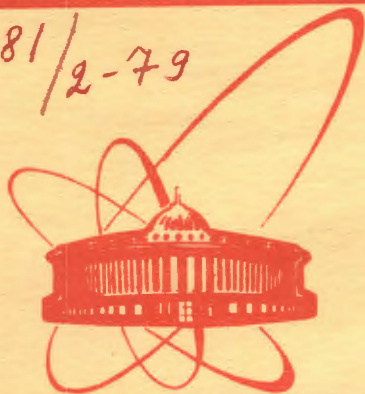


4481/2-79



объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

5/11-79

K-143

P9 - 12441

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ РАЗМЕРАХ
ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ КОЛЕЦ

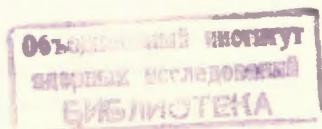
1979

P9 - 12441

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ РАЗМЕРАХ
ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ КОЛЕЦ

Направлено в ЖТФ



О среднеквадратичных размерах электронно-ионных колец

На основе метода моментов функции распределения выводятся уравнения, описывающие изменение во времени координат локальных центров масс и среднеквадратичных размеров ускоренного электронно-ионного кольца. Находятся адиабатические инварианты, обобщающие обычные инварианты бетатронных колебаний на случай двухкомпонентного кольца с несовпадающими размерами сечений электронного и ионного колец. Исследуются стационарные состояния ускоренных электронно-ионных колец. Из условия устойчивости стационарных состояний находится максимально возможный набор энергии ионов на единице длины ускорителя, учитывающий изменение размеров кольца при ускорении.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

On RMS Dimensions of Electron-Ion Rings

The electron-ion rings acceleration is treated by using the momentum method. The system of equations describing the local centers of mass coordinates and RMS-dimensions evolution has been obtained. When the RMS-dimensions of electron and ion rings do not coincide, the known adiabatic invariants are generalized. The accelerated electron-ion ring steady states are considered. The holding power is found with the account of the stability conditions and dimensions changing.

The investigation has been performed at the Department of New Methods Accelerations, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В расчетах адиабатического сжатия электронно-ионных колец, накопления ионов электронным кольцом и ускорения электронно-ионных колец обычно считается, что малые размеры электронного и ионного колец совпадают. В ряде случаев такое приближение оказывается неприменимым. Например, при сжатии электронно-ионного кольца отношение размеров сечений электронного и ионного колец меняется как $R^{1/4}$, где R - радиус кольца ^{/1/}.

Основной характеристикой, определяющей эффективность коллективного ускорителя тяжелых ионов /УТИ/ ^{/2/}, является максимально возможный набор энергии ионов на единице длины ускорителя. Для электронного кольца с равномерным распределением заряда по эллиптическому малому сечению с полуосями a и b , числом частиц N , максимально возможный набор энергии иона зарядности Z и с массовым числом A определяется формулой:

$$\Delta E_{\max} = k \frac{Z}{A} \frac{2v_e}{a+b} \left(\frac{\text{МэВ}}{\text{нукл} \cdot \text{см}} \right) \quad /1/$$

где $v_e = \frac{N}{2\pi R} \frac{e^2}{mc^2}$ - параметр Будкера; e, m - заряд и масса электрона; c - скорость света в вакууме; k - коэффициент запаса. Коэффициент $k \leq 1$ определяется максимально возможной поляризацией электронно-ионного кольца, т.е. такой, при которой электронно-ионное кольцо еще ускоряется как целое. Под поляризацией понимается расстояние между локальными центрами масс электронов и ионов.

При определении коэффициента запаса обычно считается, что малые размеры электронно-ионного кольца не зависят от поляризации /см., например, работы ^{/3,4/} /. Однако при ее

увеличении ослабевает фокусирующее действие компонентов кольца друг на друга. Это приводит к увеличению размеров кольца, и, следовательно, к уменьшению коэффициента запаса.

В данной работе на основе метода моментов функции распределения^{5-7/} выводятся уравнения, описывающие изменение во времени координат локальных центров масс и среднеквадратичных размеров ускоренного электронно-ионного кольца. Находятся адиабатические инварианты, обобщающие обычные инварианты бетатронных колебаний на случай двухкомпонентного кольца с несовпадающими размерами сечений электронного и ионного колец. Исследуются стационарные состояния ускоренных электронно-ионных колец. Из условия устойчивости стационарных состояний находится коэффициент запаса, учитывающий изменение размеров кольца при ускорении.

1. Рассмотрим азимутально-симметричное электронно-ионное кольцо, находящееся в однородном магнитном поле H_z и ускоряющееся внешним электромагнитным полем с эффективной напряженностью E_z . Уравнения движения частиц в цилиндрической системе координат (r, θ, z) на небольшом интервале времени, когда изменением массы частицы можно пренебречь, записываются в следующем виде:

$$\ddot{x}_e + \omega_r^2 x_e - \frac{1}{m\gamma_e} (F_x^{ee} + F_x^{ei}) = 0$$

$$\ddot{z}_e + \omega_z^2 (z_e - \bar{z}_e) - \frac{1}{m\gamma_e} (F_z^{ee} + F_z^{ei}) = \frac{eE_z}{m\gamma_e}$$

/2/

$$\ddot{x}_i - \frac{1}{AM\gamma_i} (F_x^{ii} + F_x^{ie}) = 0$$

$$\ddot{z}_i - \frac{1}{AM\gamma_i} (F_z^{ii} + F_z^{ie}) = - \frac{ZeE_z}{AM\gamma_i}$$

Индексы e, i здесь и в дальнейшем означают, что данная величина относится к электронам или к ионам, соответственно.

В уравнениях /2/ использованы обозначения: $x = r - R$ - отклонение радиуса частицы от равновесного; $\gamma_{e,i}$ - релятивистский фактор частицы; M - масса протона; $\omega_r = \frac{c}{R}$ - частота

обращения электрона в магнитном поле H_z ; ω_z - частота колебаний электрона относительно локального центра масс, определяемая внешними фокусирующими полями /фокусировка "белчым колесом" /8/, полем бегущей волны и т.п./, в самофокусирующемся кольце $\omega_z = 0$; F^{ei} , F^{ie} , F^{ee} , F^{ii} - силы, обусловленные действием собственного заряда компонентов кольца; так, например, F^{ei} есть сила, действующая на электрон со стороны ионов. Черта в уравнениях /2/ и в дальнейшем означает усреднение с функцией распределения частиц данного сорта:

$$\bar{z}_{e,i} = \frac{1}{N_{e,i}} \int z_{e,i} f_{e,i} dx dz dx dz \quad /3/$$

где $N_{e,i}$ - линейные плотности электронов и ионов.

Определим поляризации и среднеквадратичные размеры электронно-ионного кольца:

$$p_z = \bar{z}_e - \bar{z}_i; \quad p_r = \bar{x}_e - \bar{x}_i; \quad a_{e,i} = \sqrt{(x_{e,i} - \bar{x}_{e,i})^2}; \quad b_{e,i} = \sqrt{(z_{e,i} - \bar{z}_{e,i})^2} / 4/$$

Следуя работам^{5,6/}, из уравнений движения /2/ получаем уравнения, дающие изменение во времени поляризаций и среднеквадратичных размеров:

$$\ddot{p}_z + \frac{F_z^{ie}}{AM\gamma_i} (1 + \xi) = \frac{w(1 + \xi)(1 + f/\xi)}{1 - f}$$

$$\ddot{p}_r + \frac{F_r^{ie}}{AM\gamma_i} (1 + \xi) + \omega_r^2 \left(\frac{\xi}{1 + \xi} p_r + x_0 \right) = 0, \quad /5/$$

$$\ddot{x}_0 + \frac{\omega_r^2}{1 + \xi} \left(x_0 + \frac{\xi}{1 + \xi} p_r \right) = 0,$$

$$\ddot{a}_e + \omega_r^2 a_e - \frac{E_{xe}^2}{\gamma_e^2 a_e^3} - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e^3} \frac{1}{a_e + b_e} - \frac{1}{m\gamma_e} \frac{(x_e - \bar{x}_e) F_x^{ei}}{a_e} = 0,$$

$$\ddot{b}_e + \omega_e^2 b_e - \frac{E_{ze}^2}{\gamma_e^2 b_e^3} - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e^3} \frac{1}{a_e + b_e} - \frac{1}{m \gamma_e} \frac{(z_e - \bar{z}_e) F_z^{ei}}{b_e} = 0,$$

$$\ddot{a}_i - \frac{E_{xi}^2}{\gamma_i^2 a_i^3} - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f^2}{\xi} \frac{1}{a_i + b_i} - \frac{1}{AM \gamma_i} \frac{(x_i - \bar{x}_i) F_x^{ie}}{a_i} = 0,$$

$$\ddot{b}_i - \frac{E_{zi}^2}{\gamma_i^2 b_i^3} - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f^2}{\xi} \frac{1}{a_i + b_i} - \frac{1}{AM \gamma_i} \frac{(z_i - \bar{z}_i) F_z^{ie}}{b_i} = 0,$$

где $\xi = \frac{AM \gamma_i N_i}{m \gamma_e N_e}$ - фактор загрузки электронно-ионного кольца;

$f = \frac{ZN_i}{N_e}$ - фактор нейтрализации; $x_0 = \frac{\bar{x}_e + \xi \bar{x}_i}{1 + \xi}$ - x-координата центра масс сечения кольца; $w = (\ddot{\bar{z}}_e + \xi \ddot{\bar{z}}_i) / (1 + \xi)$ - ускорение центра масс кольца; $E_{xe,i} / \gamma_{e,i}$, $E_{ze,i} / \gamma_{e,i}$ -

эффективные фазовые объемы в фазовых плоскостях (x, \dot{x}) , (z, \dot{z}) . При выводе уравнений /5/ использовались следствия третьего закона Ньютона:

$$\overline{F_{ee}} = 0; \quad \overline{F_{ii}} = 0; \quad N_e \overline{F_{ei}} + N_i \overline{F_{ie}} = 0. \quad /5.1/$$

В случае ускорения в электрическом поле величина w определяется по формуле:

$$w = \frac{e E_z (1-f)}{m \gamma_e (1+\xi)}. \quad /6/$$

Если ускорение происходит в градиентном магнитном поле /2/ то уравнение для p_z нужно заменить на:

$$\ddot{p}_z + \frac{\overline{F_z^{ie}}}{AM \gamma_i} (1+\xi) = w (1+\xi), \quad w = \frac{e R}{2} \frac{\partial H_z}{\partial z} \frac{1}{1+\xi}. \quad /7/$$

При $\xi \gg 1$ /в УТИ это условие всегда выполняется /2/ / без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$.

Система уравнений для поляризаций и среднеквадратичных размеров будет замкнутой, если средние величины, входящие в /5/, выражаются через моменты функции распределения первого и второго порядков. Предположим, что плотности электронов и ионов имеют вид:

$$\rho_{e,i} = \frac{N_{e,i}}{2\pi a_{e,i} b_{e,i}} e^{-\frac{(x - \bar{x}_{e,i})^2}{2a_{e,i}^2} - \frac{(z - \bar{z}_{e,i})^2}{2b_{e,i}^2}}. \quad /8/$$

Вычисление средних величин с плотностью вида /8/ приводит к результату:

$$\overline{F_z^{ie}} = Z e^2 N_e \frac{p_z}{b_e^2 + b_i^2} I_1(b_e, b_i, p_z, p_r, \beta)$$

$$\overline{(z_e - \bar{z}_e) F_z^{ei}} = -Z e^2 N_i \frac{b_e^2}{b_e^2 + b_i^2} \{ I_1(b_e, b_i, p_z, p_r, \beta) -$$

$$- \frac{p_z^2}{b_e^2 + b_i^2} I_2(b_e, b_i, p_z, p_r, \beta) \}$$

$$I_1(b_e, b_i, p_z, p_r, \beta) = \int_0^1 \frac{\exp\left\{-\frac{u}{2(b_e^2 + b_i^2)} \left[p_z^2 + \frac{p_r^2}{1 + \beta u}\right]\right\}}{\sqrt{1 + \beta u}} du$$

$$I_2(b_e, b_i, p_z, p_r, \beta) = \int_0^1 \frac{u \exp\left\{-\frac{u}{2(b_e^2 + b_i^2)} \left[p_z^2 + \frac{p_r^2}{1 + \beta u}\right]\right\}}{\sqrt{1 + \beta u}} du$$

$$\beta = \frac{a_e^2 + a_i^2}{b_e^2 + b_i^2} - 1. \quad /9/$$

При усреднении удобно воспользоваться формулой для нахождения собственных электрических полей компонентов кольца, записанной в следующем виде^{9/}:

$$\mathcal{E}_x^e = 2\pi e a_e b_e (x - \bar{x}_e) \int_0^\infty \frac{\rho_e(T) ds}{(a_e^2 + s)^{3/2} (b_e^2 + s)^{1/2}}$$

$$T = \frac{(x - \bar{x}_e)^2}{a_e^2 + s} + \frac{(z - \bar{z}_e)^2}{b_e^2 + s}.$$

Аналогично находится z-компонент напряженности поля. Средние величины, относящиеся к x-движению, можно получить из формул /9/, поменяв местами размеры и поляризации, связанные с x, z-движением.

Уравнения /5/ вместе с формулами /9/ определяют изменение во времени среднеквадратичных размеров и поляризаций ускоренного электронно-ионного кольца.

II. В отсутствие внешних ускоряющих полей ($w=0$) поляризация

$$p_r = p_z = 0. \quad /10/$$

В этом случае интеграл $I_1(b_e, b_i, 0, 0, \beta)$, входящий в формулы /9/, легко находится:

$$I_1 = \frac{2\sqrt{b_e^2 + b_i^2}}{\sqrt{b_e^2 + b_i^2} + \sqrt{a_e^2 + a_i^2}}. \quad /11/$$

Система /5/ при этом имеет вид:

$$\ddot{a}_e + \omega_z^2 a_e - \frac{E_{ze}^2}{\gamma_e^2 a_e^3} - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e^3} \frac{1}{a_e + b_e} + \frac{\nu_e f c^2}{\gamma_e} \frac{2a_e}{\sqrt{a_e^2 + a_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})} = 0$$

$$\ddot{b}_e + \omega_z^2 b_e - \frac{E_{ze}^2}{\gamma_e^2 b_e^3} - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e^3} \frac{1}{a_e + b_e} + \frac{\nu_e f c^2}{\gamma_e} \frac{2b_e}{\sqrt{b_e^2 + b_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})} = 0$$

$$\ddot{a}_i - \frac{E_{xi}^2}{\gamma_i^2 a_i^3} - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f^2}{\xi} \frac{1}{a_i + b_i} + \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f}{\xi} \frac{2a_i}{\sqrt{a_e^2 + a_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})} = 0$$

$$\ddot{b}_i - \frac{E_{zi}^2}{\gamma_i^2 b_i^3} - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f^2}{\xi} \frac{1}{a_i + b_i} + \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f}{\xi} \frac{2b_i}{\sqrt{b_e^2 + b_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})} = 0. \quad /12/$$

Если среднеквадратичные размеры ионов и электронов совпадают, то уравнения /12/ переходят в уравнения Владимирского-Капчинского.

Система /12/ имеет интеграл:

$$\frac{\dot{a}_e^2}{2} + \frac{\dot{b}_e^2}{2} + \xi \frac{\dot{a}_i^2}{2} + \xi \frac{\dot{b}_i^2}{2} + \frac{\omega_r^2 a_e^2}{2} + \frac{\omega_z^2 b_e^2}{2} + \frac{E_{ze}^2}{2\gamma_e^2 a_e^2} + \frac{E_{ze}^2}{2\gamma_e^2 b_e^2} + \xi \frac{E_{xi}^2}{2\gamma_i^2 a_i^2} + \xi \frac{E_{zi}^2}{2\gamma_i^2 b_i^2} + U(a_e, b_e, a_i, b_i) = \text{const}$$

$$U(a_e, b_e, a_i, b_i) = \frac{2\nu_e f c^2}{\gamma_e} \ln(\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2}) - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e^3} \ln(a_e + b_e) - \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} f^2 \ln(a_i + b_i). \quad /13/$$

В случае самофокусирующегося кольца ($\omega_{r,z} = 0$) с совпадающими размерами электронов и ионов из формулы /13/ следует, что решения системы /12/ при выполнении условия самофокусировки Беннета-Будкера:

$$\frac{1}{\gamma_e^2} < f < 1 \quad /14/$$

соответствуют пространственно-ограниченным пучкам.

Заметим, что для кольца с несовпадающими электронными и ионными размерами система /12/ допускает устойчивые решения и в том случае, когда условие /14/ не выполняется. Так, при $a_e \ll a_i < \infty$, $b_e \ll b_i < \infty$ имеем, согласно /13/, $f < 2$, а при выполнении обратных неравенств $a_i \ll a_e < \infty$, $b_i \ll b_e < \infty - f > 1/2 \gamma_e^2$, что противоречит условию самофокусировки /14/. Это противоречие связано с тем, что уравнения /12/ получены в подходе, эквивалентном линейной аппроксимации собственных полей кольца /7,9/. Такая аппроксимация приводит к эффективному увеличению сил взаимодействия компонентов кольца, если размеры электронов и ионов существенно отличаются друг от друга.

В стационарном состоянии, а также при адиабатическом изменении параметров электронно-ионного кольца уравнения /12/ переходят в систему алгебраических уравнений, позволяющих определять среднеквадратичные размеры:

$$\begin{aligned} \gamma_{e,i} \Omega_{re,i} a_{e,i}^2 &= E_{xe,i} = \text{const}, \\ \gamma_{e,i} \Omega_{ze,i} b_{e,i}^2 &= E_{ze,i} = \text{const}, \end{aligned} \quad /15/$$

где

$$\Omega_{re}^2 = \omega_r^2 + \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \left[\frac{2f}{\sqrt{a_e^2 + a_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})} - \frac{1}{\gamma_e^2} \frac{1}{a_e(a_e + b_e)} \right]$$

$$\Omega_{ze}^2 = \omega_z^2 + \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \left[\frac{2f}{\sqrt{b_e^2 + b_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})} - \frac{1}{\gamma_e^2} \frac{1}{b_e(a_e + b_e)} \right]$$

$$\Omega_{ri}^2 = \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f}{\xi} \left[\frac{2}{\sqrt{a_e^2 + a_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})} - \frac{f}{a_i(a_i + b_i)} \right]$$

$$\Omega_{zi}^2 = \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f}{\xi} \left[\frac{2}{\sqrt{b_e^2 + b_i^2} (\sqrt{a_e^2 + a_i^2} + \sqrt{b_e^2 + b_i^2})} - \frac{f}{b_i(a_i + b_i)} \right]. \quad /16/$$

Формулы /15, 16/ являются обобщением обычных адиабатических инвариантов бетатронных колебаний на случай двухкомпонентных колец с несовпадающими размерами. Они могут быть использованы при расчете адиабатического сжатия двухкомпонентных колец в адгезаторах, а также в расчетах по накоплению ионов. Рассмотрение легко обобщается на случай многокомпонентных электронно-ионных колец.

Отметим, что для электронного кольца, имеющего разброс по азимутальным импульсам, инвариант, связанный с радиальным движением электронов, следует изменить на следующий /10/:

$$\gamma_e \Omega_{re} \left[a_e^2 - \frac{W^2}{(m \gamma_e c)^2} \frac{\omega_r^4}{\Omega_r^4} \right] = \text{const} \geq 0, \quad /17/$$

где $\overline{W^2}$ - среднеквадратичный разброс электронов по обобщенным моментам.

III. Предположим, что в момент времени $t = 0$ включается электрическое поле, медленно растущее во времени /время нарастания поля гораздо больше периода ионных колебаний/. Пренебрегая в уравнениях /5/ производными во времени, получим систему алгебраических уравнений для определения поляризации p_z и среднеквадратичных размеров в произвольный момент времени:

$$\frac{Z}{A} \frac{(1-f)}{1+f/\xi} \frac{\nu_e}{2} \sqrt{\frac{2}{b_e^2 + b_i^2}} \Psi(y, \beta) = \frac{w M \gamma_i}{2 m_e c^2} = \Delta E \left(\frac{M \Delta V}{\text{нукл} \cdot \text{см}} \right)$$

$$\omega_z^2 b_e^4 + \frac{\nu_e f c^2}{\gamma_e} \frac{b_e^4}{b_e^2 + b_i^2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \text{const}$$

$$\frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f}{\xi} \frac{b_i^4}{b_e^2 + b_i^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \text{const}$$

$$\omega_r^2 a_e^4 + \frac{\nu_e f c^2}{\gamma_e} \frac{a_e^4}{a_e^2 + a_i^2} I_1(a_e, a_i, 0, p_z, -\frac{\beta}{\beta+1}) = \text{const}$$

$$\frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f}{\xi} \frac{a_i^4}{a_e^2 + a_i^2} I_1(a_e, a_i, 0, p_z, -\frac{\beta}{\beta+1}) = \text{const}$$

$$\Psi(y, \beta) = y I_1(b_e, b_i, p_z, 0, \beta); \quad y = \frac{p_z}{\sqrt{2(b_e^2 + b_i^2)}} \quad /18/$$

При выводе уравнений /18/ мы считали $p_r = 0$ и пренебрегли действием компонентов кольца самих на себя, что справедливо при выполнении неравенств $1/\gamma_e^2 \ll f \ll 1$.

При малых ускоряющих полях ($y \ll 1$), когда в уравнениях /18/ можно ограничиться линейным разложением по поляризации, уравнения для среднеквадратичных размеров не зависят от поляризации и совпадают с уравнениями /15, 16/. Следовательно, при малых ускорениях центра масс кольца среднеквадратичные размеры слабо зависят от величины ускорения. Этот результат подтверждается расчетами стационарных состояний ускоренных электронно-ионных колец, проведенными в работах /11-14/.

При ускорении самофокусирующегося кольца ($\omega_z = 0$) мы имеем, согласно уравнениям /18/,

$$\frac{b_i}{b_e} = \kappa = \text{const}; \quad b_e^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \text{const} = b_{e0}^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{t=0} \quad /19/$$

Индексом "0" здесь и в дальнейшем отмечаются начальные значения параметров. Используя /19/, нетрудно получить выражение для набора энергии:

$$\Delta E = \frac{Z}{A} \frac{(1-f)}{1+f/\xi} \frac{\nu_e}{2b_{e0}} \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2}} \left(\frac{2}{\sqrt{1+\beta_0}+1}\right)^{-1/2} \Psi(y, \beta) \sqrt{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} \quad /20/$$

Для того чтобы определить максимально возможный набор энергии ΔE_{max} , необходимо исследовать устойчивость решений системы /18/. Частота колебаний электронов обычно гораздо больше частоты колебаний ионов /в УТИ, например, выполняется неравенство $\xi \gg 1$ /, поэтому проблема устойчивости сводится к рассмотрению электронных колебаний. Положим,

для простоты, что стационарные размеры электронного и ионного колец совпадают. Тогда линеаризованные уравнения /5/ имеют вид:

$$\Delta \ddot{p}_z + Q_e^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Delta p_z - 2Q_e^2 [\Psi + y \frac{\partial \Psi}{\partial y}] \Delta b_e = 0$$

$$\Delta \ddot{b}_e + 4\omega_z^2 \Delta b_e + 2Q_e^2 [\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{y}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}] \Delta b_e + \frac{Q_e^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Delta p_z = 0$$

$$Q_e^2 = \frac{\nu_e c^2}{\gamma_e} \frac{f}{2b_e^2} \quad /21/$$

Собственные частоты колебаний ω системы /21/ находятся из уравнения:

$$\begin{aligned} & [(\frac{\omega}{Q_e})^2 - \frac{\partial \Psi}{\partial y}] [(\frac{\omega}{Q_e})^2 - 4(\frac{\omega_z}{Q_e})^2 - 2(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{y}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2})] + \\ & + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} [\Psi + y \frac{\partial \Psi}{\partial y}] = 0. \end{aligned} \quad /22/$$

В отсутствие внешней фокусировки корни уравнения /22/ действительны при выполнении условия:

$$2(\frac{\partial \Psi}{\partial y})^2 + \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \geq 0. \quad /23/$$

Таким образом, решения системы /18/ будут устойчивы при увеличении поляризации /или, что то же самое, при увеличении ускорения/ до предельного значения $y_{\text{max}1}$, определяемого равенством:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} \Psi) \Big|_{y=y_{\text{max}1}} = 0. \quad /24/$$

Это равенство является следствием /23/.

На рис. 1 показана зависимость y_{\max_1} от параметра β /кривая 1/. Как видно из графика, y_{\max_1} слабо зависит от β и примерно равен $\frac{1}{2}$. Это соответствует предельно допустимой поляризации, равной среднеквадратичному размеру сечения.

Максимальный набор энергии на один нуклон на единице длины определяется при этом следующим образом:

$$\Delta E_{\max} = \frac{Z}{A} \frac{(1-f)}{1+f/\xi} \frac{v_e}{2b_{e_0}} \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2}} \left(\frac{2}{\sqrt{1+\beta}+1}\right)^{-1/2} \left[\Psi \sqrt{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}\right]_{y=y_{\max_1}} \quad /25/$$

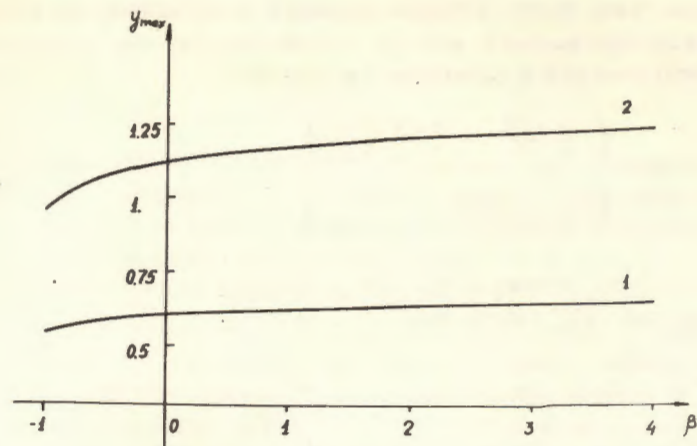
Предположим, что в начальный момент времени выполнялось соотношение:

$$\frac{a_{e_0}}{a_{i_0}} = \frac{b_{e_0}}{b_{i_0}} \quad /26/$$

Сравнивая формулы /1/ и /25/, получим, используя /26/, выражение для коэффициента запаса самофокусирующегося кольца*:

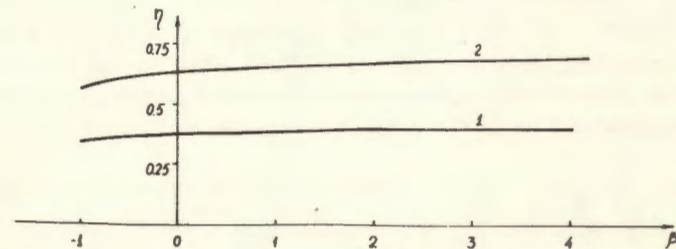
$$k = \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2}} \frac{1-f}{1+f/\xi} \left(\frac{1+\sqrt{1+\beta}}{2}\right)^{3/2} \left[\sqrt{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} \Psi\right]_{y=y_{\max_1}} = \frac{(1-f)}{1+f/\xi} \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2}} \eta_1 \quad /27/$$

* Формула /1/ определяет максимальный набор энергии для равномерно заряженного электронного кольца эллиптического сечения с полуосями эллипса a и b . В этом случае среднеквадратичные размеры определяются равенствами $2a_e = a$; $2b_e = b$. Эти равенства использовались при выводе /27/. Отметим, что при таких среднеквадратичных размерах линейный член разложения электрического поля кольца с плотностью /8/ в два раза превышает поле равномерно заряженного кольца эллиптического сечения с полуосями a и b .



На рис. 2 показана зависимость коэффициента η_1 от параметра β /кривая 1/. Параметрам УТИ соответствует область $\beta \leq 0$. Как видно из графика, коэффициент η_1 меняется в пределах $\sim \frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$.

Из формулы /27/ следует, что коэффициент запаса увеличивается с уменьшением параметра κ , т.е. для повышения эффективности ускорения выгодно иметь размер ионов меньшим размером электронов.



При ускорении в спадающем магнитном поле /7/ формула /27/ переписывается следующим образом:

$$k = \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2}} \eta_1$$

Рассмотрим далее влияние внешней фокусировки на ускорение электронно-ионного кольца. Предположим, что фокусировка достаточно сильная, и выполняется условие:

$$\frac{Q_e^2}{Q_e^2} \gg \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{y}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right| \\ \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right| \end{array} \right\} \quad /28/$$

При выполнении неравенства /28/ собственные частоты колебаний уравнений /21/ имеют вид:

$$\omega_1^2 = Q_e^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad \omega_2^2 = 4\omega_z^2. \quad /29/$$

Таким образом, устойчивое ускорение колец будет при $y \leq y_{\max 2}$, где $y_{\max 2}$ определен как:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=y_{\max 2}} = 0. \quad /30/$$

При наличии внешней фокусировки /28/ устойчивость электронно-ионного кольца будет определяться устойчивостью колебаний ионных размеров. С увеличением поляризации ионные размеры растут гораздо медленнее, чем в самофокусирующемся кольце /примерно как $(\partial \Psi / \partial y)^{-1/4}$ /, и их можно считать постоянными практически до выполнения условия /30/.

На рис. 1 представлена также зависимость $y_{\max 2}$ от параметра β /кривая 2/. Как видно из графика, $y_{\max 2} - 1$ и слабо зависит от β . Это значение соответствует предельной поляризации, равной удвоенному среднеквадратичному размеру электронов. Максимальный набор энергии в этом случае равен:

$$\Delta E_{\max} = \frac{Z}{A} \frac{(1-f)}{1+f/\xi} \frac{v_e}{2b_{e0}} \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2}} \Psi(y_{\max 2}, \beta), \quad /31/$$

и для коэффициента запаса при электрическом способе ускорения имеем, согласно формулам /1/, /26/, /31/:

$$k = \frac{1-f}{1+f/\xi} \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2}} \frac{1+\sqrt{1+\beta}}{2} \psi(y_{\max 2}, \beta) =$$

$$= \frac{1-f}{1+f/\xi} \sqrt{\frac{2}{1+\kappa^2}} \eta_2. \quad /32/$$

Зависимость коэффициента η_2 от параметра β приведена на рис. 2 /кривая 2/. Из графика видно, что в области $\beta \leq 0$ коэффициент η_2 меняется в пределах $0,5 \div 0,7$. Следовательно, применение внешней фокусировки приводит к дополнительному выигрышу в наборе энергии по сравнению с ускорением самофокусирующегося кольца. Этот факт подтверждается численным моделированием ускорения электронно-ионного кольца в работе /14/. Так же как при ускорении самофокусирующегося кольца, для повышения эффективности ускорителя выгодно иметь размеры ионов, много меньшие электронных. Например, при $\kappa = 0$ коэффициент может достигать значений $0,7 \div 0,9$.

В заключение авторы выражают благодарность Ю.И.Алексахину за помощь в работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Laslett L.J. Symposium on Electron Ring Accelerators, Berkeley, California, 1968, pp. 273-274.
2. Барабаш Л.С. и др. ОИЯИ, Р9-7697, Дубна, 1974.
3. Капчинский И.М. Препринт ИТЭФ-12, М., 1975.
4. Иванов И.Н., Перельштейн Э.А., Саранцев В.П. ОИЯИ, Р9-5535, Дубна, 1971.
5. Дымников А.Д., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-10620, Дубна, 1977; Nuclear Instruments and Methods, 1978, 148(3), p. 567.
6. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А., Шевцов В.Ф. ОИЯИ, Р9-10985, Дубна, 1977.
7. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-11337, Дубна, 1978.
8. Долбилев Г.В. и др. ОИЯИ, Р9-4737, Дубна, 1969.
9. Sacherer F.J. In Proceedings of 1971 Particle Accelerator Conference, Chicago, IEEE Trans., NS-18, 3, p. 1105.
10. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-11916, Дубна, 1978.

11. Перельштейн Э.А., Ярковой О.И. ОИЯИ, Р9-4423, Дубна, 1969. ЖТФ, XL1, 1971, 1, с. 23-32.
12. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. Труды I Симпозиума по коллективным методам ускорения. ОИЯИ, Д9-6707, Дубна, 1972, с. 30-33.
13. Бархударян А.В., Кошкарев Д.Г., Николаева Л.П. Там же, с. 64-67.
14. Hofmann I In Proceedings IX-th Interactional Conference on High Energy Accelerators, Stanford, California, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 мая 1979 года.