

Объединенный  
институт  
ядерных  
исследований  
Дубна

822/2-80

25/2-80  
P9 - 12719

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн, Г.Д.Ширков

ИЗМЕНЕНИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ РАЗМЕРОВ  
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА  
ПРИ НАКОПЛЕНИИ ИОНОВ

1979

P9 - 12719

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн, Г.Д.Ширков

ИЗМЕНЕНИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ РАЗМЕРОВ  
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА  
ПРИ НАКОПЛЕНИИ ИОНОВ

*Направлено в ЖТФ*

Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А.,  
Ширков Г.Д.

P9 - 12719

Изменение среднеквадратичных размеров  
электронно-ионного кольца при накоплении ионов

Выводятся уравнения, описывающие изменение моментов второго порядка функций распределения ионов в кольце. Исследуются процессы накопления однозарядных ионов из нейтрального газа и последовательного увеличения зарядности ионов.

Из уравнений для моментов получается система уравнений, определяющих медленное изменение среднеквадратичных размеров кольца при накоплении ионов. Эти уравнения используются в расчете адиабатического сжатия электронного кольца в адгезаторе в атмосфере остаточного газа.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ

Препринт Объединенного института ядерных исследований, Дубна 1979

Kazarinov N.Yu., Perelshtein E.A.,  
Shirkov G.D.

P9 - 12719

Variation of Electron-Ion Ring RMS Dimensions  
during Ion Accumulation

The system of equations for the second order moments of the ion distribution functions in the electron-ion ring is derived. Processes of neutral gas ionization are considered. Equations describing slow time dependence of the minor electron-ion ring RMS dimensions during ionization are found. These equations have been used for computation of the electron ring adiabatic compression in the neutral gas atmosphere.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Параметры ионного пучка на выходе коллективного ускорителя тяжелых ионов /КУТИ/ <sup>1/</sup>, такие, как число частиц, эмиттанс, энергетический разброс, среднеквадратичные размеры и т.п., в основном определяются условиями накопления ионов электронным кольцом.

Накопление ионов может происходить при сжатии электронного кольца в определенной газовой атмосфере <sup>2/</sup> или с использованием пучков нейтральных атомов /молекул/, пересекающих электронное кольцо на конечной стадии сжатия <sup>3/</sup>.

В адгезаторе прототипа КУТИ электронные кольца формируются в атмосфере остаточного газа /азота/ с давлением  $p \approx 10^{-8} \div 10^{-7}$  Тор <sup>2/</sup>. При таком давлении остаточного газа становится существенным увеличение фокусирующих сил, действующих на электроны, связанное с накоплением ионов в процессе сжатия кольца. Этот эффект не учитывался в расчете адиабатического сжатия электронного кольца, проведенном в работах <sup>4,5/</sup>.

В существующих расчетах процесса накопления ионов электронными кольцами обычно предполагается, что размеры сечений электронного и ионного колец совпадают <sup>3,6-9/</sup>. Это приближение является довольно неточным. В <sup>10/</sup> было показано, что отношение среднеквадратичных размеров сечений ионного и электронного колец при накоплении однозарядных ионов из нейтрального газа равно  $1/\sqrt{2}$  и убывает с увеличением зарядности иона  $Z$ , как  $Z^{-1/4}$ . В этой работе, однако, не учитывалось изменение малого размера электронного кольца, связанное с изменением параметров внешнего электромагнитного поля и с увеличением ионной фокусировки.

В данной работе на основе метода моментов <sup>11,12/</sup> выводятся уравнения, определяющие изменение среднеквадратичных размеров электронно-ионного кольца при накоплении ионов. Полученные уравнения используются в расчете адиабатического сжатия электронного кольца в адгезаторе КУТИ в атмосфере остаточного газа.

1. В пренебрежении кривизной кольца уравнения движения ионов с зарядностью  $i$  записываются в следующем виде:

$$\ddot{x}_i - \frac{1}{AM\gamma_i} F_x^{ie} - \frac{1}{AM\gamma_i} \sum_{j=1}^Z F_x^{ij} = 0,$$

$$\ddot{z}_i - \frac{1}{AM\gamma_i} F_z^{ie} - \frac{1}{AM\gamma_i} \sum_{j=1}^Z F_z^{ij} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, Z.$$

/1/

Индекс  $e$  здесь и в дальнейшем означает, что данная величина относится к электронам;  $x$  - отклонение радиуса частицы от равновесного радиуса кольца  $R$ ;  $M$  - масса протона;  $Z, A$  - зарядность и массовое число атома накапливаемого нейтрального газа;  $\gamma_i$  - релятивистский фактор частицы;  $F_x^{ie}, F_z^{ie}$  - силы, обусловленные действием собственного электронного поля компонентов кольца, так, например,  $F_x^{ie}$  есть сила, действующая на ион зарядности  $i$  со стороны электронов. Уравнения движения электрона совпадают с использованными в работе /13/.

Будем считать, что вклад процессов, связанных с перезарядками ионов и многократной ионизацией /16/, мал. Тогда функции распределения ионов  $f_i$  удовлетворяют следующей цепочке кинетических уравнений:

$$\frac{df_i}{dt} = \rho_e(x, z) [\beta_i f_{i-1} - \beta_{i+1} f_i]; \quad i = 1, 2, \dots, Z,$$

/2/

где  $\beta_i = c\sigma_i$ ,  $\sigma_i$  - сечение однократной ионизации электронным ударом иона с зарядностью  $i-1$ , причем  $\sigma_{Z+1} = 0$ ;  $c$  - скорость света в вакууме;  $\rho$  - плотность частиц;  $f_0$  - функция распределения нейтралов.

Так же, как в работе /11/, введем моменты функций распределения  $f_i$ :

$$N_i = \int f_i dy; \quad M_i = \int Y Y^* f_i dy.$$

/3/

Здесь  $Y = \begin{pmatrix} x \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix}$  - вектор-столбец,

построенный из координат и скоростей частицы; знак \* означает транспонирование; интегрирование в /3/ проводится по всей области фазового пространства ( $dy = dx d\dot{v}$ ), занятого частицами. В отличие от работ /11-13/ в данной работе моменты  $M_i$  не нормируются на полное число частиц.

Матрицы  $M_i$  /аналогично /11/ / удобно представить в блочном виде:

$$M_i = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xv} \\ M_{xv}^* & M_{vv} \end{pmatrix}. \quad /4/$$

Будем считать, что функции распределения ионов имеют вид

$$f_i = C f_i (Y^* M_i^{-1} Y), \quad /5/$$

где  $C$  - нормировочная постоянная;  $M_i^{-1}$  - матрица, обратная к  $M_i$ . Для функций распределения ионов в классе /5/ движение ионов под действием силы  $F_i^* = (F_{x_i}, F_{z_i})$  можно представить как колебания в эффективном потенциале /12/:

$$U = -\frac{1}{2} X^* B_i X; B_i = \frac{1}{\Delta M Y_i} \overline{F_i X^* M_{xx_i}^{-1}}. \quad /6/$$

Тогда моменты /3/, /4/ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{dN_i}{dt} = \beta_i \tilde{Q}_i - \beta_{i+1} \tilde{Q}_{i+1}, \quad /7.1/$$

$$\frac{dM_{xx_i}}{dt} = M_{xv_i} + M_{xv_i}^* + \beta_i \tilde{M}_{xx_{i-1}} - \beta_{i+1} \tilde{M}_{xx_i}, \quad /7.2/$$

$$\frac{dM_{xv_i}}{dt} = M_{vv_i} + M_{xx_i} B_i^* + \beta_i \tilde{M}_{xv_{i-1}} - \beta_{i+1} \tilde{M}_{xv_i}, \quad /7.3/$$

$$\frac{dM_{vv_i}}{dt} = B_i M_{xv_i} + M_{xv_i}^* B_i^* + \beta_i \tilde{M}_{vv_{i-1}} - \beta_{i+1} \tilde{M}_{vv_i}, \quad /7.4/$$

$$\tilde{Q}_i = \rho_e(x, z) \rho_{i-1}(x, z); i = 1, 2, \dots, Z.$$

Волнистая черта над данной величиной здесь и в дальнейшем означает интегрирование по всей области конфигурационного пространства, занятого частицами. Матрицы  $\tilde{M}_{xx_i}$ ,  $\tilde{M}_{xv_i}$ ,  $M_{vv_i}$  являются элементами блочной матрицы  $\tilde{M}_i$ , построенной из моментов "источника" ионов:

$$\tilde{M}_i = \int Y Y^* \rho_e(x, z) f_i dy. \quad /8/$$

Выражение для элементов матриц  $\bar{M}_i$  легко находится, если плотность электронов мало меняется в области, занятой ионами. Это справедливо для равномерно-заряженного электронного кольца, а также в случае, если среднеквадратичные размеры сечения электронного кольца превосходят размеры сечения ионного кольца. В этих случаях матрица  $\bar{M}_i$  определяется по формуле

$$\bar{M}_i = \rho_e(x=0, z=0) M_i. \quad /9/$$

Более общие выражения для элементов матрицы  $\bar{M}_i$  находятся в Приложении.

Система /7/ вместе с начальными условиями для моментов

$$N_i(t=0) = 0; \quad M_i(t=0) = 0 \quad /10/$$

полностью определяет изменение во времени моментов /3/ при накоплении ионов.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи уравнений /7/. Будем считать, что все матрицы, входящие в /7/, диагональны. Это соответствует отсутствию поворотов сечения ионного кольца в плоскости  $(x, z)$ . Для моментов второго порядка, связанных с  $x$ -движением, имеем согласно /7/:

$$\frac{dx_i^2}{dt} = 2xv_i + \beta_i x_{i-1}^2 - \beta_{i+1} x_i^2, \quad /11.1/$$

$$\frac{dxv_i}{dt} = v_i^2 - \Omega_{x_i}^2 x_i^2 + \beta_i xv_{i-1} - \beta_{i+1} xv_i, \quad /11.2/$$

$$\frac{dv_i^2}{dt} = -2\Omega_{x_i}^2 xv_i + \beta_i v_{i-1}^2 - \beta_{i+1} v_i^2, \quad /11.3/$$

$$i = 1, 2, \dots, Z.$$

Аналогично записываются уравнения для моментов второго порядка, связанных с  $z$ -движением. Квадраты частот  $\Omega_{x, z_i}$  совпадают с диагональными элементами матрицы  $V_i$ , взятыми с обратным знаком.

Так же, как в работе /10/, рассмотрим накопление однозарядных ионов из нейтрального газа, пренебрегая процессами, связанными с увеличением зарядности ионов и увеличением ионной фокусировки. В этом случае можно считать:

$$\beta_2 = \beta_3 = \dots = 0; \quad \Omega_{x, z_i} = \text{const}. \quad /12/$$

Характерные скорости  $v_T$  /тепловые/ нейтралов в остаточном газе гораздо меньше скоростей однозарядных ионов в кольце. Кроме того, для параметров электронных колец, формируемых в адгезаторе КУТИ<sup>12/</sup>, длина ионизационного пробега нейтрала в электронном кольце  $l_n = v_T \beta_1 \rho_e (x=0, z=0)$  больше размера сечения электронного кольца /при накоплении азота/. Поэтому функцию распределения нейтрального газа можно с достаточной степенью точности представить в виде

$$f_0 = n_0 \delta(v_x) \delta(v_z); \quad n_0 = \text{const.} \quad /13/$$

Вычисление моментов "источника" ионов /8/ с функцией распределения /13/ дает в результате:

$$x_0^2 = N_e n_0 a_e^2; \quad xv_0 = 0; \quad v_0^2 = 0; \quad \tilde{Q}_1 = N_e n_0. \quad /14/$$

где  $N_e$  - число электронов в кольце;  $a_e$  - радиальный среднеквадратичный размер сечения электронного кольца.

Решение системы /7.1/, /11/ дает следующие зависимости от времени числа однозарядных ионов  $N_1$  и среднеквадратичного размера сечения ионного кольца  $a_1$ :

$$N_1 = \beta_1 N_e n_0 t, \quad /15.1/$$

$$a_1^2 = \frac{\overline{x_1^2}}{N_1} = \frac{a_e^2}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2\Omega_{x_1} t}{2\Omega_{x_1} t} \right). \quad /15.2/$$

Как видно из формулы /15.2/, среднеквадратичный размер  $a_1$  совершает затухающие колебания с частотой  $2\Omega_1$ . За время порядка нескольких периодов колебаний иона амплитуда колебаний уменьшается до нуля и среднеквадратичный размер выходит на предельное значение:

$$a_1 = a_e / \sqrt{2}. \quad /16/$$

Аналогичный результат в случае равномерно-заряженного электронного кольца был получен в работе /10/.

Особый интерес представляет изменение эффективного фазового объема /эмиттанса/ однозарядных ионов  $E_1$ , который определяется /11/ как

$$E_1^2 = -\frac{1}{N_1^2} (\overline{x_1^2 v_1^2} - (\overline{xv_1})^2). \quad /17/$$

Эффективный фазовый объем изменяется во времени по закону



$$E_1^2 = \frac{\Omega_{x_1}^2 a_e^4}{4} \left( 1 - \frac{\sin^2 \Omega_{x_1} t}{\Omega_{x_1}^2 t^2} \right). \quad /18/$$

Таким образом, эмиттанс  $E_1$  в процессе накопления однозарядных ионов возрастает от нуля до предельного значения

$E_{1k} = \frac{\Omega_{x_1} a_e^2}{2}$ . Рост эмиттанса, так же, как затухание колебаний среднеквадратичного размера, обусловлен постепенным заполнением частицами области фазового пространства с эффективной площадью, равной  $E_{1k}$ .

Представление движения ионов как колебаний в эффективном квадратичном потенциале /6/ дает возможность найти вид функции распределения однозарядных ионов. Проинтегрировав кинетическое уравнение /2/, получим следующее выражение для  $f_1$ :

$$f_1 = \beta_1 \int_0^t \rho_e [x_0(\tau), z_0(\tau)] f_0 [x_0(\tau), z_0(\tau), \frac{dx_0}{d\tau}, \frac{dz_0}{d\tau}] d\tau, \quad /19/$$

$$x_0(\tau) = x \cos \Omega_{x_1} \tau - \frac{v_x}{\Omega_{x_1}} \sin \Omega_{x_1} \tau,$$

$$z_0(\tau) = z \cos \Omega_{z_1} \tau - \frac{v_z}{\Omega_{z_1}} \sin \Omega_{z_1} \tau.$$

Подставим в формулу /19/ функцию распределения нейтралов /13/ и проинтегрируем по скоростям. В результате получим плотность однозарядных ионов  $\rho_1$ :

$$\rho_1 = \frac{N_1(t)}{N_e} \frac{1}{t} \int_0^t \rho_e \left( \frac{x}{\cos \Omega_{x_1} \tau}, \frac{z}{\cos \Omega_{z_1} \tau} \right) \frac{d\tau}{(\cos \Omega_{x_1} \tau \cos \Omega_{z_1} \tau)}, \quad /20/$$

где  $N_1(t)$  определено по формуле /15.1/.

В азимутально-симметричном случае ( $\rho_e(x, z) = \rho_e(x^2 + z^2)$ ,  $\Omega_{x_1} = \Omega_{z_1}$ ) в моменты времени, намного превышающие период ионных колебаний, плотность  $\rho_1$  можно представить в следующем виде:

$$\rho_1 = \frac{N_1(t)}{N_e} \frac{2}{\pi r} \int_0^\infty \rho_e(r^2 + u^2) du; \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}. \quad /21/$$

Для равномерно-заряженного электронного кольца с сечением радиуса  $a$  имеем /10/:

$$\rho_1 = \frac{N_1(t)}{\pi^3 R a^2} \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}. \quad /22/$$

Плотность однозарядных ионов, как это следует из /21/, имеет особенность в центре сечения кольца. Появление особенности связано с тем, что при выводе /19/ не учитывался разброс по скоростям нейтралов. Для функции распределения  $f_0$  и плотности электронов в кольце  $\rho_e$ , меняющихся как

$$f_0 = \frac{n_0}{2\pi v_T^2} e^{-\frac{v_x^2 + v_z^2}{2v_T^2}}; \quad \rho_e = \frac{N_e}{4\pi^2 R a_e^2} e^{-\frac{r^2}{2a_e^2}}, \quad /23/$$

вычисление плотности однозарядных ионов в соответствии с функцией распределения /19/ приводит к результату

$$\rho_1 = \frac{N_1(t)}{4\pi^2 a_e^2 \alpha R} e^{-\frac{r^2(1+1/\alpha^2)}{4a_e^2}} I_0\left[\frac{r^2}{4a_e^2}(1/\alpha^2 - 1)\right], \quad /24/$$

где  $I_0$  - модифицированная функция Бесселя,  $\alpha = \frac{v_T}{\Omega_{x_1} a_e}$ .

Рассмотрим далее процесс накопления двухзарядных ионов из однозарядных. Будем считать, что

$$\beta_1 = \beta_3 = \dots = 0; \quad \beta_2 \neq 0. \quad /25/$$

Среднеквадратичные размеры сечения ионного кольца /для однозарядных ионов/ меньше размеров сечения электронного кольца /16/. Поэтому при вычислении моментов второго порядка "источника" ионов /8/ можно, с достаточной степенью точности, пользоваться формулой /9/. Решение систем уравнений /7.1/, /11/ имеет следующий вид:

$$N_1 = N_1^0 e^{-t/\tau_2}, \quad N_2 = N_1^0 (1 - e^{-t/\tau_2}); \quad a_1 = \frac{a_e}{\sqrt{2}} = \text{const}, \quad /26/$$

$$a_2^2 = \frac{\overline{x_2^2}}{N_2} = \frac{a_1^2}{2} \left[ 1 + \frac{\Omega_{x_1}^2}{\Omega_{x_2}^2} + \left( 1 - \frac{\Omega_{x_1}^2}{\Omega_{x_2}^2} \right) \phi(t) \right],$$

где  $N_1^0$  - число однозарядных ионов в начальный момент времени,  $\tau_2 = [\beta_2 \rho_e(x=0, z=0)]$  - характерное время накопления двухзарядных ионов. Изменение среднеквадратичного размера  $a_2$  во времени определяется функцией  $\phi(t)$ :

$$\phi(t) = \frac{2\Omega_{x_2} \tau_2 \sin 2\Omega_{x_2} t + \cos 2\Omega_{x_2} t - e^{-t/\tau_2}}{(1 + 4\Omega_{x_2}^2 \tau_2^2)(1 - e^{-t/\tau_2})}. \quad /27/$$

Характерное время накопления ионов электронным кольцом в КУТИ гораздо больше периода ионных колебаний ( $\Omega_{x_2} \tau_2 \gg 1$ ). Поэтому согласно формулам /26/, /27/ среднеквадратичный размер  $a_2$  совершает затухающие колебания с частотой, равной  $2\Omega_{x_2}$ . В моменты времени  $t > \tau_2$  амплитуду колебаний можно считать равной нулю. При этом размер  $a_2$  стремится к предельному значению:

$$a_2^2 = \frac{a_1^2}{2} \left( 1 + \frac{\Omega_{x_1}^2}{\Omega_{x_2}^2} \right). \quad /28/$$

Рассматривая процесс накопления ионов электронным кольцом как последовательное увеличение зарядности, аналогично рассмотренным случаям, из формул /16/, /28/ можно получить рекуррентные соотношения, определяющие изменение среднеквадратичных размеров сечений ионных колец при накоплении:

$$a_{i+1}^2 = \frac{a_i^2}{2} \left( 1 + \frac{\Omega_{x_i}^2}{\Omega_{x_{i+1}}^2} \right); \quad a_1 = \frac{a_e}{\sqrt{2}}, \quad /29/$$

$$i = 1, 2, \dots, Z - 1.$$

Если плотность электронов не меняется по сечению кольца, то  $\Omega_{x_i}^2 / \Omega_{x_{i+1}}^2 = i / (i+1)$ . Тогда для больших зарядностей ионов ( $i \gg 1$ ) формулу /3.74/ можно представить в виде /10/:

$$a_i = a_1 i^{-1/4}. \quad /30/$$

Как уже отмечалось выше, процессы, связанные с накоплением ионов из остаточного газа, необходимо учитывать при расчете адиабатического сжатия кольца в камере адгезатора. Использование для таких расчетов уравнений для моментов /7/ неудобно, т.к. они содержат два, сильно отличающихся масштаба времени изменения среднеквадратичных размеров /первый - характерное время накопления ионов  $\tau_i$ , второй - период ионных колебаний/. Поэтому из системы /7/ необходимо получить уравнения, определяющие медленные /с характерным временем  $\sim \tau_i$  / изменения среднеквадратичных размеров.

Будем считать, что моменты второго порядка меняются медленно и выполняется условие

$$\frac{x_i^2}{\Omega_{x_i} x_i^2} \sim \frac{1}{\Omega_{x_i} \tau} = \epsilon \ll 1. \quad /31/$$

Тогда в уравнениях /11/ можно пренебречь производными более высокого порядка и считать  $\overline{xv_i} = 0$ . "Медленные" уравнения нетрудно получить, используя методику, предложенную в /13/. В уравнении для изменения полного фазового объема  $N_i^2 E_i^2 = \overline{x_i^2 v_i^2} - (\overline{xv_i})^2$ , вытекающем из уравнений /11/, пренебрежем членами  $\sim \epsilon^2$  и заменим согласно /11.2/  $\frac{1}{v^2}$  на  $\frac{\Omega_{x_i}^2}{x_i^2}$ . В результате получим:

$$\frac{d}{dt} (N_i \Omega_{x_i} a_i^2)^2 + \frac{2}{\tau_{i+1}} (N_i \Omega_{x_i} a_i^2)^2 = \quad /32.1/$$

$$= \frac{1}{\tau_i} N_i N_{i-1} a_i^2 a_{i-1}^2 (\Omega_{x_i}^2 + \Omega_{x_{i-1}}^2),$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{1}{\tau_i} N_{i-1} - \frac{1}{\tau_{i+1}} N_i, \quad /32.2/$$

$$i = 1, 2, \dots, Z,$$

где  $N_0$  - число нейтралов в объеме, занятом электронным кольцом;  $a_0 \equiv a_e$ ;  $\frac{1}{\tau_{Z+1}} \equiv 0$ ;  $\Omega_{x_0} = 0$ .

Характерные времена накопления ионов определяются в соответствии с формулой /9/:

$$\tau_i = [\beta_i \rho_e (x = 0, z = 0)]^{-1}. \quad /33/$$

Если процессами, связанными с накоплением ионов, можно пренебречь ( $\tau_i \rightarrow \infty$ ), то уравнения /32/ переходят в систему обычных адиабатических инвариантов бетатронных колебаний:

$$\Omega_{x_i} a_i^2 = \text{const.} \quad /34/$$

Отметим, что среднеквадратичные размеры /29/ являются решением системы /32/, если частоты  $\Omega_{x_i}$  и размеры электронного кольца не меняются.

Уравнения, определяющие медленное изменение аксиальных размеров сечения ионного кольца  $b_i$ , выводятся аналогично и получаются из /32.1/ заменой  $a_i$  на  $b_i$  и  $\Omega_{x_i}$  на  $\Omega_{z_i}$ .

Система /32/ может быть использована для расчета адиабатического сжатия электронного кольца в атмосфере остаточного газа. При этом ее необходимо дополнить уравнениями, определяющими изменение во времени равновесного радиуса  $R$ , релятивистского фактора  $\gamma_e$  размеров сечения электронного кольца, а также найти явный вид частот колебаний  $\Omega_{x,z,e,i}$  /6/.

Временную зависимость размеров электронного кольца можно получить с помощью адиабатических инвариантов, полученных в работе /13/:

$$\begin{aligned} \gamma_e \Omega_{z_e} b_e^2 = \text{const}, \quad \gamma_e \Omega_{x_e} a_b^2 = \text{const}, \\ a_c^2 = \frac{W^2 \omega_0^4}{(\Omega_{x_e}^2 m \gamma_e c)^2}, \quad a_e^2 = a_b^2 + a_c^2, \end{aligned} \quad /35/$$

где  $m$  - масса электрона,  $\omega_0$  - частота обращения электрона во внешнем магнитном поле,  $\sqrt{W^2}$  - разброс электронов по обобщенным азимутальным импульсам. Уравнения для  $R, \gamma_e$  приведены в работе /4/.

Для нахождения частот колебаний частиц  $\Omega_{x,z_e,i}$  будем считать, что плотности электронов и ионов имеют вид

$$\rho_{e,i} = \frac{N_{e,i}}{4\pi^2 R a_{e,i} b_{e,i}} e^{-\frac{x^2}{2a_{e,i}^2} - \frac{z^2}{2b_{e,i}^2}} \quad /36/$$

Вычисление частот колебаний /6/ для плотности частиц вида /36/ проводится так же, как в /14/:

$$\begin{aligned} \Omega_{x_i}^2 = \frac{ie^2}{\pi R A M \gamma_i} \left[ \frac{N_e}{\sqrt{a_e^2 + a_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})} - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^Z \frac{j N_j}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2} (\sqrt{a_i^2 + a_j^2} + \sqrt{b_i^2 + b_j^2})} \right], \quad /37/ \\ i = 1, 2, \dots, Z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{x_e}^2 = \omega_0^2 \nu_r^2 + \frac{e^2}{\pi R m \gamma_e} \sum_{i=1}^Z \frac{i N_i}{\sqrt{a_e^2 + a_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})}, \\ \nu_r^2 = 1 - \pi - \frac{e^2}{2\pi m c^2 \gamma_e^3} \frac{N_e R}{a_e (a_e + b_e)}, \end{aligned}$$

где  $\pi$  - показатель спада внешнего магнитного поля. Частоты аксиальных колебаний можно получить из /37/, поменяв местами величины, связанные с  $x, z$  - движением.

Уравнения /32/, /35/ вместе с формулами /33/, /37/ были положены в основу расчета адиабатического сжатия электронного кольца в адгезаторе КУТИ в атмосфере остаточного газа /азота/.

Зависимости от времени радиуса  $R$ , релятивистского фактора  $\gamma_e$  и показателя спада внешнего магнитного поля  $\nu$ , найденные с помощью программы расчета адиабатического сжатия электронного кольца /4.5/, аппроксимировались аналитическими функциями времени. Точность аппроксимации составляла 10% /8/.

Параметры электронного кольца соответствовали кольцам, формируемым в адгезаторе КУТИ /2/: начальный радиус  $R = 36$  см, размеры сечения кольца  $a_e = b_e = 2$  см, число электронов в кольце  $N_e = 10^{13}$ . Считалось, что в момент инжекции "синхротронный"  $a_c$  и "бетатронный"  $a_b$  радиальные размеры сечений /35/ совпадают. Давление остаточного газа в камере адгезатора в данном варианте расчета равнялось  $3 \cdot 10^{-8}$  Тор.

На рис. 1 показаны зависимости радиуса кольца  $R$ , полного числа ионов  $N$  и среднего заряда ионов  $\bar{Z}$  от времени сжатия кольца. Эти результаты находятся в достаточно хорошем согласии с результатами расчета процесса накопления ионов, проведенного в /6/. Как видно из графиков, за время сжатия кольца /- 2,3 мс /2/ / средняя зарядность ионов увеличивается до  $\bar{Z} = 5$  и нейтрализация электронного заряда достигает 40-50%. Дисперсия распределения ионов по зарядностям равна 0,6.

На рис. 2 приведены зависимости среднеквадратичных размеров сечений электронно-ионного кольца  $a_{e,i}$  от времени на конечной стадии сжатия. Аксиальные размеры кольца  $b_{e,i}$  примерно совпадают с радиальными. На начальной стадии сжатия, когда изменением параметров электронного кольца можно пренебречь, размеры ионного кольца находятся в хорошем согласии с /29/. В конце сжатия, как это следует из графиков, среднеквадратичные размеры ионов ( $a_i$ ) совпадают с размерами электронов. Объясняется это главным образом уменьшением частот колебаний ионов в результате нейтрализации заряда электронов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Представим функцию распределения /5/ в следующем виде:

$$f_i = - \frac{N_i}{\pi^2 |M_i|^{1/2}} \Phi'[Y * M_i^{-1} Y], \quad /П.1/$$

где  $M_i^{-1}$  - матрица, обратная к  $M_i$ ;  $|M_i|$  - определитель матрицы  $M_i$ ; штрих означает производную по аргументу.  $\Phi(x)$  - произвольная убывающая ( $\Phi' \leq 0$ ) функция, удовлетворяющая

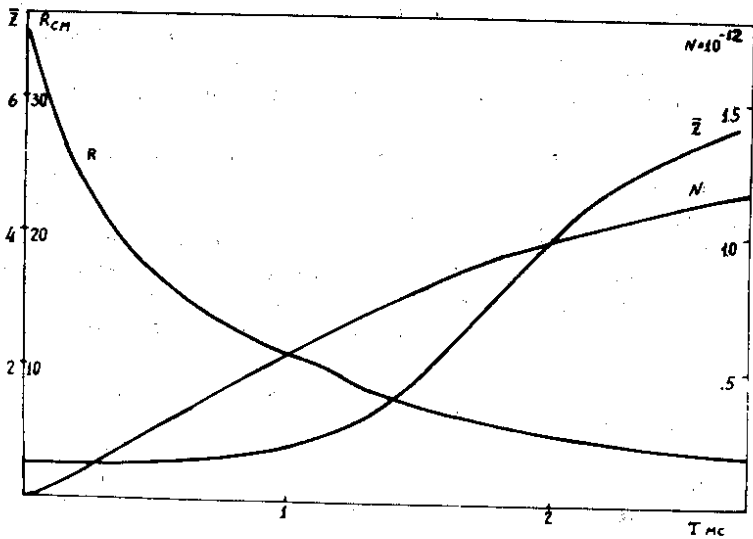


Рис. 1. Изменение радиуса кольца  $R$ , полного числа ионов  $N$  и средней зарядности ионов  $\bar{Z}$  в процессе сжатия кольца.

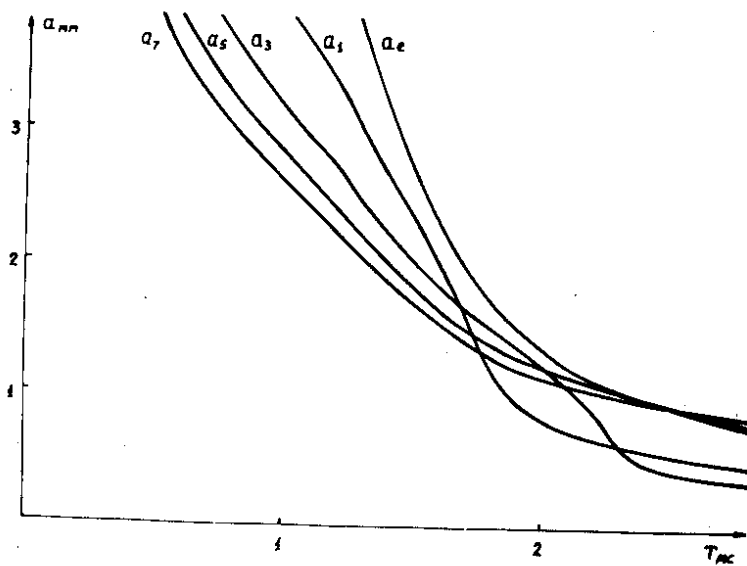


Рис. 2. Изменение среднеквадратичных размеров сечений электронно-ионного кольца на конечной стадии сжатия.

условиям нормировки:

$$\int_0^{\infty} \Phi(x) dx = 1, \quad \int_0^{\infty} x\Phi(x) dx = 2. \quad /п.2/$$

Матрицу  $\tilde{M}_i$  /8/ удобно разбить на блоки, аналогично формуле /4/:

$$\tilde{M}_i = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{xxi} & \tilde{M}_{xvi} \\ \tilde{M}_{xvi}^* & \tilde{M}_{vvi} \end{pmatrix}. \quad /п.3/$$

Индекс  $i$  у матриц в дальнейшем будем опускать.

Для вычисления элементов матрицы  $\tilde{M}$  представим квадратичную форму, стоящую в аргументе функций /П.1/, как:

$$I = Y^* M^{-1} Y = X^* Q X + X^* P V + V^* P^* X + V^* S V, \quad /п.4/$$

где матрицы  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  определены следующим образом<sup>/15/</sup>:

$$\begin{aligned} S^{-1} &= M_{vv} - M_{xv}^* M_{xx}^{-1} M_{xv}, \\ Q &= M_{xx}^{-1} + M_{xx}^{-1} M_{xv} S M_{xv}^* M_{xx}^{-1}, \\ P &= -M_{xx}^{-1} M_{xv} S. \end{aligned} \quad /п.5/$$

В интеграле /8/ сделаем замену переменных:

$$V = S^{-1/2} V' + M_{xv}^* M_{xx}^{-1} X, \quad /п.6/$$

где  $S^{-1/2} \cdot S^{-1/2} = S^{-1}$ .

В новых переменных квадратичная форма /П.4/ будет приведена к главным осям в пространстве скоростей:

$$I' = X^* M_{xx}^{-1} X + V'^* V'. \quad /п.7/$$

После чего интегрирование по скоростям в /8/ легко проводится и приводит к следующим выражениям для элементов матрицы  $\tilde{M}$ :

$$\tilde{M}_{xx} = \int \rho_i(x, z) \rho_e(x, z) X X^* dx dz,$$

$$\tilde{M}_{xv} = \tilde{M}_{xx} M_{xx}^{-1} M_{xv},$$



$$\tilde{M}_{vv} = M_{xv}^* M_{xx}^{-1} \tilde{M}_{xx} M_{xx}^{-1} M_{xv} + (M_{vv} - M_{xv}^* M_{xx}^{-1} M_{xv}) \phi,$$

$$\phi = \frac{1}{2} \int \rho_e(x, z) \int_0^{\infty} \rho_i(X^* M_{xx}^{-1} X + t) dt dx dz. \quad /П.8/$$

В случае медленного изменения моментов второго порядка  $\tilde{M}$  матрица  $\tilde{M}_{vv}$  с точностью до членов  $\sim \epsilon^2$  /31/ будет определяться следующей формулой:

$$\tilde{M}_{vv} = \phi M_{vv}. \quad /П.9/$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барабаш Л.С. и др. ОИЯИ, Р9-7697, Дубна, 1974.
2. Долбиллов Г.В. и др. ОИЯИ, Р9-11191, Дубна, 1978.
3. Георге В. и др. ОИЯИ, Р9-6555, Дубна, 1972.
4. Александров В.С. и др. ОИЯИ, Р9-9091, Дубна, 1975.
5. Александров В.С. и др. ОИЯИ, Р9-9215, Дубна, 1975.
6. Перельштейн Э.А., Ширков Г.Д. ОИЯИ, Р9-11412, Дубна, 1978.
7. Иовнович М.Л., Фикс М.М. АЭ, 1970, 6, с.429; ОИЯИ, Р9-4849, Дубна, 1969.
8. Дроздовский А.А. Препринт ИТЭФ-10, М., 1973.
9. Леманн Д. и др. ОИЯИ, 9-10744, Дубна, 1977.
10. Laslett L.J., LBL, ERAN-218, Berkeley, California, 1973.
11. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А., Шевцов В.Ф. ОИЯИ, Р9-10985, Дубна, 1977.
12. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-11337, Дубна, 1978.
13. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-11916, Дубна, 1978.
14. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-12441, Дубна, 1979.
15. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, "Наука", М., 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел  
6 августа 1979 года.