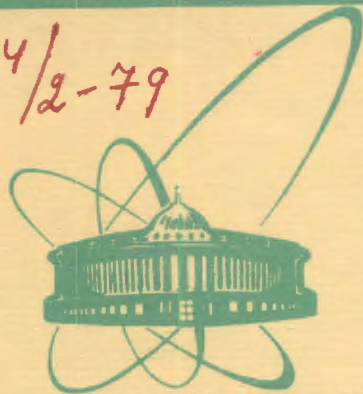


3144/2-79



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

С3458

С-126

13/8-79

P9 - 12377

В.А.Саввин

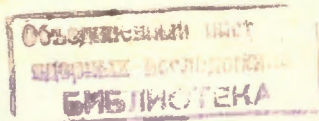
ЭФФЕКТ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ  
В ПЛАСТИНЕ ИЗ ПРОВОДЯЩЕГО ФЕРРОМАГНЕТИКА  
С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА

1979

P9 - 12377

В.А.Саввин

ЭФФЕКТ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ  
В ПЛАСТИНЕ ИЗ ПРОВОДЯЩЕГО ФЕРРОМАГНЕТИКА  
С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА



Саввин В.А.

P9 - 12377

Эффект вихревых токов в пластине из проводящего ферромагнетика с прямоугольной петлей гистерезиса

Получена система дифференциальных уравнений, описывающая процесс перемагничивания ферромагнетика с прямоугольной петлей гистерезиса с учетом магнитной вязкости и диамагнитного действия вихревых токов. Приводятся результаты решения системы для тонкой пермаллоевой ленты.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Savvin V.A.

P9 - 12377

The Eddy Current Effect in a Plate of Conducting Ferromagnetic with a Rectangular Hysteresis Loop

A system differential equations is obtained which describe the process of magnetic reversal of a ferromagnetic with a rectangular hysteresis loop taking into account magnetic viscosity and diamagnetic effect of eddy currents. The results of solving the given system for a thin permalloy tape are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

© 1979 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование формирования ускоряющих импульсов вихревого электрического поля в т.н. индукторах линейного индукционного ускорителя электронов ЛИУ-30 <sup>1,2</sup> показало необходимость более полного описания процессов перемагничивания пермаллоя, в частности, более точного учета влияния вихревых токов на динамику процесса при конечных толщинах ленты ферромагнетика.

Известно <sup>2,3</sup>, что процесс перемагничивания ферромагнетика с прямоугольной петлей гистерезиса /ППГ/ описывается уравнением

$$\dot{B} = R(1 - B^2/B_s^2)(1 + \nu H_d)H_d, \quad /1/$$

где  $R, \nu$  - динамические параметры ферромагнетика, имеющие размерность Ом/м и м/А,  $B, B_s$  - индукция и индукция насыщения,  $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$ ,  $H_d$  - действующее значение магнитного поля.

Исследование с помощью /1/ перемагничивания непроводящих ферромагнетиков с ППГ затруднений не вызывает, т.к. здесь отсутствуют вихревые токи, и действующее магнитное поле не зависит от конфигурации ферромагнетика.

В случае же, например, пермаллоев ситуация осложняется из-за возникающих при перемагничивании вихревых токов, которые приводят к неоднородности  $H_d$  по объему ферромагнетика.

В данной работе проводится количественный учет действия вихревых токов.

## ТЕОРИЯ

Пусть пластина из ферромагнетика с ППГ /рис. 1/ проводимостью  $\sigma$ , толщиной  $2\delta$ , которая много меньше ее длины и ширины, перемагничивается во внешнем магнитном поле  $\vec{H}(t)$ , направленном вдоль оси  $z$ .



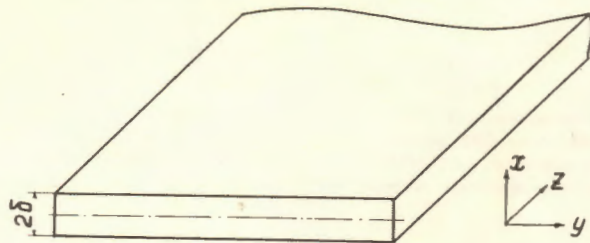


Рис. 1.

Возникающие при перемагничивании вихревые токи приводят к тому, что действующее магнитное поле

$$H_D(x, t) = H(x, t) - H_{CT}(B(x)), \quad /2/$$

где  $H_{CT}(B)$  - зависимость, определяемая статической петлей гистерезиса, ослабляется внутри пластины. Следовательно, скорость перемагничивания  $\dot{B}$  в слоях, расположенных на разных расстояниях от плоскости симметрии, будет различной, в частности, на поверхности при  $x = \delta$

$$\dot{B}(\delta, t) = R(1 - B_\delta^2/B_s^2)[H(\delta, t) - H_{CT}(B_\delta) + \nu(H(\delta, t) - H_{CT}(B_\delta))^2], \quad /3/$$

где  $B_\delta = B(\delta, t)$ .  
Из условий симметрии

$$B(x, t) = B(-x, t),$$

$$H_D(x, t) = H_D(-x, t). \quad /4/$$

следует, что

$$B(x, t) = B(-x, t), \quad /5/$$

где  $x$  - координата, отсчитываемая от плоскости симметрии. Поскольку функции  $B(x, t)$ ,  $H_D(x, t)$  так же, как и  $H(x, t)$ , являются четными, то возможно следующее их представление

$$B(x, t) = B(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)x^{2n}, \quad /6/$$

$$H_D(x, t) = H_D(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_n(t)x^{2n}, \quad /7/$$

$$H(x, t) = H(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)x^{2n}. \quad /7'/$$

Для представления  $H_D(x, t)$  в виде ряда /6/ реальную петлю гистерезиса для простоты вычислений заменим петлей, изображенной на рис. 2.

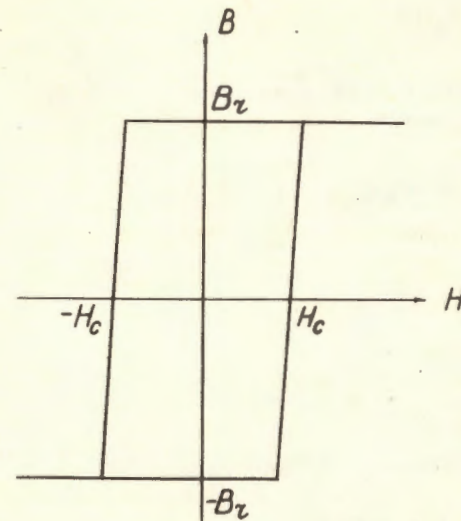


Рис. 2.

Тогда, с учетом /2/,

$$H_D(x, t) = H(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)x^{2n} - H_{CT}(B(0)) - \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)x^{2n}. \quad /8/$$

где

$$\frac{1}{\mu} = \frac{dH_{CT}}{dB} \quad (-B_r \leq B \leq B_r).$$

Сравнивая /8/ и /7/, получаем

$$H_d(0, t) = H(0, t) - H_{CT}(B(0, t)),$$

$$\tilde{h}_n(t) = h_n(t) - \frac{1}{\mu} b_n(t). \quad /9/$$

Продифференцировав по времени равенство /6/, получим

$$\dot{B}(x, t) = \dot{B}(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) x^{2n}. \quad /10/$$

С другой стороны, представляя зависимость от  $x$   $\dot{B}(x, t)$  в виде ряда Маклорена, имеем

$$\dot{B}(x, t) = \dot{B}(0, t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \dot{B}(x, t)}{\partial x^2} x^2 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \dot{B}(x, t)}{\partial x^4} x^4 + \dots \quad /11/$$

Следовательно,

$$\dot{b}_n(t) = \frac{1}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \dot{B}(x, t)}{\partial x^{2n}} \Big|_{x=0}. \quad /12/$$

Для вычисления производных /12/ используем правую часть уравнения /1/, учтя, что  $H_d(x, t)$  и  $B(x, t)$  представлены в виде рядов /6/ и /7/, тогда

$$\dot{B}(0, t) = R(1 - B_0^2/B_s^2)(H_{до} + \nu H_{до}^2),$$

$$\dot{b}_1(t) = R(1 - B_0^2/B_s^2) \tilde{h}_1(1 + 2\nu H_{до}) - \frac{2RB_0 b_1}{B_s^2} (H_{до} + \nu H_{до}^2),$$

$$\dot{b}_2(t) = R(1 - B_0^2/B_s^2) [\tilde{h}_2(1 + 2\nu H_{до}) + \nu \tilde{h}_1^2] -$$

$$- \frac{2RB_0 b_1}{B_s^2} (1 + 2\nu H_{до}) \tilde{h}_1 - \frac{R(b_1^2 + 2B_0 b_2)}{B_s^2} (H_{до} + \nu H_{до}^2),$$

$$\dot{b}_3(t) = R(1 - B_0^2/B_s^2) [2\nu \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 + (1 + 2\nu H_{до}) \tilde{h}_3] -$$

$$- \frac{2RB_0 b_1}{B_s^2} [\nu \tilde{h}_1^2 + (1 + 2\nu H_{до}) \tilde{h}_2] - \frac{R(b_1^2 + 2B_0 b_2)}{B_s^2} \tilde{h}_1 \cdot (1 + 2\nu H_{до}) -$$

$$- \frac{2R(b_1 b_2 + B_0 b_3)}{B_s^2} (H_{до} + \nu H_{до}^2),$$

где

$$B_0 = B(0, t), \quad H_{до} = H(0, t) - H_{CT}(B_0).$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений, описывающих изменение во времени коэффициентов ряда /6/.

Для определения коэффициентов  $\tilde{h}_i(t)$  найдем значения напряженностей вихревого электрического и магнитного полей. Поскольку

$$E(x) = - \int_x^0 B(x) dx, \quad /14/$$

то, подставляя сюда значение  $\dot{B}(x)$  из /10/ и интегрируя, находим

$$E(x) = \dot{B}(0)x + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad /15/$$



Для вихревого магнитного поля

$$H(x) = H(0) + \sigma \int_0^x E(x) dx \quad /16/$$

или, используя /14/, находим

$$H(x) = H(0) + \frac{\sigma \dot{B}(0)}{2} x^2 + \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{b}_n x^{2n}}{(2n+2)(2n+1)}. \quad /17/$$

Следовательно, согласно /7/,

$$h_1 = \frac{\sigma \dot{B}(0)}{2},$$

$$h_i = \frac{\sigma \dot{b}_{i-1}}{(2i-1)2i} \quad (i = 2, 3, 4, \dots) \quad /18/$$

и

$$\tilde{h}_1 = \frac{\sigma \dot{B}(0)}{2} - \frac{b_1}{\mu},$$

$$\tilde{h}_i = \frac{\sigma \dot{b}_{i-1}}{(2i-1)2i} - \frac{b_i}{\mu} \quad (i = 2, 3, 4, \dots). \quad /19/$$

Подстановка в систему /13/ полученных значений коэффициентов  $\tilde{h}_i$  из /19/ и магнитного поля в плоскости симметрии, выраженного через внешнее магнитное поле из /17/ при  $x = \delta$ , превращает /13/ в нелинейную систему дифференциальных уравнений, неразрешенную относительно производных.

Представление индукции в виде ряда /6/, где коэффициенты  $b_i / i = 1, 2, 3, \dots$  / зависят от времени, позволяет найти скорость распространения волны намагничивания внутри пластины.

Пусть  $\Lambda$  - координата, при которой индукция имеет фиксированное значение, т.е.

$$B(\Lambda) = B(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \Lambda^{2n} = \text{const.} \quad /20/$$

Продифференцировав по времени /20/, получим

$$0 = \dot{B}(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) \Lambda^{2n} + \dot{\Lambda} \sum_{n=1}^{\infty} 2n b_n(t) \Lambda^{2n-1}, \quad /21/$$

откуда скорость распространения будет

$$\dot{\Lambda} = - \frac{\dot{B}(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) \Lambda^{2n}}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n b_n(t) \Lambda^{2n-1}}. \quad /22/$$

### РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ

Отметим, что наименьшая степень полинома, качественно описывающего процесс перемагничивания ферромагнитной проводящей пластины, равна четырем.

Действительно, из уравнения /1/ следует, что максимальное значение скорости перемагничивания при воздействии ступеньки внешнего магнитного поля и при достаточно большой магнитной проницаемости ( $\mu \gg \frac{B_r}{H_c}$ ) достигается при  $B \approx 0$ . Поскольку перемагничивание внутренних слоев происходит медленнее, чем наружных, то максимум  $B(x)$  достигается сначала на границе, а затем перемещается внутри пластины. При этом минимум будет оставаться в плоскости симметрии. Минимальная степень полинома /10/, при которой он может иметь три точки экстремума /минимум при  $x=0$  и максимум при  $|x| \leq \delta$  / , равна четырем. Заменяя ряд /10/ суммой первых его  $N+1$  членов, получим

$$\dot{B}(x) \approx \dot{B}(0) + \sum_{n=1}^N \dot{b}_n x^{2n}. \quad /23/$$

Средние значения скорости перемагничивания и индукции по толщине пластины, определяемые как

$$\bar{\dot{B}}(t) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \dot{B}(x, t) dx, \quad /24/$$

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} B(x, t) dx, \quad /25/$$

будут

$$\dot{B}(t) = \dot{B}(0, t) + \sum_{n=1}^N \frac{\dot{b}_n(t)}{2n+1} \delta^{2n}, \quad /26/$$

$$\dot{B}(t) = B(0, t) + \sum_{n=1}^N \frac{b_n(t)}{2n+1} \delta^{2n}, \quad /27/$$

Система дифференциальных уравнений /13/, где коэффициенты  $\dot{b}_i$  определяются по формулам /19/, допускает численное решение методом последовательных приближений на каждом шаге интегрирования. При расчете предполагалось, что перемагничивание происходит под воздействием ступеньки внешнего магнитного поля. Начальное состояние - однородное по всему объему намагничивание до значения индукции -  $B_r$ , вектор которой антипараллелен оси  $z$ .

#### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Поверхностный эффект рассматривался в ленте из пермаллоя 50НП толщиной 10 мкм и проводимостью  $2,22 \cdot 10^6$  /Ом·м/<sup>-1</sup>, применяемой в сердечниках индукторов ускорителя ЛИУ-30. Расчет проводился для первых 16 членов ряда /23/.

На рис. 3 представлены графики распределения скорости изменения индукции по толщине образца при воздействии ступеньки внешнего магнитного поля напряженностью 140 А/м.

Кривая 1 представляет распределение  $\dot{B}(x)$  в моменты времени  $t = 5 \cdot 10^{-9}$  с /после первого шага интегрирования/, 2 - в момент  $t = 4 \cdot 10^{-7}$  с, 3 - при  $t = 8 \cdot 10^{-7}$  с, 4 - при  $t = 1,2 \cdot 10^{-6}$  с, 5 - при  $t = 1,6 \cdot 10^{-6}$  с.

В начальные моменты времени  $\dot{B}(x, t)$  примерно одинакова по всей толщине ленты, поскольку напряженность магнитного поля слабо уменьшается внутри пластины, и индукция везде имеет значение, примерно равное -  $B_r$ . Однако видно, что перемагничивание на границе происходит быстрее, чем внутри. Превышение  $\dot{B}$  у границы над его значением во внутренних слоях приводит к увеличению неоднородности магнитного поля в пластине. Таким образом быстрее перемагничиваются наружные слои. В результате скорость изменения индукции достигает на границе своего абсолютного максимума. Как и следовало ожидать, в последующие моменты

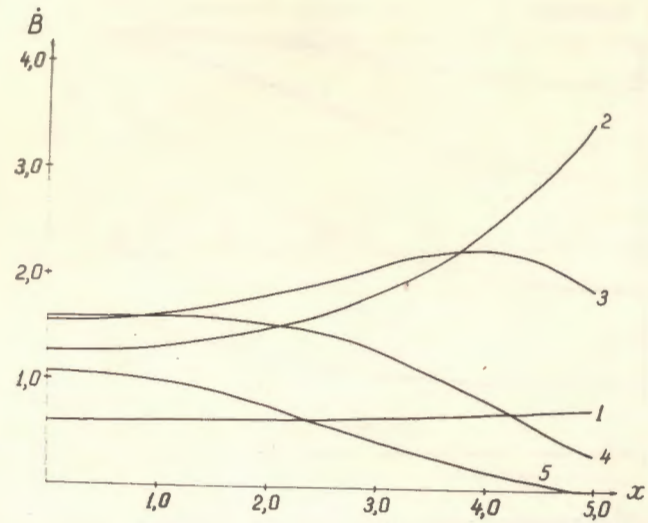


Рис.3. Распределение скорости перемагничивания /Г/мкс/ по толщине /мкм/ образца в разные моменты времени.

времени максимум функции  $\dot{B}(x)$  смещается внутрь пластины, уменьшаясь по величине. В конечном счете  $\dot{B}(x)$  будет иметь один максимум при  $x=0$ , который уменьшается по мере насыщения наружных слоев.

На рис. 4 и 5 представлены графики распределений магнитного поля и индукции по толщине образца в указанные моменты времени.

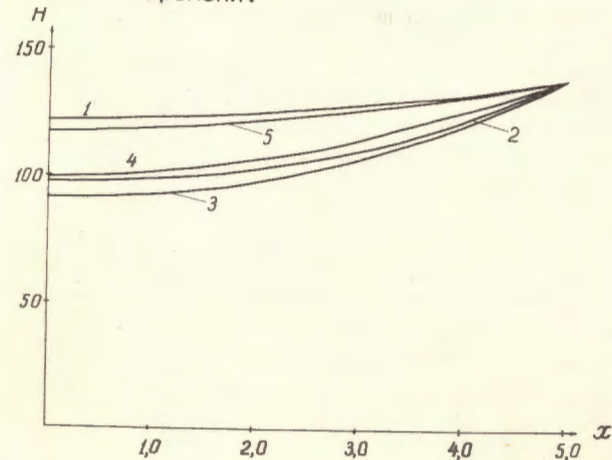


Рис.4. Распределение напряженности магнитного поля /А/м/ по толщине /мкм/ образца.



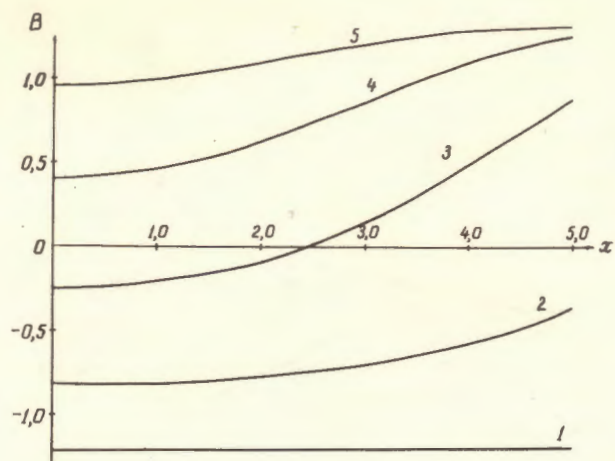


Рис.5. Распределение индукции /Т/ по толщине /мкм/ образца.

На рис. 6 представлены зависимости от времени скорости перемагничивания приграничного слоя ленты в полях, напряженностью 100 А/м - /кривая 1/, 140 А/м - /кривая 2/ и 180 А/м - /кривая 3/.

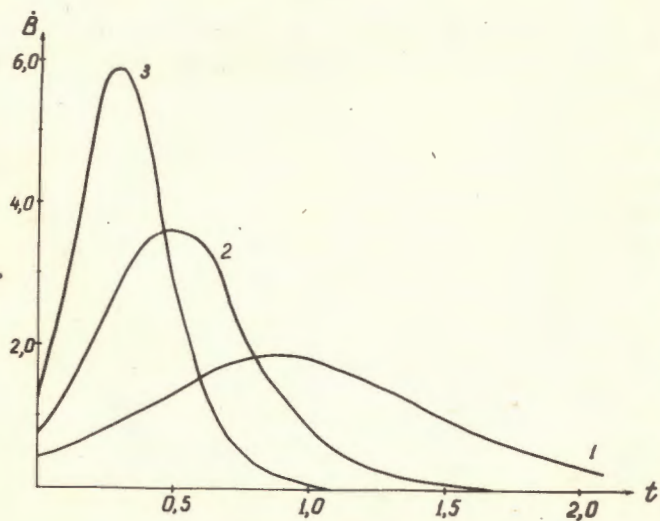


Рис.6. Зависимость от времени /мкс/ скорости перемагничивания /Т/мкс/ приграничного слоя ленты в полях напряженностью 100 А/м /кривая 1/, 140А/м /кривая 2/, 180 А/м /кривая 3/.

Для этих же значений полей на рис. 7 показано изменение во времени скорости перемагничивания в центре пластины.

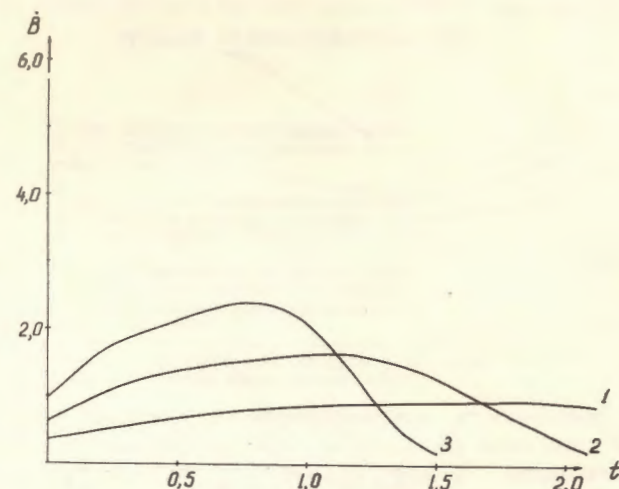


Рис.7. Зависимость от времени /мкс/ скорости перемагничивания /Т/мкс/ в центре пластины при напряженности внешнего магнитного поля 100 А/м /кривая 1/, 140 А/м /кривая 2/, 180 А/м /кривая 3/.

Видно, что перемагничивание в центре происходит со значительно меньшей скоростью и, соответственно, продолжается более длительное время, чем на границе.

На рис. 8 представлена зависимость напряженности магнитного поля в центре пластины от времени. В начальный момент времени магнитное поле слабо отличается от его значения на границе. Затем, с увеличением скорости перемагничивания, начинает уменьшаться, достигает минимума, и по мере перемагничивания ленты монотонно возрастает, приближаясь к значению внешнего магнитного поля.

Следует отметить, что данный здесь анализ процесса перемагничивания тонкой проводящей пластины из ферромагнетика с ППГ позволяет достаточно точно учесть диамагнитное действие вихревых токов, хотя решение приведенной здесь системы уравнений /13/ требует значительного времени расчета на ЭВМ.



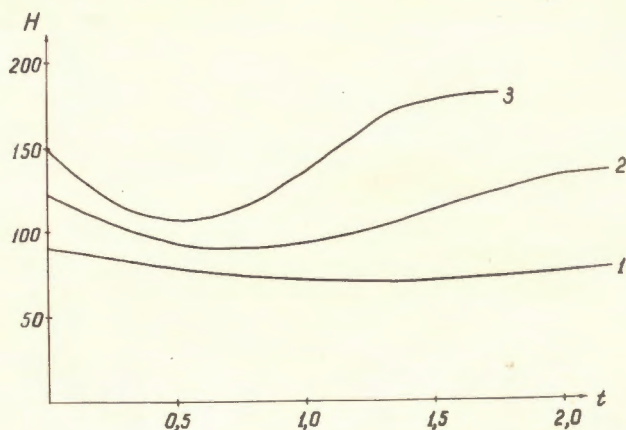


Рис. 8. Зависимость напряженности магнитного поля /А/м/ в центре пластины от времени, при напряженности внешнего магнитного поля 100 А/м /кривая 1/, 140 А/м /кривая 2/, 180 А/м /кривая 3/. Время в микросекундах.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность И.М.Маторе за постоянное внимание к работе и ряд полезных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Матора И.М., Саввин В.А. Радиотехника и электроника, 1976, XXI, 9, с. 1878-1886.
2. Пирогов А.И., Шамаев Ю.М. Магнитные сердечники в автоматике и вычислительной технике. "Энергия", М., 1964.
3. Копорский А.С., Пирогов А.И., Шамаев Ю.М. Автоматика и телемеханика. 1964, XXV, 10, с. 1502-1510.

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 апреля 1979 года.