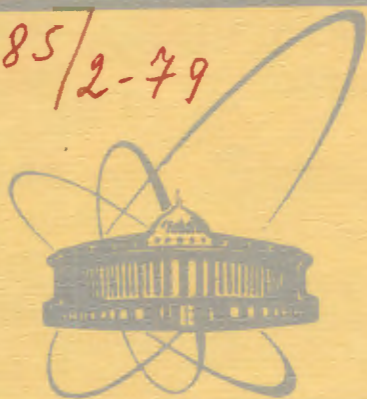


4485/2-79



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

T-19

5/11-79

P9 - 12463

Н. И. Тарантин

РАССМОТРЕНИЕ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ  
ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
В КРАЕВОМ ПОЛЕ ДИПОЛЬНОГО МАГНИТА

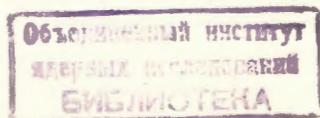
1979

P9 - 12463

Н.И.Тарантин

РАССМОТРЕНИЕ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ  
ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
В КРАЕВОМ ПОЛЕ ДИПОЛЬНОГО МАГНИТА

*Направлено в "International Journal of Mass Spectrometry  
and Ion Physics"*



Тарантин Н.И.

P9 - 12463

Рассмотрение во втором приближении движения заряженных частиц в краевом поле дипольного магнита

Рассмотрены с точностью до второго порядка малых величин радиальное и аксиальное движения заряженных частиц в краевом поле дипольного магнита с достаточно общими параметрами, а именно: дипольный магнит имеет неоднородное поле, наклонные входную и выходную границы в форме кривой второго порядка, область краевого поля переменной ширины. При рассмотрении использовано новое определение эффективной границы реального краевого поля дипольного магнита. Получено более полное представление о влиянии краевого поля на движение заряженных частиц, в частности, показана важность учета во втором приближении некоторых членов, формально относящихся к следующим приближениям.

Результаты представлены в удобном для практического использования виде.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований, Дубна 1979

Tarantin N.I.

P9 - 12463

A Second Order Approximation of Particle Motion in the Fringing Field of a Dipole Magnet

The radial and axial motion of charged particles in the fringing field of an arbitrary dipole magnet has been considered with an accuracy of the second order of small quantities. The dipole magnet has an unhomogeneous field and oblique entrance and exit boundaries in the form of second order curves. The region of the fringing field has a variable width. A new definition of the effective boundary of the real fringing field of the dipole magnet is used. A better understanding of the influence of the fringing magnetic field on the motion of charged particles in the pole gap of the dipole magnet has been obtained. In particular, it is shown that it is important to take into account, in the second approximation, some terms related formally to the next approximations. The results are presented in a form convenient for practical calculations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

## ВВЕДЕНИЕ

Краевое поле в окрестности входной и выходной границ дипольного магнита оказывает существенное влияние на движение заряженных частиц, и его действие должно тщательно учитываться при создании прецизионных магнитных анализаторов. Влияние краевого поля дипольного магнита на движение частиц неоднократно рассматривалось /см. работы <sup>1-12/</sup>, а также ссылки в некоторых из них на предшествующие работы тех же авторов/. Наиболее детально это рассмотрение было проведено в работе <sup>8/</sup> для однородного магнитного поля и в работе <sup>11/</sup> для неоднородного. Общие результаты этих двух работ не совпадают друг с другом, но в работе <sup>11/</sup> отмечается, что согласие результатов работы <sup>11/</sup> имеет место с "исправленными выражениями работы <sup>8/</sup>".

В настоящей статье проводится новое рассмотрение во втором приближении радиального и аксиального движений заряженных частиц в краевом поле дипольного магнита. Это рассмотрение ведется иным способом, чем в работах <sup>8,11/</sup>, и для дипольного магнита с несколько более общими, чем в работе <sup>11/</sup>, параметрами. Рассматривается дипольный магнит с неоднородным по радиусу аксиально-симметричным основным полем. Наклонные входная и выходная границы магнита имеют форму самой общей кривой второго порядка с изменяющейся кривизной. Ширина области краевого поля произвольно меняется вдоль границы полюса магнита, а на характер распределения краевого поля накладываются только очевидные физические требования.

При рассмотрении используется новое определение эффективной границы реального поля дипольного магнита.



## 2. КРАЕВОЕ ПОЛЕ ДИПОЛЬНОГО МАГНИТА

Рассматриваемая область движения заряженной частицы в окрестности входной границы дипольного магнита представлена на рис. 1. Там же показаны используемые системы координат и траектория частицы в радиальном и аксиальном сечениях. Положительные направления отсчета величин указаны стрелками. Эффективная граница реального магнитного поля определена соотношением

$$\phi_b(\rho) = \phi_{II}(\rho) - \int_{\phi_I(\rho)}^{\phi_{II}(\rho)} \frac{B_z(\rho, \phi, 0)}{(1+a_1\rho)B_0} d\phi, \quad /1/$$

где  $\phi_b(\rho)$  - уравнение эффективной границы в основной системе координат с осью в точке  $O_1$ ,  $\rho = (r - R_0)/R_0$  - относительное отклонение радиальной координаты  $r$  от оптической оси магнита  $r = R_0$ ,  $\rho \ll 1$ ;  $B_z(\rho, \phi, 0)$  - реальное краевое поле в медианной плоскости ( $z = 0$ ) дипольного магнита,  $(1+a_1\rho)B_0$  - основное поле в плоскости  $z=0$  межполюсного зазора магнита, взятое без избыточной точности для второго приближения,  $\phi_I(\rho)$  и  $\phi_{II}(\rho)$  - начальная и конечная угловые координаты области краевого поля, определяемые условиями  $B_z(\rho, \phi_I, 0) = 0$  и  $B_z(\rho, \phi_{II}, 0) = (1+a_1\rho)B_0$ .

$B_0 = \frac{m_0 v_0 c}{e_0 R_0}$ ;  $m_0, v_0, e_0$  - масса, скорость и заряд главной частицы,  $c$  - скорость света в вакууме.

Такое определение эффективной границы удобно тем, что оно отвечает методике измерения топографии радиально-неоднородного и аксиально-симметричного основного магнитного поля вдоль концентрических окружностей с постоянным значением магнитного поля. Это определение не требует введения каких-либо специальных допущений о характере изменения основного неоднородного магнитного поля при приближении к краю магнита, и этим отличается от определения границы идеального поля, данного в работе /11/.

Эффективная граница, определяемая сложными законами насыщения полюсных наконечников магнита, может иметь переменную кривизну и в общем случае во втором приближении

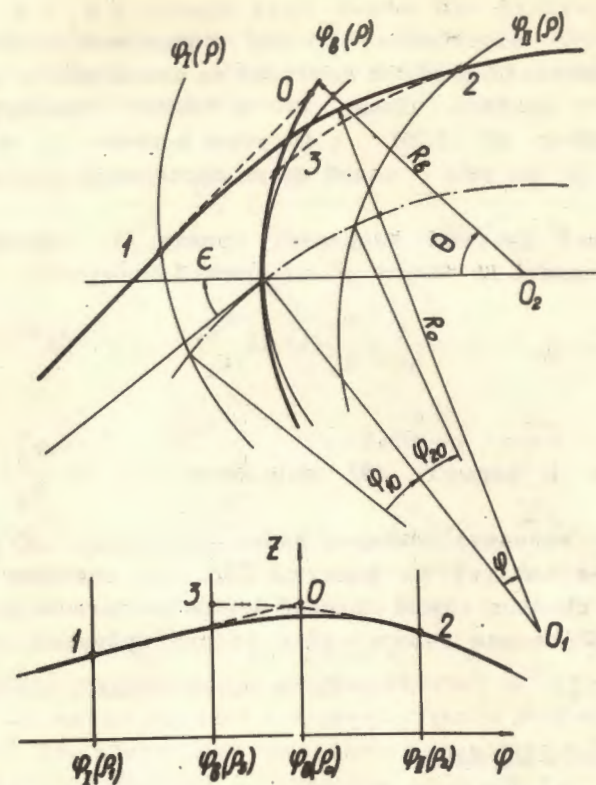


Рис.1. Цилиндрические системы координат  $(r, \phi, z)$  и  $(r, \theta, z)$  и траектории заряженной частицы в краевом поле входной границы дипольного магнита в радиальном и аксиальном сечениях. — реальная траектория частицы, - - - - условная траектория частицы, - - - - оптическая ось дипольного магнита с постоянным радиусом кривизны  $R_0$ .

описываться кривой второго порядка, уравнение которой во вспомогательной системе координат с осью в точке  $O_2$  есть

$$r = k\theta^2, \quad /2/$$

где

$$r = (r - R_b)/R_0, \quad r \ll 1, \quad \theta \ll 1.$$



В частных случаях это может быть прямая /  $R_b = \infty$  или  $k = R_0 / 2R_b$ , окружность /  $k = 0$  / с радиусом  $R_b$ , который считается положительным при выпуклой по отношению к дипольному магниту границе, эллипс ( $0 < k < 0,25$ ) парабола /  $k = 0,25$  /, гипербола ( $k > 0,25$ ) с фокусом в точке  $O_2$ , и снова эллипс ( $k < 0$ ), но уже с малой осью, проходящей через точку  $O_2$ .

В основной системе координат кривая /2/ описывается с точностью вплоть до членов  $\rho^2$  следующей формулой:

$$\phi_b(\rho) = f_1 \rho + f_2 \rho^2 = t\rho + \frac{1}{2c^3} \left[ \frac{R_0}{R_b} (1 - 2k \frac{R_0}{R_b}) - s(1 + c^2) \right] \rho^2, \quad /3/$$

где

$$t = \operatorname{tg} \epsilon, \quad s = \sin \epsilon, \quad c = \cos \epsilon.$$

Входящее в формулу /3/ выражение  $(1 - 2k \frac{R_0}{R_b}) / R_b$

представляет значение кривизны линии /2/ в точке  $r = 0$  и  $\theta = 0$ . Поэтому, как следует из формулы /3/, для описания формы эффективной границы самой сложной формы достаточно в рамках второго приближения использовать радиус кривизны границы

$$R_{b0} = R_b / (1 - 2k \frac{R_0}{R_b}) \quad \text{в точке ее пересечения с оптической}$$

осью дипольного магнита.

Область краевого поля может иметь различную ширину при разных  $\rho$ , а именно, с достаточной степенью точности можно положить

$$\phi_{II}(\rho) - \phi_I(\rho) = (1 + g\rho)(\phi_{20} - \phi_{10}), \quad /4/$$

$$\text{где } g = \text{const. } \phi_{10} = \phi_I(0), \quad \phi_{20} = \phi_{II}(0).$$

При постоянной линейной ширине области краевого поля, имеющей место, например, при равномерном насыщении полюсов магнита с однородным полем или специальном шиммировании магнитными экранами неоднородного поля,  $g = \frac{1}{c^2} (\frac{R_0}{R_b} - 1)$ .

Необходимые для определения траектории частицы  $r$ -ая и  $\phi$ -ая составляющие поля, а также аксиальная составляющая

вне меднанной плоскости находятся обычным способом из условий  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  и требований симметрии поля относительно меднанной плоскости

$$B_r(\rho, \phi, \zeta) = \zeta \frac{\partial B_z}{\partial \rho^3} - \frac{1}{6} \zeta \left[ \frac{\partial^3 B_z}{\partial \rho} + (1-2\rho) \frac{\partial^3 B_z}{\partial \rho \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial \rho^2} - 2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial \phi^2} \right], \quad /5a/$$

$$B_\phi(\rho, \phi, \zeta) = \zeta \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{1}{6} \zeta^3 \left( \frac{\partial^3 B_z}{\partial \rho^2 \partial \phi} + \frac{\partial^3 B_z}{\partial \phi^3} \right), \quad /5b/$$

$$B_z(\rho, \phi, \zeta) = B_z - \frac{1}{2} \zeta^2 \left[ \frac{\partial^2 B_z}{\partial \rho^2} + (1-2\rho) \frac{\partial^2 B_z}{\partial \rho \partial \phi^2} + \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{24} \zeta^4 \left[ \frac{\partial^4 B_z}{\partial \rho^4} + (1-4\rho) \frac{\partial^4 B_z}{\partial \phi^4} + 2(1-\rho) \frac{\partial^4 B_z}{\partial \rho^2 \partial \phi^2} - 2 \frac{\partial^3 B_z}{\partial \rho \partial \phi^2} + 2 \frac{\partial^3 B_z}{\partial \rho^3} \right]. \quad /5в/$$

Здесь  $\zeta = z/R_0$ ,  $B_z = B_z(\rho, \phi, 0)$ ;  $B_r$  и  $B_z$  определены с конечной точностью до малых величин в первой степени, а  $B_\phi$  - до малых величин в нулевой степени включительно. Эта точность достаточна для определения координат и углов наклона траектории частицы с точностью до второго порядка малых величин. К числу малых величин здесь отнесены  $\rho$ ,  $\zeta$  и  $\phi_{20} - \phi_{10}$ , меньшие единицы, а также числовые коэффициенты при отброшенных членах в рядах разложений /5/, равные  $1/120$ ,  $1/720$  и т.д. При оценке порядка малых величин учтено, что

$$\frac{\partial^n B_z}{\partial \phi^n} \sim \frac{1}{(\phi_{20} - \phi_{10})^n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^n B_z}{\partial \rho} \sim \frac{s^n}{c^n (\phi_{20} - \phi_{10})^n},$$

т.е. что эти производные являются существенно большими величинами, обратными малой величине в степени  $n$ .

Для унификации интегрирования при решении уравнений траектории частицы выразим  $B_z(\rho, \phi, 0)$  через функцию распределения краевого поля вдоль оптической оси дипольного магнита

$$B_0 b(\phi) = B_z(0, \phi, 0).$$

где  $b(\phi)$  удовлетворяет следующим очевидным условиям:

$$b(\phi_{20}) = 1, \quad b(\phi_{10}) = \frac{d^n b(\phi_{10})}{d\phi^n} = \frac{d^n b(\phi_{20})}{d\phi^n} = 0 \quad /6/$$

для  $n = 1, 2, 3, \dots$

Из закономерностей магнитостатики следует, что функции распределения краевого поля в различных местах границы полюса  $B_z(\rho, \phi, 0)$  будут в пределах рассматриваемой точности идентичны, если величину краевого поля выразить в значениях основного поля, а угловую координату - в единицах угловой ширины краевого поля при заданном значении  $\rho$ . Поэтому можно положить

$$B_z(\rho, \phi, 0) = (1 + a_1 \rho) B_0 b(\Phi), \quad /7/$$

где

$$\Phi = [\phi - \phi_b(\rho)] / (1 + g\rho) = \phi - f_1 \rho - (f_1 g - f_2) \rho^2 - g\rho\phi. \quad /8/$$

Строгая справедливость соотношения /7/ очевидна в частном случае линейно-неоднородного поля и прямолинейной границы, ортогональной к оптической оси магнита, поскольку в этом случае ни одно из направлений  $\rho = \text{const}$  никак не выделено.

Из соотношения /7/ следует, что эффективная граница  $\phi_b(\rho)$  по отношению к границе краевого поля  $\phi_{II}(\rho)$  располагается так же, как  $\phi_I(\rho)$  по отношению к  $\phi_{II}(\rho)$ .

$$\begin{aligned} \phi_b(\rho) &= \phi_{II}(\rho) - \int_{\phi_I(\rho)}^{\phi_{II}(\rho)} \{(1 + a_1 \rho) B_0 b(\Phi) / [(1 + a_1 \rho) B_0]\} d\phi = \\ &= \phi_{II}(\rho) - \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} (1 + g\rho) b(\Phi) d\Phi, \end{aligned}$$

откуда, согласно /1/,

$$\phi_b(\rho) - \phi_{II}(\rho) = -(1 + g\rho) \phi_{20}. \quad /9/$$

Распределение краевого поля /7/ при различных значениях  $\rho$  показано на рис. 2.

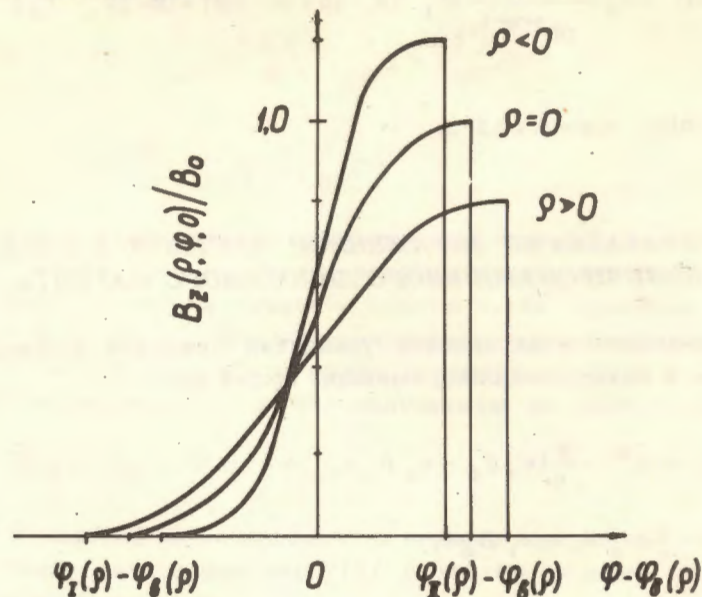


Рис. 2. Распределение краевого поля дипольного магнита при различных значениях  $\rho$  в соответствии с соотношением  $B_z(\rho, \phi, 0) = (1 + a_1 \rho) B_0 b(\Phi)$ , где

$$\Phi = \frac{\phi - \phi_b(\rho)}{1 + g\rho}, \quad a_1 < 0, \quad g > 0.$$

Входящие в формулы /5/ частные производные по  $\rho$  и  $\phi$  выразим через полные производные по  $\Phi$  функции /7/ с нужной точностью с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+m} B_z}{\partial \rho^n \partial \phi^m} &= (-1)^n B_0 \frac{d^{n+m} b}{d\Phi^{n+m}} \left\langle f_1^n \{1 + [a_1 - (n+m)g]\rho\} + \right. \\ &\left. + n f_1^{n-1} (2f_2 \rho + g\Phi) \right\rangle - \end{aligned}$$



$$-(-1)^n n B_0 \frac{d^{n+m-1} b}{d\Phi^{n+m-1}} \{f_1^{n-1} [a_1 - (n+m-1)g] + (n-1)f_1^{n-2} f_2\}, \quad /10/$$

где

$$b = b(\phi); \quad n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

### 3. ТРАЕКТОРИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В КРАЕВОМ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ДИПОЛЬНОГО МАГНИТА

Радиальное и аксиальное уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле, имеющие общий вид:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = \frac{e}{c}(v_z B_\phi - v_\phi B_z),$$

$$m\ddot{z} = \frac{e}{c}(v_\phi B_r - v_r B_\phi), \quad /11/$$

где  $m, v, e$  - масса, скорость и заряд рассматриваемой частицы, после замены производных по времени производными по  $\phi$  преобразуются в первом приближении в следующие уравнения траектории частицы:

$$\rho'' = 1 + \rho + \zeta' B_\phi / B_0 - (1 + 2\rho - \delta) B_z / B_0,$$

$$\zeta'' = (1 + 2\rho - \delta) B_r / B_0 - \rho' B_\phi / B_0, \quad /12/$$

где

$$\delta = (R - R_0) / R_0 = \frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta e}{e_0}, \quad R = \frac{m v c}{e B_0},$$

$$\Delta m = m - m_0, \quad \Delta v = v - v_0, \quad \Delta e = e - e_0,$$

штрихом обозначено дифференцирование по  $\phi$ .

Для решения уравнений /12/ используем метод последовательных приближений. В исходном приближении раскроем члены

/12/ с помощью /5/ и /10/ с точностью до малых величин в нулевой степени:

$$\rho'' = 1 - b + \frac{1}{2c^2} \zeta_1^2 \frac{d^2 b}{d\Phi^2} - \frac{1}{24c^4} \zeta_1^4 \frac{d^4 b}{d\Phi^4},$$

/13/

$$\zeta'' = -t \zeta_1 \frac{db}{d\Phi} + \frac{s}{6c^3} \zeta_1^3 \frac{d^3 b}{d\Phi^3}.$$

Здесь и ниже индекс при координате или производной указывает место на рис. 1, где взяты значения этих переменных.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения /13/ по  $\phi$  от  $\phi_1(\rho)$  до  $\phi$ . Для интегрирования выражений, зависящих от  $\Phi$ , используем связь между переменными  $\phi$  и  $\Phi$  и между дифференциалами  $d\phi$  и  $d\Phi$ , получаемую из определения /8/:

$$\Phi(\phi_1) = \phi_{10}, \quad \Phi(\phi_2) = \phi_{20}$$

и с точностью до малых величин первого порядка  $d\phi = d\Phi$ .

После интегрирования /13/ с учетом условий /6/ имеем с той же точностью

$$\rho' = \rho'_1 + \Phi - \phi_{10} - \int_{\phi_{10}}^{\Phi} b d\Phi + \frac{1}{2c^2} \zeta_1^2 \frac{db}{d\Phi} - \frac{1}{24c^4} \zeta_1^4 \frac{d^3 b}{d\Phi^3},$$

/14/

$$\zeta' = \zeta'_1 - t \zeta_1 b + \frac{s}{6c^3} \zeta_1^3 \frac{d^2 b}{d\Phi^2}.$$

Повторное интегрирование дает с точностью до малых величин второго порядка

$$\rho = \rho_1 + \rho'_1 (\Phi - \phi_{10}) + \frac{1}{2} (\Phi - \phi_{10})^2 - \int_{\phi_{10}}^{\Phi} \int_{\phi_{10}}^{\Phi} b d\Phi d\Phi + \frac{1}{2c^2} \zeta_1^2 b -$$

$$- \frac{1}{24c^4} \zeta_1^4 \frac{d^2 b}{d\Phi^2},$$

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta'_1 (\Phi - \phi_{10}) - t \zeta_1 \int_{\phi_{10}}^{\Phi} b d\Phi + \frac{s}{6c^3} \zeta_1^3 \frac{db}{d\Phi}.$$

/15/

При  $\Phi = \phi_{20}$  получаем искомые значения координат

$$\rho_2 = \rho_1 + \rho_1' (\phi_{20} - \phi_{10}) + \frac{1}{2} (\phi_{20} - \phi_{10})^2 - \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \int_{\phi_{10}}^{\Phi} b d\Phi d\Phi + \frac{1}{2c^2} \zeta_1^2,$$

$$\zeta_2 = \zeta_1 + \zeta_1' (\phi_{20} - \phi_{10}) - t \zeta_1 \phi_{20}. \quad /16/$$

В /16/ наряду с /6/ использовано определение /1/.

В следующем приближении повысим точность учета малых величин на один порядок и используем найденные решения /14/ и /15/:

$$\rho'' = 1 + \rho_1 - [1 + (2 + a_1)\rho_1 - \delta]b + \left[ \frac{s}{2c^3} + t(g - a_1) - \frac{1}{2c^3} \frac{R_0}{R_{b0}} \right] \zeta_1^2 +$$

$$+ \zeta_1 \zeta_1' \frac{db}{d\Phi} - t \zeta_1^2 b \frac{db}{d\Phi} + \left[ \frac{1}{2c^2} + gt\Phi \right] \zeta_1^2 + \frac{1}{c^2} (\Phi - \phi_{10}) \zeta_1 \zeta_1' \frac{d^2 b}{d\Phi^2} -$$

$$- \frac{s}{c^3} \zeta_1^2 \frac{d^2 b}{d\Phi^2} - \int_{\phi_{10}}^{\Phi} b d\Phi + (o)^3 \frac{d^2 b}{d\Phi^2} + (o)^4 \frac{d^3 b}{d\Phi^3} + [(o)^4 + (o)^5] \frac{d^4 b}{d\Phi^4} +$$

$$+ (o)^4 \left[ \frac{d^4 b}{d\Phi^4} \int_{\phi_{10}}^{\Phi} b d\Phi + \frac{d^3 b}{d\Phi^3} \cdot b + \frac{d^2 b}{d\Phi^2} \cdot \frac{db}{d\Phi} \right] +$$

$$+ (o)^5 \frac{d^2 b}{d\Phi^2} \cdot \frac{d^3 b}{d\Phi^3} + (o)^6 \frac{db}{d\Phi} \cdot \frac{d^4 b}{d\Phi^4}, \quad /17a/$$

$$\zeta'' = \{-t + [t^3 + t(g - a_1) - \frac{R_0}{c^3 R_{b0}}] \rho_1 + t\delta - \rho_1' - (1 + g)\Phi + \phi_{10}\} \zeta_1 \frac{db}{d\Phi} +$$

$$+ \frac{s}{6c^3} \zeta_1^3 \frac{d^3 b}{d\Phi^3} + a_1 \zeta_1 b + \frac{1}{c^2} \zeta_1 \frac{db}{d\Phi} \int_{\phi_{10}}^{\Phi} b d\Phi - t(\Phi - \phi_{10}) \zeta_1' \frac{db}{d\Phi} -$$

$$- \frac{1 + 2c^2}{6c^4} \zeta_1^3 \left( \frac{db}{d\Phi} \right)^2 - \frac{1 + 2s^2}{6c^4} \zeta_1^3 \frac{d^3 b}{d\Phi^3} \int_{\phi_{10}}^{\Phi} b d\Phi +$$

$$+ \frac{2 + c^2}{24c^6} \zeta_1^5 \frac{db}{d\Phi} \cdot \frac{d^3 b}{d\Phi^3} - \frac{1}{144c^6} \zeta_1^7 \left( \frac{d^3 b}{d\Phi^3} \right)^2 + \quad /17b/$$

$$+ (o)^3 \left( \frac{d^2 b}{d\Phi^2} + \Phi \frac{d^3 b}{d\Phi^3} \right) + (o)^4 \frac{d^3 b}{d\Phi^3},$$

$$d\phi = [1 + g\rho_1 + t(\rho_1' + \Phi - \phi_{10}) \int_{\phi_{10}}^{\Phi} b d\Phi + \frac{1}{2c^2} \zeta_1^2 \frac{db}{d\Phi} -$$

$$- \frac{1}{24c^4} \zeta_1^4 \frac{d^3 b}{d\Phi^3}] d\Phi. \quad /18/$$

В уравнениях /17/ символами  $(o)^n$ ,  $n = 3, 4, 5, 6$  обозначены постоянные малые величины  $n$ -го порядка, стоящие перед функциями, интегралы от которых по  $\Phi$  от  $\phi_{10}$  до  $\phi_{20}$  заведомо равны нулю в силу условий /6/.

Интегрирование уравнений /17/ с применением соотношения /18/ и интегрирования по частям дает с точностью до малых величин второго порядка

$$\rho_2' = (1 - t\phi_{10})\rho_1' - \phi_{10} - [(1 + a_1)\phi_{20} + (1 + g)\phi_{10}] \rho_1 + \delta\phi_{20} + \frac{1}{2} t\phi_{10}^2 +$$

$$+ \left[ \frac{s(1 + s^2)}{2c^3} - ta_1 - \frac{R_0}{2c^3 R_{b0}} \right] \zeta_1^2 - t^2 \zeta_1 \zeta_1', \quad /19a/$$

$$\zeta_2' = (1 + t\phi_{10}) \zeta_1' + \{-t + [t^3 - ta_1 - \frac{R_0}{c^3 R_{b0}}] \rho_1 + t\delta +$$

$$+ \frac{1 + s^2}{c^2} (\phi_{20} - \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} b^2 d\Phi) + \frac{\phi_{10}}{c^2} + a_1 \phi_{20} - \frac{\rho_1'}{c^2}\} \zeta_1 -$$

$$- \frac{2(1 + s^2)}{3c^4} \zeta_1^3 \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \left( \frac{db}{d\Phi} \right)^2 d\Phi - \frac{3 + 2s^2}{24c^6} \zeta_1^5 \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \left( \frac{d^2 b}{d\Phi^2} \right)^2 d\Phi -$$

$$- \frac{1}{144c^8} \zeta_1^7 \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \left( \frac{d^3 b}{d\Phi^3} \right)^2 d\Phi. \quad /19b/$$

Заметим, что коэффициенты при интегралах в двух последних членах решения /19b/ приближены в том смысле, что в них не представлены вклады от последующих неучтенных членов в разложениях /5/.



Для уточнения коэффициентов учтем в /5/ все члены нулевого порядка по отношению к  $\rho$ ,  $\zeta$  и  $\phi_{20} - \phi_{10}$ , независимо от величины числового коэффициента. Тогда, используя описанный выше способ и дополнительно метод индукции, получим

$$B_r = -t B_0 \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\zeta) \frac{d^{2i+1} b}{d\phi^{2i+1}}, \quad B_\phi = -B_r / t,$$

$$B_z = B_0 \sum_{i=0}^{\infty} q_i(\zeta) \frac{d^{2i} b}{d\phi^{2i}}, \quad \text{где } p_i(\zeta) = \frac{(-1)^i \zeta^{2i+1}}{c^{2i} (2i+1)!} \quad /20/$$

и

$$q_i(\zeta) = \frac{(-1)^i \zeta^{2i}}{c^{2i} (2i)!}.$$

Решим в первом приближении уравнения /12/, используя /20/, и построим уравнение второго приближения, полагая для упрощения выкладок  $\rho_1 = \rho'_1 = \zeta'_1 = \delta = 0$ , поскольку зависимость от этих параметров полностью представлена в /196/ в рассматриваемом приближении,

$$\zeta'' d\phi = -t \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\zeta_1) \frac{d^{2i+1} b}{d\phi^{2i+1}} +$$

$$+ t^2 \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\zeta_1) \frac{d^{2i+1} b}{d\phi^{2i+1}} [\Phi - \phi_{10} - \sum_{j=0}^{\infty} q_j(\zeta_1) \frac{d^{2j-1} b}{d\phi^{2j-1}}] -$$

$$- t^2 \sum_{i=0}^{\infty} q_i(\zeta_1) \frac{d^{2i+1} b}{d\phi^{2i+1}} \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\zeta_1) \frac{d^{2j-1} b}{d\phi^{2j-1}} \} d\phi \quad /21/$$

$$- [\Phi - \phi_{10} - \sum_{i=0}^{\infty} q_i(\zeta_1) \frac{d^{2i-1} b}{d\phi^{2i-1}}] \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\zeta_1) \frac{d^{2j+1} b}{d\phi^{2j+1}} d\phi.$$

Проинтегрировав уравнение /21/, получим частное решение, но в котором полностью учтено влияние всех слагаемых нулевого порядка в разложениях составляющих магнитного поля,

$$\zeta'_2 (\rho_1 = \rho'_1 = \zeta'_1 = \delta = 0) = \left( \frac{\phi_{10}}{c^2} - t \right) \zeta_1 +$$

$$+ \frac{1+s^2}{c^2} \left[ \zeta_1 \phi_{20} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{2i} \zeta_1^{2i+1}}{c^{2i} (2i+1)!} \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \left( \frac{d^i b}{d\phi^i} \right)^2 d\phi \right]. \quad /22/$$

В общую формулу /22/ вошли неполные аналогичные результаты, представленные в решениях уравнений аксиального движения в работе /8/ для  $i = 0, 1, 2, 3$  и в работе /11/ только для  $i = 0$ . Заметим, что из формулы /22/ следует неправомерность заключения, сделанного в работе /13/ относительно одной из формул работы /4/.

Результаты преобразования траектории частицы реальным протяженным краевым магнитным полем удобнее выразить как ступенчатое изменение некоторой условной траектории частицы на эффективной границе магнита. Эта условная траектория состоит из прямолинейного участка 1-0 /рис. 1/, отвечающего как будто бы движению частицы в пространстве с полным отсутствием магнитного поля, смещений  $\rho_3 - \rho_0$ ,  $\zeta_3 - \zeta_0$  и преломлений  $\rho'_3 - \rho'_0$ ,  $\phi_3 - \phi_0$ ,  $\zeta'_3 - \zeta'_0$  траектории на эффективной границе, и участка 3-2, обусловленного движением частицы в основном поле. Реальная и условная траектории на участках до точки 1 и после точки 2 совпадают.

Смещения и преломления условной траектории частицы найдем, рассматривая приведенным выше способом изменения траектории частицы при перемещении от точки 0 до точки 1 в пространстве без поля /интегрирование уравнений траектории по  $\Phi$  от 0 до  $\phi_{10}$ /, преобразования траектории в соответствии с решениями /16/, /19/, /22/ и, наконец, - при перемещении от точки 2 до точки 3 в поле  $B_z(\rho, \phi, \zeta) = (1+a_1\rho)B_0$ ,  $B_r(\rho, \phi, \zeta) = a_1\zeta B_0$ ,  $B_\phi(\rho, \phi, \zeta) = 0$  /интегрирование уравнений траектории по  $\Phi$  от  $\phi_{20}$  до 0/. Это поле можно назвать "условным" в отличие от иногда применяемого термина "идеальное", поскольку при стремлении к "идеальному" полю, обладающему



резким спадом  $V_z$  - составляющей поля на границе, составляющая  $V_\phi$  вне медианной плоскости стремится к бесконечности, а не к нулю из-за условия  $\text{rot } V = 0$ .

Смещения и преломления условной траектории на эффективной границе с точностью до малых величин второго порядка с учетом замечания /9/ равняются

$$\rho_3 - \rho_0 = \frac{1}{2} \phi_{20}^2 - \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} b d\Phi d\Phi + \frac{1}{2c^2} \zeta_0^2,$$

$$\rho_3' - \rho_0' = \left[ \frac{s(1+s^2)}{2c^3} - a_1 t - \frac{R_0}{2c^3 R_{b0}} \right] \zeta_0^2 - t^2 \zeta_0' \zeta_0', \quad /23a/$$

$$\phi_3 - \phi_0 = t \left( \frac{1}{2} \phi_{20}^2 - \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} b d\Phi d\Phi + \frac{1}{2c^2} \zeta_0^2 \right), \quad /23б/$$

$$\zeta_3 - \zeta_0 = 0.$$

$$\zeta_3' - \zeta_0' = \left\{ -t + \left[ t^3 - a_1 t - \frac{R_0}{c^3 R_{b0}} \right] \rho_0 + t \delta - \frac{\rho_0'}{c^2} \right\} \zeta_0 +$$

$$+ \frac{1+s^2}{c^2} \left[ \zeta_0 \phi_{20} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i \zeta_0^{2i+1}}{c^{2i} (2i+1)!} \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \left( \frac{d^i b}{d\Phi^i} \right)^2 d\Phi \right]. \quad /23в/$$

Результаты /23/, полученные для входной границы, легко распространяются и на выходную границу дипольного магнита.

Как видно из формулы /23а, б/, радиальное преломление условной траектории частицы  $\rho_3 - \rho_0$ ,  $\phi_3 - \phi_0$  не зависит от параметра  $g$ , характеризующего изменение протяженности области краевого поля, хотя этот параметр входит в промежуточное решение /19а/. Кривизна эффективной границы проявляется в радиальном и аксиальном преломлениях через величину радиуса кривизны  $R_{b0}$  эффективной границы в точке ее пересечения с оптической осью дипольного магнита.

Входящие в формулы /23/ интегралы до  $i=3$  выразим через параметры реального краевого поля. Для этого представим краевое поле рядом степенных функций

$$b(\phi) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \kappa^i, \quad \text{где } \kappa = \frac{\phi - \phi_{10}}{\phi_{20} - \phi_{10}}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1, \quad /24/$$

и потребуем выполнения условий /6/ для  $n=1, 2, 3$ . Решив полученную систему из восьми уравнений, найдем значения первых восьми коэффициентов:

$$b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0,$$

$$b(\phi) = 35\kappa^4 - 84\kappa^5 + 70\kappa^6 - 20\kappa^7. \quad /25/$$

На рис. 3 представлена функция  $b(\phi)$ , построенная по формуле /25/. Там же точками даны результаты одного из измерений экранированного краевого поля вдоль оптической оси в области входной границы ( $\epsilon = 0^\circ$ ) дипольного магнита масс-сепаратора /13/. Расстояние между экраном (0) и границей полюсного наконечника (N) равно высоте промежутка между полюсами  $/h = 80 \text{ мм}/$ . Как видно из рис. 3, кривая /25/ с хорошей степенью точности аппроксимирует реальное краевое поле.

Заметим, что более четко выраженной, чем полная ширина распределения краевого поля  $\phi_{20} - \phi_{10}$ , является величина, обратная первой производной от функции распределения краевого поля, взятая в точке, где  $b(\phi) = 0,5$ . Эта величина  $\sigma$  определяет протяженность краевого поля при линейной экстраполяции средней части функции распределения /см. рис. 3/. Поэтому входящие в /23/ интегралы выразим через  $\sigma$ , используя /25/ и следующее из /25/ соотношение  $\sigma = \frac{16}{35}(\phi_{20} - \phi_{10})$ :

$$\frac{1}{2} \phi_{20}^2 - \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} b d\Phi d\Phi = -0,07 \sigma^2, \quad /26а/$$

$$\zeta_0 \phi_{20} - \sum_{i=0}^3 \frac{2^i \zeta_0^{2i+1}}{c^{2i} (2i+1)!} \int_{\phi_{10}}^{\phi_{20}} \left( \frac{d^i b}{d\Phi^i} \right)^2 d\Phi =$$

$$= \zeta_0 \sigma \left[ 1,09 - 0,89 - 0,49 \left( \frac{\zeta_0}{\sigma c} \right)^2 - 0,32 \left( \frac{\zeta_0}{\sigma c} \right)^4 - 0,28 \left( \frac{\zeta_0}{\sigma c} \right)^6 \right]. \quad /26б/$$

Найденные значения интегралов /26/ уточняют величину отдельных членов. Так, например, члены в /26б/, содержащие  $\zeta_0^3$  и  $\zeta_0^5$ , оказываются существенными для траектории части-



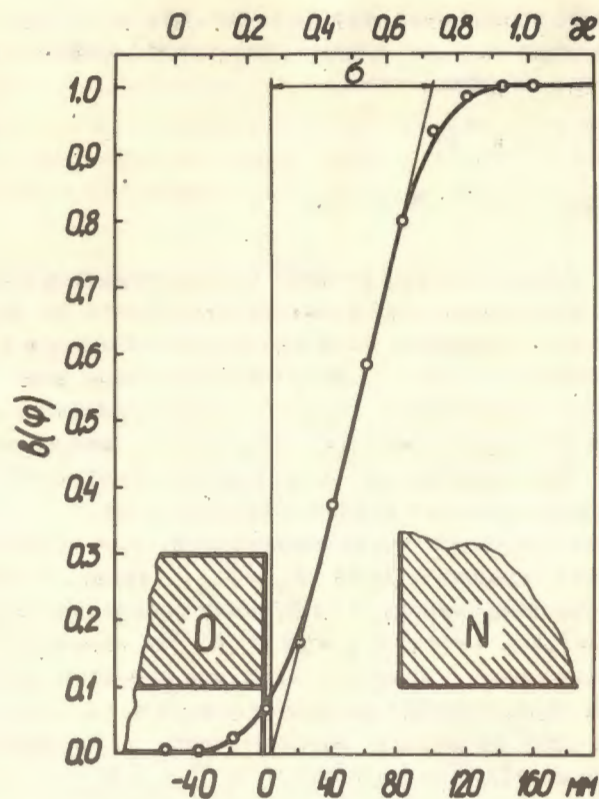


Рис. 3. Распределение краевого поля дипольного магнита вдоль оптической оси. Точки - результаты измерения для дипольного магнита масс-сепаратора<sup>/13/</sup>. Кривой представлено распределение  $b(\phi) = 35\kappa^4 - 84\kappa^5 + 70\kappa^6 - 20\kappa^7$ ,

где  $\kappa = \frac{\phi - \phi_{10}}{\phi_{20} - \phi_{10}}$ .

Кривая смещена с результатами измерений при условии равенства параметров  $\sigma$ .

цы, проходящей в краевом поле вблизи плоскостей полюсных наконечников магнита. При  $\zeta_0 = 0,6\sigma c$  /замечим, что формулы /5/, /20/, /22/ справедливы вплоть до  $\zeta_0 = \sigma c$ / кубический и пятый степени по  $\zeta_0$  члены в сумме равны по величине

и обратны по знаку, известному поправочному квадратичному члену  $0,20 \zeta_0 \sigma$ . Это значит, что фокусное расстояние аксиальной линзы краевого поля, равное без учета протяженности поля  $F = R_0/t$ , будет составлять, если учесть протяжен-

ность краевого поля,  $F = R_0 / (t - 0,20 \frac{1 + s^2}{c^2} \sigma)$  для частиц,

проходящих вблизи медианной плоскости. Для частиц, проходящих краевое поле вблизи границ межполюсного зазора, это расстояние, которое только условно можно назвать фокусным в силу нелинейного действия линзы, снова станет равным или меньшим  $F = R_0/t$ .

Все это показывает важность учета членов с  $i = 1, 2$  и т.д. в формуле /22/, только частично представленных в результатах работы<sup>/8/</sup> и отсутствующих в результатах работы<sup>/11/</sup>.

Как следует из /26а/, поправка для радиального движения, определяемая  $\sigma^2$ , мала. Поэтому чрезмерное ограничение протяженности краевого поля экранами, предпринимаемое для снижения неопределенности его действия, не является необходимым для радиального движения. В то же время это ограничение приводит к заметной нерегулярности аксиального действия краевого поля для удаленных от медианной плоскости частиц, обусловленной сильным прогибом магнитных силовых линий краевого поля вблизи границ межполюсного зазора под влиянием экрана.

Как видно из формулы /23 а,б/ и /26а/, смещение  $\rho_3 - \rho_0$  и преломление  $\phi_3 - \phi_0$  условных траекторий частиц, движущихся в медианной плоскости или пересекающих ее на эффективной границе / $\zeta_0 = 0$ /, оказывается одним и тем же для всех частиц, независимо от координаты  $\rho$ , и равным, по существу, малой величине третьего порядка /  $-0,07 \sigma^2$  /. Значение радиальных производных при этом сохраняется, т.е.  $\rho_3'' = \rho_0'$ . Все это, являющееся следствием выбора цилиндрической системы координат и нового определения /1/ эффективной границы, упрощает применение полученных формул преобразования для расчета оптических характеристик магнитных анализаторов.

Результаты настоящей работы были использованы для расчета магнитного монохроматора 3Q2D2Q- типа<sup>/14/</sup> пучка тяжелых ионов изохронного циклотрона У-400 ЛЯР ОИЯИ.

Автор благодарит академика Г.Н.Флерова за предложение рассмотреть вопросы коммутации и монохроматизации пучка изохронного циклотрона У-400, стимулировавшее выполнение настоящей работы, А.Б.Кузнецова и Н.Б.Рубина - за плодотворные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cotte M. *Ann.Phys.*, 1938, 10, p. 333.
2. Хургин Я. *ЖЭТФ*, 1939, 9, с. 824.
3. Reutersward C. *Akktiv Fysik*, 1951, 3, p. 53.
4. Афанасьев Н.Г. *Изв. АН СССР /сер.физ./*, 1960, 24, с.1157.
5. Тарантин Н.И., Демьянов А.В. *ЖТФ*, 1965, 35, с. 186.
6. Саулин В.Р. *Вестник ЛГУ /сер. физ. и хим./*, 1965, 4, с.49.
7. Малов А.Ф. *ЖТФ*, 1965, 35, с. 1617.
8. Ludwig R. *Z.Naturforsch.*, 1967, 22a, p. 553.
9. Enge H. *In. Focusing of Charged Particles*, 2, ed. Septier A., Academic Press, N.-Y., 1967, p. 203.
10. Басаргин Ю.Г. *ЖТФ*, 1968, 38, с. 1400.
11. Matsuda H., Wollnik H. *Nucl. Instr. & Meth.*, 1970, 70, p. 40.
12. Трубочев Г.М. и др. *ЖТФ*, 1978, 48, с. 1317.
13. Tarantin N.I. et al. *Nucl.Instr.Meth.*, 1965, 38, p. 103.
14. Тарантин Н.И. *ОИЯИ, Р9-11536*, Дубна, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 мая 1979 года.