная в работе ^{2/}. Суть модификации заключается в том, что проводник, имитирующий пучок, замкнут и образует с камерой структуру,

электромагнитные колебания в которой имеют строго определенные длины волн $\frac{2\pi r_0}{n}$, где $n = 1, 2, 3 \dots$, измеряются же собственные частоты системы.

1. ПРОДОЛЬНЫЙ ИМПЕДАНС КОЛЬЦЕВОГО ИСТОЧНИКА

Продольный импеданс кольцевого пучка радиуса r_0 определяется из соотношения

$$Z_n = - \frac{2\pi r_0 E_{n\theta}}{I_n}, \quad /1/$$

где $I_n, E_{n\theta}$ - n -ые азимутальные гармоники тока и генерируемого им электрического поля, усредненного по сечению пучка. Для низких гармоник $n \ll r_0/a$, где a - радиус поперечного сечения пучка, продольное поле слабо меняется по сечению, поэтому в дальнейшем под E_θ мы будем подразумевать поле на границе пучка.

С целью выяснить структуру импеданса /1/ рассмотрим кольцевой источник с током $I = I(\theta, t)$, помещенный в камеру с проводящими стенками. Продольное /азимутальное/ электрическое поле на источнике дается известным выражением

$$E_\theta = - \frac{1}{r_0} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_\theta}{\partial t}, \quad /2/$$

где $U(\theta)$ - скалярный потенциал и $A_\theta = \theta$ - компонент вектор-потенциала электромагнитного поля источника. Если апертура камеры мала по сравнению с радиусом кольцевого источника r_0 , то потенциалы могут быть представлены в виде сумм

$$U = U^{(0)} + U^{(1)}, \quad A_\theta = A_\theta^{(0)} + A_\theta^{(1)}, \quad /3/$$

где $U^{(0)}$ и $A_\theta^{(0)}$ соответствуют потенциалам статических полей в выпрямленной идеально-проводящей структуре:

$$U^{(0)} = \frac{q}{C}, \quad A_\theta^{(0)} = \frac{I}{c} L', \quad /4/$$

C, L' - емкость и индуктивность на единицу длины, q - линейная плотность заряда источника, связанная с током уравнением непрерывности

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial I}{\partial \theta} = 0, \quad /5/$$

а $U^{(1)}$ и $A_{\theta}^{(1)}$ - поправки, учитывающие кривизну системы, конечную проводимость стенок камеры и т.д. Для камеры, не имеющей разрезов, препятствующих протеканию продольных токов, индуктивность и емкость на единицу длины связаны между собой соотношением ³

$$L' C' = 1. \quad /6/$$

Индуктивность на единицу длины известна для многих структур. Так, для источника с радиусом поперечного сечения a , помещенного в коаксиальный ему цилиндр радиуса b ,

$$L' = 2 \ln \frac{b}{a}.$$

Для источника, расположенного между двумя параллельными плоскостями на расстоянии $h \geq a$ от каждой

$$L' = 2 \ln \frac{2h}{\pi a}.$$

В случае сложной геометрии камеры индуктивность L' может быть легко найдена численными методами.

Представляя ток и поля в виде разложения по бегущим волнам $I = \sum_n I_n e^{i(n\theta - \omega t)}$, из соотношений /2-6/ получим

$$E_{n\theta} = i \left(\frac{n^2}{\omega \epsilon_0^2} - \frac{\omega}{c^2} \right) L' I_n \cdot E_{n\theta}^{(1)},$$

где $E_{n\theta}^{(1)} = \frac{i n}{r_0} U_n^{(1)} + \frac{i \omega}{c} A_{n\theta}^{(1)}$. Согласно определению /1/,

$$Z_n(\omega) = i Z_0 L' \frac{n^2 \omega_0^2 - \omega^2}{2 \omega \omega_0} + Z_{n1}(\omega), \quad /7/$$

где введены обозначения $\omega_0 = \frac{c}{r_0}$, $Z_0 = \frac{4\pi}{c}$ ($Z_0 = 377 \Omega$ в практической системе единиц/

$$Z_{n1} = \frac{2 \pi r_0 E_{n\theta}^{(1)}}{I_n}.$$

Продольный импеданс /7/ представляет собой сумму двух слагаемых, первое - квазистатическая часть импеданса - известно или может быть легко найдено, второе - назовем его волновой частью импеданса, - представляет наибольшие трудности для определения*.

* Во избежание недоразумений подчеркнем, что волновая часть импеданса /в принятой нами терминологии/ не тождественна волновому сопротивлению аналоговой линии /и является лишь малой поправкой к нему/.

В случае больших длин волн ($n \ll \frac{r_0}{a}$) поле вне источника /и на его поверхности/ не зависит от формы распределения тока по поперечному сечению источника и определяется полным током. Поэтому независимо от того, является ли источником пучок заряженных частиц или же имитирующий пучок проводник с током, импеданс имеет один и тот же вид /7/, что позволяет говорить об аналогии систем пучок-камера и проводник-камера.

Однако дисперсионные свойства этих систем различны.

Собственные частоты азимутальных колебаний пучка, как показывает теория неустойчивости отрицательной массы⁴, равны $\omega_n = n\omega_H$, где $\omega_H = \frac{v_0}{r_0}$ - частота обращения частиц, так что при релятивистских энергиях $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \gg 1$, $\beta = \frac{v_0}{c}$, продольный импеданс пучка⁺

$$Z_n = i \frac{n Z_0 L'}{2\beta\gamma^2} + Z_{n1}(n\omega_H)$$

определяется в основном волновой частью.

II. СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ АНАЛОГОВОЙ СИСТЕМЫ

Частоты собственных колебаний в системе идеальный проводник-камера определяются из требования равенства нулю E_{\parallel} на поверхности проводника^{*,†}, т.е. из уравнения

$$Z_n(\omega) = 0. \quad /8/$$

а/ Нерезонансный случай

При условии малости волновой части импеданса ($|Z_{n1}| \ll n Z_0 L'$) и ее слабой /нерезонансной/ зависимости от частоты, решение уравнения /8/ имеет вид

$$\omega_n = \omega_0 \left(n - i \frac{Z_{n1}}{Z_0 L'} \right).$$

Таким образом, знание собственной частоты системы проводник-камера позволяет определить волновую часть импеданса:

* Квазистатическая часть импеданса пучка, определяемого через усредненное по сечению пучка поле, отличается от написанной заменой L' на $L' + 1$.

** Влияние конечной проводимости имитирующего пучок проводника на собственные частоты системы рассматривается в Приложении.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} Z_{n1} &= \frac{\operatorname{Re} \omega_n - n \omega_0}{\omega_0} Z_0 L', \\ \operatorname{Re} Z_{n1} &= \frac{\operatorname{Im} \omega_n}{\omega_0} Z_0 L'. \end{aligned} \quad /9/$$

Для релятивистских частиц $\omega_H \approx \omega_0$, поэтому в нерезонансном случае формулы /9/ определяют и волновую часть продольного импеданса пучка в камере.

б/ Резонансная зависимость импеданса от частоты.

Аналоговый метод может быть применен и в тех случаях, когда характер зависимости импеданса от частоты известен, неизвестными же являются лишь конкретные значения параметров, входящих в эту зависимость. В частности, при наличии в камере резонансного элемента /например, инжектора/ с собственной частотой $\omega_{\text{рез}}$, зависимость импеданса от частоты при $\omega \approx \omega_{\text{рез}}$ имеет вид:

$$Z_n(\omega) = iZ_0 L' \frac{n^2 \omega_0^2 - \omega^2}{2\omega \omega_0} + Z_{n1} + iK \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega - \omega_{\text{рез}} \left(1 - \frac{i}{2Q}\right)}, \quad /10/$$

где K - коэффициент связи, Q - добротность резонансного элемента, Z_{n1} - нерезонансная /слабо зависящая от частоты/ часть импеданса.

Резонансная частота и добротность измеряются в отсутствие проводящего кольца в камере /емкостная связь с имитирующим пучок проводником смещает резонансную частоту/. Информация о коэффициенте связи K и нерезонансной части импеданса может быть получена из собственных частот системы проводящее кольцо - камера. Вводя обозначения $p = \frac{\omega - n\omega_0}{n\omega_0}$, $\delta = \frac{n\omega_0 - \omega_{\text{рез}}}{n\omega_0}$, $k = \frac{K}{nZ_0 L'}$, $x_n = \frac{iZ_{n1}}{nZ_0 L'}$,* и предполагая $|p| \ll 1$, $|\delta| \ll 1$, запишем дисперсионное уравнение /8/ в виде

$$p - x_n - \frac{k}{p + \delta + \frac{i}{2Q}} = 0. \quad /11/$$

Уравнение /11/ имеет два корня

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ x_n - \left(\delta + \frac{i}{2Q} \right) \pm \sqrt{\left[x_n + \left(\delta + \frac{i}{2Q} \right) \right]^2 + 4k} \right\}, \quad /12/$$

соответствующих двум ветвям собственных колебаний системы.

* Мы считаем x_n действительной величиной, что справедливо, если омические потери в стенках камеры пренебрежимо малы.

Если резонансный элемент имеет высокую добротность $Q \gg 1, 4\sqrt{k}$ что обычно имеет место, если только не приняты специальные меры по ее уменьшению/, то зависимость корней p_1, p_2 от относительной расстройки δ имеет вид, схематически показанный на рис. 1.

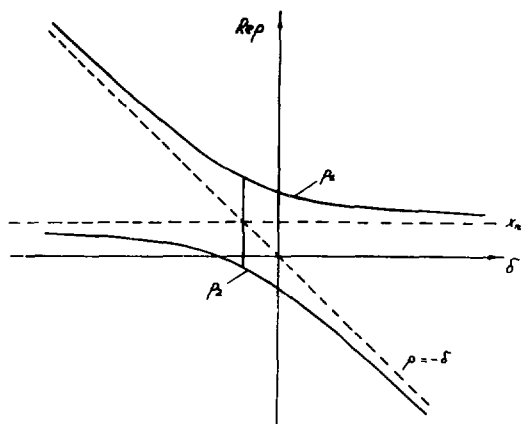


Рис. 1. Корни дисперсионного уравнения $p_1 \cdot p_2$ как функции относительной расстройки δ .

Минимальное расстояние между корнями достигается при $\delta = x_n$

$$\text{Re}(p_1 - p_2)|_{\min} = 2\sqrt{k}$$

и несет, таким образом, информацию о силе резонанса. Среднее арифметическое при том же значении расстройки

$$\frac{1}{2} \text{Re}(p_1 + p_2) = x_n$$

определяется нерезонансной частью импеданса. Итак, варьируя расстройку /за счет изменения радиуса металлического кольца или же меняя собственную частоту резонансного элемента/ и определяя максимально близкие собственные частоты аналоговой системы, можно определить коэффициент связи

$$K_{11} = Z_0 I_0 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2n\omega_0} \right)^2 \quad /13/$$

нерезонансную часть импеданса

$$Z_{n1} = Z_0 I_0 \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\omega_0} \quad /14/$$

а также резонансную частоту

$$\omega_{p1} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

в аналоговой системе.

III. ИМПЕДАНС АЗИМУТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ

Анализ, проведенный в разделах I-II, относится к азимутально-симметричным системам, в которых отсутствует связь между азимутальными гармониками с разными n и дисперсионные характеристики для бегущих и стоячих волн согласуются. Ниже будет показано, что при определенных условиях полученными результатами можно воспользоваться и в случае отсутствия азимутальной симметрии.

В общем случае связь между электрическим полем и током, зависящими от времени как $e^{i\omega t}$, дается соотношением

$$2\pi r_0 E_n(\theta) = \hat{Z}(\omega) I_n(\theta),$$

где \hat{Z} - некоторый интегро-дифференциальный оператор, явным образом зависящий от θ . Фурье-гармоники поля и тока связаны матрицей импеданса

$$2\pi r_0 E_n(\theta) = \sum_m Z_{nm}(\omega) I_m(\theta), \quad \text{где}$$

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} I(\theta) d\theta, \quad /15/$$

$$Z_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \hat{Z} e^{-im\theta} d\theta.$$

Недиагональные элементы матрицы импеданса зависят от выбора начала отсчета относительно неоднородности. В системе, повернутой на угол θ_0 ($\theta' = \theta - \theta_0$),

$$Z'_{nm} = e^{i(n-m)\theta_0} Z_{nm}. \quad /16/$$

Матрица $\|Z_{nm}\|$ может быть представлена в виде суммы импеданса азимутально-однородной системы $Z_n^{(0)}$ и импеданса, вносимого неоднородностью:

$$Z_{nm} = Z_n^{(0)} \delta_{nm} + Z_{nm}^{(1)},$$

где δ_{nm} - символ Кронекера.

Оставляя в стороне вопросы взаимодействия между азимутальными гармониками тока пучка ^{14/}, мы будем интересоваться лишь усредненным влиянием неоднородности на данную гармонику n , определяемым соответствующим диагональным элементом

$$Z_{n \text{ eff}}^{(1)} = Z_{nn}^{(1)}.$$

В отличие от системы пучок-камера в аналоговой системе пренебречь связью гармоник, вообще говоря, нельзя, в особенности связью прямых и обратных волн /т.е. зависимостью гармоник n и $-n$ /. Предположим, что для придания полю определенной конфигурации, имитирующий пучок проводник закорочен на стенку камеры при $\theta = \theta_0$, так что $U(\theta_0) = 0$. По закоротке возможно протекание тока, что приводит к появлению колебаний с полуцелыми длинами волн:

$$I(\theta') = \sum_{\ell=0}^{\infty} I_{\ell/2} \cos\left(\frac{\ell\theta'}{2}\right), \quad 0 \leq \theta' = \theta - \theta_0 < 2\pi$$

$$I_{\ell/2} = \frac{1}{\pi(1 + \delta_{\ell 0})} \int_0^{2\pi} I(\theta') \cos\left(\frac{\ell\theta'}{2}\right) d\theta'.$$

Собственные частоты системы по-прежнему определяются из требования равенства нулю продольного электрического поля по поверхности проводника:

$$\hat{Z}(\omega) I(\theta) = 0; \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad /17/$$

Поскольку $f_{\ell} = \cos\left(\frac{\ell\theta'}{2}\right)$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$ представляют собой полный набор функций на интервале $0 \leq \theta' < 2\pi$, уравнение /17/ эквивалентно системе

$$\sum_{k=0}^{\infty} Z_{\ell/2, k/2} I_{k/2} = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad /18/$$

где

$$Z_{\ell/2, k/2} = \frac{1}{\pi(1 + \delta_{\ell 0})} \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{\ell\theta'}{2}\right) \hat{Z} \cos\left(\frac{k\theta'}{2}\right) d\theta'.$$

Система /18/ имеет нетривиальные решения при равном нулю определителе. Дисперсионное уравнение, таким образом, есть

$$\text{Det} || Z_{\ell/2, k/2}(\omega) || = 0. \quad /19/$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда влияние неоднородности описывается оператором

$$\hat{Z}^{(1)} = 2\pi\delta(\theta)Z^{(1)} + 2\pi\delta(\theta' + \theta_0)Z^{(1)}.$$

Матричные элементы

$$Z_{\ell/2, k/2} = Z_{k/2, \ell/2}^{(0)} \delta_{\ell k} + \frac{2Z^{(1)}}{1 + \delta_{\ell 0}} \cos \frac{\ell\theta_0}{2} \cos \frac{k\theta_0}{2}.$$

Легко показать, что уравнение /19/ в данном случае сводится к уравнению

$$1 + 2Z^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{k\theta_0}{2}}{(1 + \delta_{k0})Z_{k/2}^{(0)}} = 0. \quad /21/$$

Если выполнено условие

$$\frac{2\pi|Z^{(1)}|}{Z_0 L'} \ll 1, \quad /21/$$

то уравнение /20/ распадается на систему

$$Z_{k/2}^{(0)} + Z^{(1)} \frac{1 + \cos k\theta_0}{1 + \delta_{k0}} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad /22/$$

соответствующую системе уравнений

$$Z_{k/2, k/2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Интерсующими нас величинами являются диагональные элементы $Z_{n \text{ eff}}^{(1)} = Z_{nn}^{(1)}(\omega_n)$ в представлении бегущих волн /15/. В рассматриваемом случае $Z_{n \text{ eff}}^{(1)} = Z^{(1)}(\omega_n)$. Сравнение уравнений /8/ и /22/ при $k = 2n$ показывает, что результаты раздела II могут быть непосредственно использованы для нахождения эффективного импеданса связи с азимутально-неоднородной системой, если выбрать угол между неоднородностью и закороткой $\theta_0 = \frac{\pi}{4n} (2m - 1)$, где $m = 1, 2, \dots, 4n$.

В общем случае, переходя в уравнении $Z_{2n/2, 2n/2}(\omega) = 0$ определяющем собственную частоту $\omega_n = n\omega_0$, к матричным элементам в представлении /15/, получим*

$$Z'_{nn} + Z'_{-n, -n} + Z'_{n, -n} + Z'_{-n, n} = 0.$$

*Интересно отметить, что уравнение $\text{Det} ||Z_{mn}|| = 0$, определяющее собственные частоты в отсутствие закоротки, не сводится к системе $Z_{nn} = 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и при выполненном условии /21/.

Используя трансформационные свойства /16/, вернемся в исходную систему координат, связанную с неоднородностью

$$Z_{nn} = \frac{1}{2} \{ Z_{n,-n} e^{2in\theta_0} + Z_{n,n} e^{-2in\theta_0} \} = 0 \quad /23/$$

/полагается, что $Z_{-n,-n} = Z_{nn}$).

Существенно, что "лишние" члены в /23/ испытывают периодическую зависимость от положения закоротки θ_0 с периодом π/n .

Поэтому в случае, когда область взаимодействия с неоднородностью "размазана" на значительный интервал $\Delta\theta$ и неоднородности трудно приписать определенное угловое положение, измерения следует проводить при двух положениях закоротки:

$\theta_0 = \theta_1$ и $\theta_0 = \theta_1 + \pi/2n$. Эффективный импеданс определяется тогда как полусумма измеренных значений.

В случае резонансной зависимости $\hat{Z}^{(1)}$ от частоты условие /21/ может, казалось бы, нарушаться. Однако, воспользовавшись решениями /12/ для собственных частот аналоговой системы, можно показать, что условие /21/ будет выполнено, если

$$2\pi \sqrt{\frac{nK}{Z_0 I}} = 1.$$

IV. ИЗМЕРЕНИЯ

а/ Методика

Измерения проводились по схеме, описанной в ². Электромагнитные колебания в системе проводящее кольцо - камера возбуждаются в.ч.генератором через штырь длиной $l = \lambda$, где λ - длина возбуждаемой волны.

Поле в камере может быть представлено как суперпозиция поля, возбужденного штырем в камере без кольца /падающее поле/, и поля тока, индуцированного в металлическом кольце:

$$\vec{E}^{tot} = \vec{E}^{пад} + \vec{E}^{ind}.$$

При этом на поверхности идеально-проводящего кольца должно выполняться условие

$$\vec{E}_\theta^{tot} = 0 \quad /24/$$

для каждой азимутальной гармоники n в отдельности.

Воспользовавшись связью /1/ между током в кольце и индуцируемым им полем

$$E_{n\theta}^{ind} = \frac{Z_n(\omega)}{2\pi r_0} I_n \quad /25/$$

и равенством /24/, получим ток, наведенный в кольце, как функцию частоты и амплитуды падающего поля

$$I_n(\omega) = \frac{2\pi r_0 E_{n\theta}^{пад}}{Z_n(\omega)} \quad /26/$$

На частотах ω , близких к собственной частоте системы проводник - камера $\omega_n (Z_n(\omega_n) = 0)$, зависимость $I_n(\omega)$ имеет резонансный характер

$$I_n(\omega) = \frac{2\pi r_0 E_{n\theta}^{пад}}{\frac{dZ_n(\omega)}{d\alpha} \Big|_{\omega=\omega_n}} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_n} = \frac{A}{\omega - \omega_n}$$

Амплитуда тока в кольце и сигнала на приемнике

$$|I_n(\omega)| = |A| \frac{1}{\sqrt{(\omega - \omega_n')^2 + \omega_n''^2}}$$

где $\omega_n' = \text{Re}\omega_n$, $\omega_n'' = \text{Im}\omega_n$.

Максимальной амплитуде соответствует частота $\omega = \omega_n'$, значениям $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,707$ от максимальной - частоты $\omega = \omega_n' \pm \omega_n''$. Таким образом, измеряя амплитудно-частотную характеристику, можно найти собственные частоты системы проводящее кольцо - камера, и, следовательно, волновую часть импеданса.

б/ Результаты измерений

Схема установки показана на рис.2. Параметры кольца $r_0 = 32,55$ см, $a = 0,75$ см. Камера моделировалась двумя медными параллельными пластинами на расстоянии $h = 12$ см друг от друга. Размеры пластин выбраны таким образом, чтобы их резонансные частоты не помешали измерениям. Вариация расстройки между частотами кольца и инжектора осуществлялась за счет изменения длины инжектора.

Исследовалась также зависимость коэффициента связи от расстояния между кольцом и инжектором.

На рис. 3 показана зависимость собственных частот ($n=1$) аналоговой системы от длины инжектора при трех значениях расстояния между инжектором и кольцом (d).

Результаты измерений и расчета по формулам /13/ и /14/ приведены в табл.1.

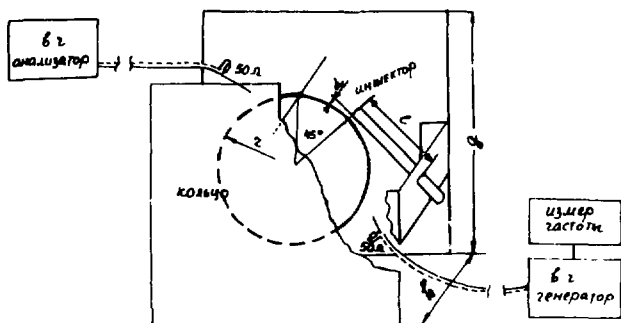


Рис. 2. Схема установки для измерения импеданса кольца в камере с инжектором.

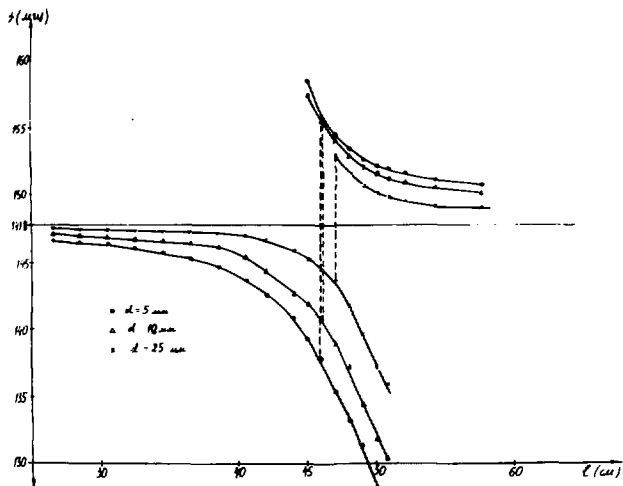


Рис. 3. Зависимость собственных частот аналоговой системы от длины инжектора.

Таблица

$d(\text{см})$	f_1 (МГц)	f_2	$f_2 - f_1$	$\frac{f_1 + f_2}{2}$	$K(\Omega)$	$\text{Im } Z_{\text{пер}}(\Omega)$
0,5	137,9	155,7	17,8	146,8	6,3	-11,8
1	140,8	155,5	14,7	148,15	4,3	4,14
2,5	143,6	152,9	9,3	148,25	1,7	5,39

Неприменимость формул /9/ в резонансном случае иллюстрируется рис. 4, на котором показана зависимость импеданса $Z_1(\omega_0)$ от длины инжектора l /то есть от резонансной частоты/, рассчитанная по формулам /9/ - x и /10/ - Δ при значении $d = 0,5$ см.

Резонанс с кольцом радиуса $r_0 = 32,55$ см имеет место при длине инжектора $l = 46$ см. Отношение $l/r_0 = 1,43$ отличается от значения $\pi/2$, соответствующего $l = \lambda/4 = \frac{\pi}{2}r_0$. Это объясняется эффективным удлинением инжектора за счет его емкостной связи с металлическим кольцом. Оценка по формуле, связывающей эффективную длину линии с емкостью нагрузки ^{15/}, дает величину $C = 2,5$ пФ. Такое же значение получается в результате прямой оценки емкости связи.

Для электронного кольца емкостное удлинение несущественно, и резонансный радиус определяется выражением $r_0 = \frac{2}{\pi}l$. В случае сложной конструкции инжектора его эффективную длину желательно измерять по собственным резонансным частотам в отсутствие имитирующего кольцо проводника.

Радиус кольца и длина /эффективная/ инжектора в установке для измерений приблизительно соответствует радиусу накопления и длине инжектора в модели коллективного ускорителя ^{16/}. Принимая во внимание значения коэффициента связи K /табл 1/ и добротности Q ($10^2 \div 10^3$), следует ожидать сильного резонансного взаимодействия электронного кольца и инжектора. Возможно, с этим взаимодействием связан так называемый аномальный захват ^{16/}.

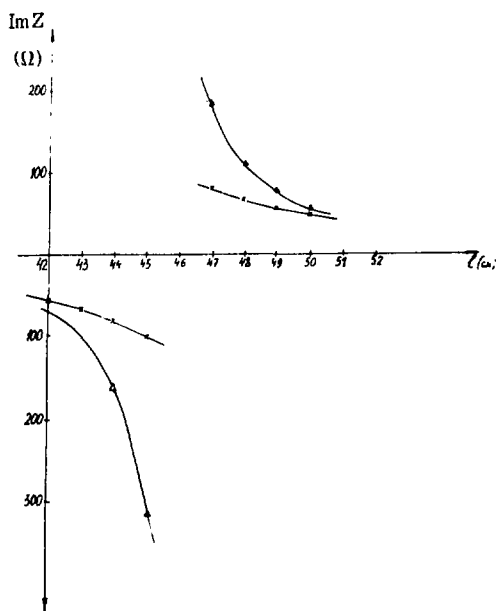


Рис. 4. Импеданс $\text{Im}Z_1(\omega_0)$ в зависимости от длины инжектора l , рассчитанный по формулам /9/ - x и /10/ - Δ при $d = 5$ мм.

Избежать резонанс между первой гармоникой колебаний в кольце и четверть-волновыми колебаниями на инжекторе можно за счет удлинения инжектора так, чтобы резонансный радиус $r_0 = \frac{2}{\pi} l$ стал больше радиуса инжекции /для установки в 'Б./ радиус инжекции равен 40 см/.

Однако при этом возможны резонансы между высшими модами колебаний на инжекторе и электронном кольце

$$\frac{2l}{n_{in}} = \frac{\pi r_0}{n_r},$$

где $n_{in} = 1, 3, 5, \dots$, $n_r = 1, 2, 3, \dots$ - номера гармоник колебаний на инжекторе и кольце.

Наиболее эффективный метод устранения резонансов, на наш взгляд, заключается в экранировании инжектора, как это сделано на установках в Беркли^{7/} и Гаршинге^{8/}.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность И.Н.Иванову и Э.А.Перельштейну за интерес к работе и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В случае конечной проводимости продольное электрическое поле на поверхности проводника не равно нулю и связано с протекающим по нему током соотношением

$$E_{\theta} = \frac{\xi}{2\pi\sigma a} \cdot \frac{J_0(\xi a)}{J_1(\xi a)} I, \quad /П.1/$$

следующим из теории скин-эффекта.

В формуле /П.1/ $\xi = \sqrt{2i}/\delta$, $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$, σ - проводимость и a - радиус поперечного сечения проводника, J_l - функция Бесселя порядка l .

Дисперсионное уравнение, определяющее собственные частоты системы, следует из условия совместности уравнений /1/ и /П.1/

$$Z_n(\omega) - \frac{\xi r_0}{\sigma a} \cdot \frac{J_0(\xi a)}{J_1(\xi a)} = 0. \quad /П.2/$$

Если глубина скин-слоя δ существенно меньше радиуса проводника ($\delta \ll a$), то уравнение /П.2/ упрощается

$$Z_n(\omega) - i \frac{\xi r_0}{\sigma a} = 0.$$

Сопротивление проводника дает добавку к импедансу, модуль которой на частоте $\omega = n\omega_0 = nc/r_0$ равен

$$|\Delta Z_n| = nZ_0 \frac{\delta}{\sqrt{2}a}.$$

Для медного кольца с большим радиусом $r_0 = 30$ см и малым $a = 1$ см эта поправка $|\Delta Z_n| \approx \sqrt{n} \cdot 0,15 \Omega$ пренебрежимо мала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Faltens A. et al. Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Berkeley, LBL-43, 1971.
2. Габанец И. ОИЯИ, Р9-12038, Дубна, 1979 г.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, Москва, 1957 г., с.378.

4. Масунов Э.С. ЖТФ, XLIV, 1974, с.1903.
5. Крылов Н.Н. Теоретические основы радиотехники. Изд. Мор. трансп., М.-Л., 1953 г.
6. Fartushny V.P. et al. Czech. Journ. of Physics, 1976, B26, p. 1200.
7. Hauptman J.M. et al. Proc. of the IX Intern. Conf. on High Energy Accelerators, Stanford, 1974, p. 240.
8. Andelfinger C. et al. ibid, p. 218.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 августа 1979 г.