

Перельштейн Э.А., Шевцов В.Ф.

P9 - 12234

Численное моделирование неустойчивости типа  
"змеяка" электронно-ионных колец

Проведено численное моделирование на ЭВМ неустойчивости типа "змеяка" электронно-ионного кольца с учетом нелинейности поляризацонных сил. При расчетах параметры электронно-ионных колец выбирались внутри области неустойчивости линейной теории.

Показано, что колебания локальных центров масс электронной и ионной компонент носят характер биений с амплитудами порядка размеров пучка или меньше. В области, где инкремент линейной теории гораздо больше действительной части частоты, найдено сильное уменьшение скорости развития неустойчивости, сопровождающееся ростом амплитуд высших гармоник. Полученные результаты качественно согласуются с экспериментальными данными.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Perelsteyn E.A., Shevtsov V.F.

P9 - 12234

Numerical Computer Simulation of the Electron  
Ring Kink Instability

The numerical computer simulation of the electron-ion ring kink-instability, taking into account the non-linear character of the polarization forces, has been carried out. It is shown that oscillations of the local electron and ion component center-of-masses are of the character of beats with amplitudes less than the beam dimensions. A significant velocity decrease of the instability development accompanied by the amplitude growth of the highest harmonics has been found. The results obtained agree qualitatively with experimental data.

The investigation has been performed at the New  
Acceleration Methods Laboratory, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. Проблема устойчивости двухкомпонентных кольцевых пучков приобрела в последнее время большое значение в связи с развитием коллективного метода ускорения<sup>/1/</sup>. Неустойчивость электронно-ионного кольца, используемого в этом методе, по отношению к изгибаниям без изменения формы поперечного сечения /"змеяка"/ представляется наиболее опасной из всех видов поперечных колебаний, поскольку она ограничивает набор энергии на единицу длины и количество ускоряемых ионов<sup>/2/</sup>.

Исследованию неустойчивости в линейном приближении посвящены работы<sup>/2-8/</sup>. С учетом малой нелинейности поляризацонных сил проблема изучалась в работе<sup>/9/</sup>. Параметры пучка выбирались вблизи границы области неустойчивости. В отсутствие внешней фокусирующей силы в<sup>/9/</sup> получено решение в виде нелинейной стационарной волны и показано, что возможна нелинейная стабилизация неустойчивости при амплитудах колебаний, малых по сравнению с размерами пучка.

Приближение малой нелинейности справедливо лишь вблизи границы области неустойчивости, где ее инкременты малы. Продвижение в глубь этой области приводит к увеличению отношения инкремента  $\gamma_n$  к действительной части частоты  $\omega_n$  неустойчивой гармоники с номером  $n$ , что видно из рис. 1. На этом рисунке в плоскости  $a_1^{1/2}, a_2^{1/2}$  область неустойчивости лежит выше граничной кривой 1. Здесь  $a_1^{1/2}$  и  $a_2^{1/2}$  - частоты колебаний электронов в поле ионов и ионов в поле электронов соответственно. Кривые 2-6 - линии равных отношений  $\gamma_1/\omega_1$  ( $n=1$ ): кривая 2 соответствует случаю  $\gamma_1/\omega_1=0,1$ ; кривая 3 - случаю  $\gamma_1/\omega_1=0,2$ ; 4 -  $\gamma_1/\omega_1=0,3$ ; 5 -  $\gamma_1/\omega_1=0,4$ , 6 -  $\gamma_1/\omega_1=0,5$ .

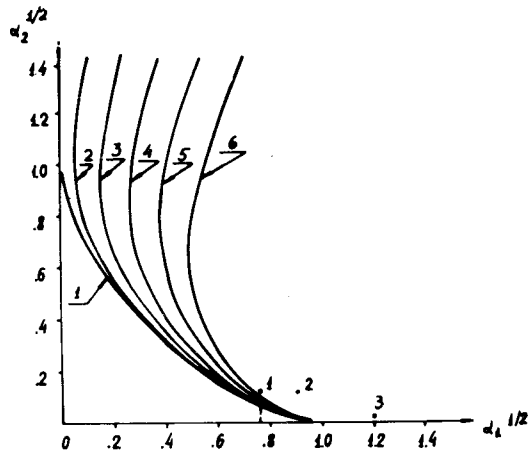


Рис.1. Область устойчивости в плоскости  $a_1^{1/2}, a_2^{1/2}$ . Кривая 1 - граница области устойчивости  $\gamma_1 = 0$ . Кривые 2-6 - линии равных отношений  $\gamma_1/\omega_1$ : кривая 2 -  $\gamma_1/\omega_1 = 0,1$ ; 3 -  $\gamma_1/\omega_1 = 0,2$ ; 4 -  $\gamma_1/\omega_1 = 0,3$ ; 5 -  $\gamma_1/\omega_1 = 0,4$ ; 6 -  $\gamma_1/\omega_1 = 0,5$ .

С ростом поляризации электронного и ионного колец приближение малой нелинейности становится несправедливым. Для исследования неустойчивости без предположения о малой нелинейности поляризационных сил необходимо знание явного вида силы взаимодействия локальных центров масс компонент на любых расстояниях.

Вычисление поляризационных сил, действующих между прямолинейными пучками электронов и ионов с постоянными по круговому сечению радиуса  $a$  линейными плотностями  $N_e^{(0)}$  и  $N_i^{(0)}$  электронов и ионов соответственно, приводит к следующему результату:

$$f = F_x^{e,i} / \left( \pm \frac{2Ze^2 N_{1,e}^{(0)}}{a} \right) = \begin{cases} \xi + \frac{1-\xi^2}{\pi\xi} \operatorname{arctg} \frac{1+\xi}{1-\xi} \sqrt{\frac{2-\xi}{2+\xi}} - \frac{1-\xi^2}{2\pi\xi} \operatorname{arccos} \frac{\xi}{2} - \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\xi^2}{2}\right), & \xi \leq 1, \\ \frac{1}{\xi} + \frac{\xi^2-1}{\pi\xi} \operatorname{arctg} \frac{1+\xi}{\xi-1} \sqrt{\frac{2-\xi}{2+\xi}} - \frac{1-\xi^2}{2\pi\xi} \operatorname{arccos} \frac{\xi}{2} - \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\xi^2}{2}\right), & 1 < \xi \leq 2, \\ \frac{1}{\xi}, & \xi > 2. \end{cases} \quad /1/$$

где  $e$  - заряд электрона,  $Z$  - зарядность иона,  $\xi = \xi_2 - \xi_1 = \frac{x_2}{a} - \frac{x_1}{a}$  -

относительное расстояние между локальными центрами масс пучков. Максимум поляризационной силы достигается в области значений  $\xi \approx \sqrt{2}$ . Нелинейный характер поляризационных сил иллюстрирует рис. 2. Кривая 1 построена для случая, когда плотность частиц в поперечном сечении пучка равномерная, кривая 2 - для случая, когда плотность распределена по закону  $N_{e,i}(\xi) = N_{e,i}^{(0)} e^{-2\xi^2/10}$ . При построении кривой 3 использовалось выражение  $f(\xi) = \xi / (1 + \xi^2)$  из работы [11], при построении кривой 4 - выражение  $f(\xi) = \xi - \xi^3$  для поляризационной силы в случае слабой нелинейности. Из рисунка видно, что приближение слабой нелинейности справедливо при  $\xi < 0,5$ .

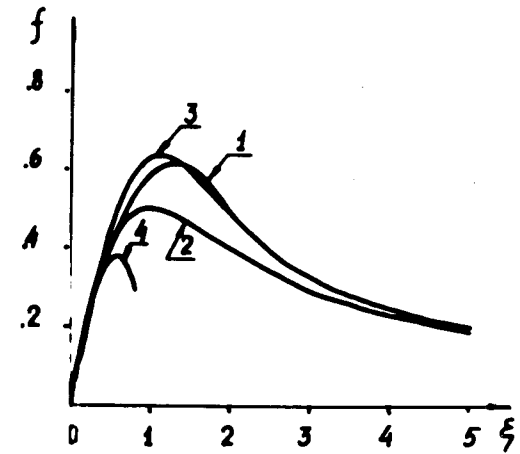
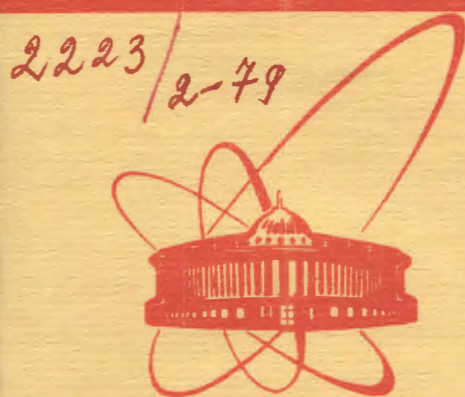


Рис.2. Зависимость поляризационной силы  $f$  от относительного смещения центров масс  $\xi$ ; кривая 1 - расчет по формуле /1/, кривая 2 - плотность частиц в сечении распределена по гауссову закону, кривая 3 -  $f(\xi) = \xi / (1 + \xi^2)$ , кривая 4 -  $f(\xi) = \xi - \xi^3$ .

Практически наибольший интерес представляют случаи, когда  $\gamma_n/\omega_n \geq 1$ . Например, отношение линейного инкремента развития неустойчивости к действительной части частоты неустойчивой моды колебаний с  $n=1$  для типичных параметров электронно-ионных колец составляет  $\gamma_1/\omega_1 = 0,6 \div 1$ . На диаграмме области устойчивости, показанной на рис. 1, точки,



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

С345А  
П-27

11/61-79  
P9 - 12234

Э.А.Перельштейн, В.Ф.Шевцов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ТИПА "ЗМЕЙКА" ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ КОЛЕЦ

1979

P9 - 12234

Э.А.Перельштейн, В.Ф.Шевцов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ТИПА "ЗМЕЙКА" ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ КОЛЕЦ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

соответствующие количеству ионов  $N_1=5 \cdot 10^{11}$  и  $7 \cdot 10^{11}$  в электронном кольце радиуса  $R=3,5$  см с малым полуразмером  $a=0,2$  см, обозначены цифрами 1 и 2 соответственно. Полное число электронов в кольце  $N_e=10^{13}$ , их релятивистский фактор  $\gamma_e=33,3$ . Приведенные параметры близки к полученным в эксперименте по ускорению ионов азота [12].

Исследование неустойчивости с параметрами, выбранными далеко от границы области устойчивости, должно проводиться без предположения о малой нелинейности поляризационных сил. Решение этой задачи возможно только численными методами.

2. В данной работе задача о поперечной неустойчивости электронно-ионных колец рассматривается в модели жестких шнуров, между которыми действует возвращающая сила  $f(\xi) = \xi/(1 + \xi^2)$ . Уравнения движения локальных центров масс электронной и ионной компонент запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \tau \partial \theta} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \theta^2} = \beta_1 f(\xi), \quad /2/$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \tau^2} = -\beta_2 f(\xi),$$

где  $\beta_1 = a_1 / \omega_0^2$ ,  $\beta_2 = a_2 / \omega_0^2$  - безразмерные квадраты частот колебаний электронов в поле ионов и ионов в поле электронов соответственно,  $\tau = \omega_0 t$  - безразмерное время.

Решение системы уравнений /2/ будем искать в следующем виде:

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^N \{ \phi_k^{(1)}(\tau) \cos[k(\nu_n \tau - n\theta)] + \phi_k^{(2)}(\tau) \sin[k(\nu_n \tau - n\theta)] \}, \quad /3/$$

$$\xi_2 = \sum_{k=1}^N \{ \phi_k^{(3)}(\tau) \cos[k(\nu_n \tau - n\theta)] + \phi_k^{(4)}(\tau) \sin[k(\nu_n \tau - n\theta)] \},$$

где  $\phi_k^{(i)}(\tau)$  ( $i=1-4$ ) - зависящие от времени коэффициенты,  $\nu_n = \omega_n / \omega_0$  - действительная часть безразмерной частоты неустойчивой моды колебаний,  $n$  - ее номер.

После подстановки формул /3/ в уравнения /2/, умножения обеих частей равенств на  $\cos[m(\nu_n \tau - n\theta)]$  и  $\sin[m(\nu_n \tau - n\theta)]$  ( $m=1, \dots, N$ ) и интегрирования их в интервале  $0, 2\pi$  по пере-

менной  $\nu_n \tau - n\theta$  получаем систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов  $\phi_k^{(i)}(\tau)$  ( $i=1-4$ ):

$$\frac{d^2 \phi_k^{(1)}}{d\tau^2} = k^2 (\nu_n - n)^2 \phi_k^{(1)} - 2k(\nu_n - n) \frac{d\phi_k^{(2)}}{d\tau} + \beta_1 f_k^{(c)},$$

$$\frac{d^2 \phi_k^{(2)}}{d\tau^2} = k^2 (\nu_n - n)^2 \phi_k^{(2)} + 2k(\nu_n - n) \frac{d\phi_k^{(1)}}{d\tau} + \beta_1 f_k^{(s)}, \quad /4/$$

$$\frac{d^2 \phi_k^{(3)}}{d\tau^2} = k^2 \nu_n^2 \phi_k^{(3)} - 2k\nu_n \frac{d\phi_k^{(4)}}{d\tau} - \beta_2 f_k^{(c)},$$

$$\frac{d^2 \phi_k^{(4)}}{d\tau^2} = k^2 \nu_n^2 \phi_k^{(4)} + 2k\nu_n \frac{d\phi_k^{(3)}}{d\tau} - \beta_2 f_k^{(s)}.$$

Здесь  $f_k^{(c)}$  и  $f_k^{(s)}$  - коэффициенты Фурье силы  $f$ :

$$f_k^{(c)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos[k(\nu_n \tau - n\theta)] d(\nu_n \tau - n\theta),$$

$$f_k^{(s)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \sin[k(\nu_n \tau - n\theta)] d(\nu_n \tau - n\theta). \quad /5/$$

Например, если  $f(\xi) = \xi - \xi^3$  /случай малой нелинейности/, то

$$f_1^{(c)} = (\phi_1^{(3)} - \phi_1^{(1)}) \left\{ 1 - \frac{3}{4} [(\phi_1^{(3)} - \phi_1^{(1)})^2 + (\phi_1^{(4)} - \phi_1^{(2)})^2] \right\},$$

$$f_1^{(s)} = (\phi_1^{(4)} - \phi_1^{(2)}) \left\{ 1 - \frac{3}{4} [(\phi_1^{(3)} - \phi_1^{(2)})^2 + (\phi_1^{(4)} - \phi_1^{(1)})^2] \right\}. \quad /6/$$

Действительная часть частоты  $\nu_n$  и инкремент  $\Gamma = \gamma_n / \omega_0$  определяются из дисперсионного уравнения линейной теории неустойчивости типа "змеяка":

$$\frac{\beta_1}{(\nu - k)^2} + \frac{\beta_2}{\nu^2} = 1. \quad /7/$$

Начальные условия выбирались следующим образом: все коэффициенты  $\phi_k^{(i)}$  с  $k > 1$  полагались равными нулю,  $\phi_1^{(1)} = \phi_1^{(1)}(0) \ll 1$ ,  $\phi_1^{(4)} = 0$ , а коэффициенты  $\phi_1^{(2)}$  и  $\phi_1^{(3)}$  определялись из решения системы линейных уравнений, совпадающей с системой /16.1 - 16.4/ работы /9/. При таком выборе начальных условий с параметрами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , заданными в области устойчивости, коэффициенты  $\phi_k^{(i)}$  не изменяются во времени.

Система уравнений /3/ численно решалась на ЭВМ с использованием схемы Адамса /13/ четвертого порядка. Действительная часть частоты  $\nu_n$  и инкремент  $\Gamma_n$  находились из уравнения /7/ с помощью программы C204-MULLRC. /14/ Вычисление коэффициентов Фурье  $f_k^{(e)}$  и  $f_k^{(s)}$  осуществлялось по программе E206 - TRICOF /14/.

Исследовались нелинейные колебания в самофокусирующемся электронно-ионном пучке.

Правильность работы программы проверялась на двух тестовых задачах: в режиме малой надкритичности результаты расчетов по уравнениям /4/ сравнивались 1/ с решениями усредненной системы /19/ работы /9/ и 2/ с решением системы /2/ в виде нелинейной стационарной волны. В первом случае мы ограничивались в суммах /3/ одним членом ряда  $N=1$ ,  $n=1$ , параметры выбирались равными  $a_1 = a_2 = 0,1257$ . Различие в величинах амплитуд колебаний, полученных этими двумя способами, не превышает 6%. Во втором случае мы выбирали  $N=10$ ,  $n=1$ ,  $a_1 = a_2 = 0,13$ . Рис. 3 иллюстрирует временную зависимость поляризации  $\xi$  компонент кольца, полученную численным решением систем /4/ и /3/ - кривая 1, и решение системы /2/ в виде нелинейной стационарной волны - кривая 2. Из рисунка видно, что решения совпадают с удовлетворительной точностью. Различие между ними объясняется выбором нулевых начальных условий для всех амплитуд с номерами  $k > 1$  и конечным числом членов в суммах /3/. Отметим, что различие между решениями убывает с течением времени по мере увеличения амплитуд гармоник с номерами  $k > 1$ .

3. Рассмотрим нелинейные относительные колебания электронного и ионного колец, когда частоты колебаний  $a_1^{1/2}$  и  $a_2^{1/2}$  лежат в области неустойчивости. На рис. 4, 5 показаны временные зависимости относительных смещений локальных центров масс  $\xi_1$  и  $\xi_2$  при  $\gamma_1/\omega_1 = 0,1$  - рис. 4 и  $\gamma_1/\omega_1 = 0,3$  - рис. 5.

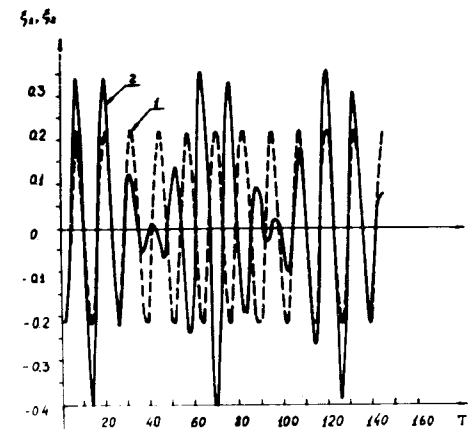


Рис.3. Изменение относительной поляризации во времени: кривая 1 - расчет по уравнениям /3/ и /4/, кривая 2 - решение в виде нелинейной стационарной волны.

Количество членов ряда составляет  $N=1$ ,  $n=1$ , величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  вычислены на азимуте  $\theta = 0$ . Расчет с  $N=10$  при тех же параметрах показал, что величины максимальных смещений отличаются от полученных в расчетах с  $N=1$  не более чем на 4%. Из рисунков видно, что по мере увеличения  $\gamma_1/\omega_1$  амплитуды колебаний

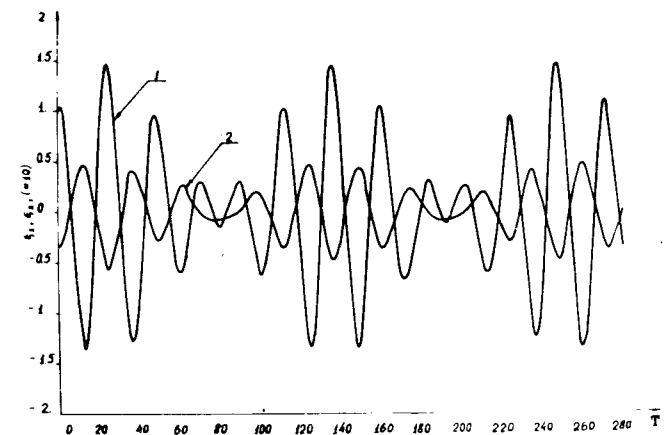


Рис.4. Зависимость относительных смещений электронов  $\xi_1$  /кривая 1/ и ионов  $\xi_2$  /кривая 2/ от времени при  $\gamma_1/\omega_1 = 0,1$ .

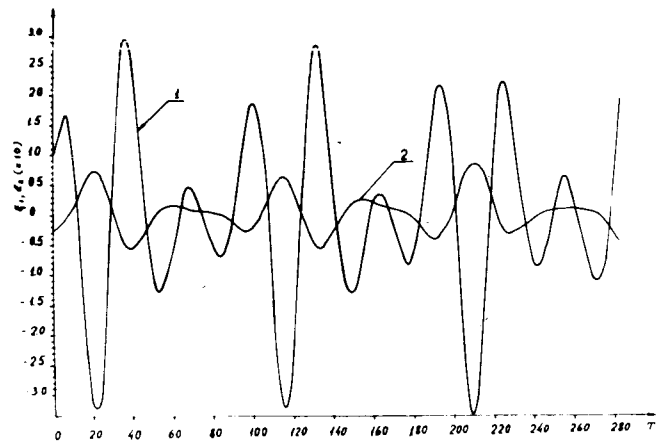
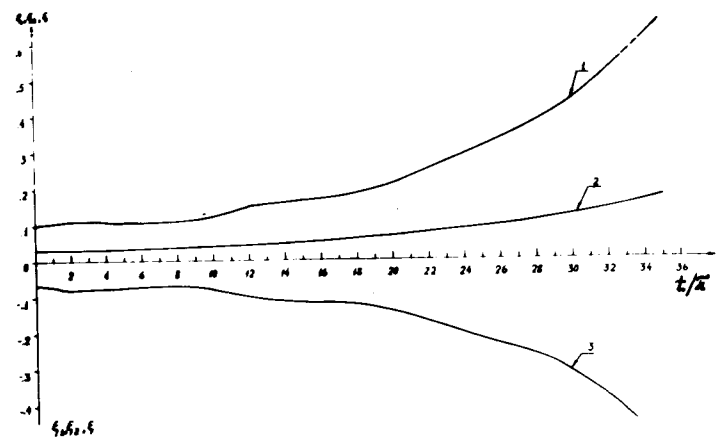


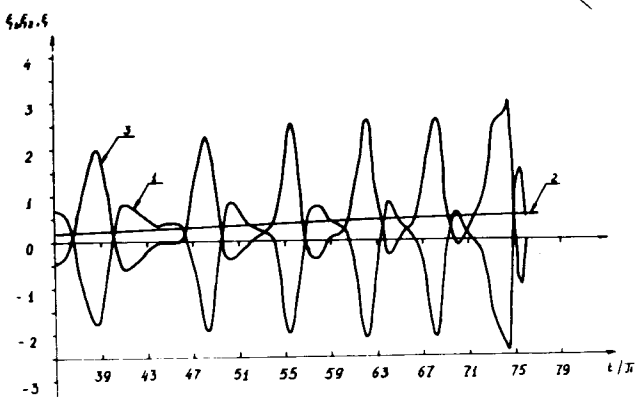
Рис.5. То же, что и на рис. 4,  $\gamma_1/\omega_1 = 0,3$ .

центров масс растут, но остаются меньше размеров поперечного сечения пучка ( $\xi < 0,3$ ) в области, где линейная теория предсказывает их неограниченный рост. Амплитуды максимальных смещений зависят не только от отношения  $\gamma_1/\omega_1$ , но и от абсолютных значений инкрементов и частот. Из результатов численного счета следует, что при неизменном значении  $\gamma_1/\omega_1$  амплитуды колебаний увеличиваются при росте частоты  $\omega_1$ , что соответствует продвижению в область параметров  $a_2 \gg a_1$  /левый верхний угол области неустойчивости на рис. 1/. Такие параметры не представляют особого интереса для коллективных ускорителей ионов с электронными кольцами. В дальнейшем мы изучали устойчивость колебаний в области, где  $a_2 \ll a_1$ .

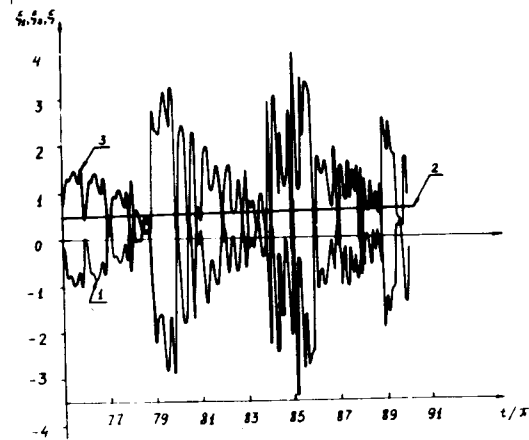
Результаты одного из расчетов в этой области представлены на рис. 6. Параметры электронно-ионного кольца выбраны таким образом, что соответствуют точке 3 на рис. 1:  $a_1 = 1,43$ ;  $a_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ ;  $\omega_1 = 1,505 \cdot 10^{-3}$ ;  $\gamma_1 = 2,135 \cdot 10^{-2}$ ;  $\gamma_1/\omega_1 \approx 14,2$ . При расчете в суммах /3/ удерживалось 10 членов ряда. Наиболее существенным моментом в этом случае является сильное замедление развития неустойчивости. Нелинейные взаимодействия в системе приводят к эффективному росту амплитуд высших гармоник. При увеличении числа учитываемых в счете гармоник до  $N=25$  наблюдалось еще более сильное уменьшение скорости развития неустойчивости, а дальнейший рост амплитуд колебаний происходил лишь после увеличения нечетных коэффициентов  $\phi_k^{(i)}$  до



a



б



в

Рис.6. Зависимости относительных смещений электронов  $\xi_1$  /кривая 1/, ионов  $\xi_2$  /кривая 2/ и поляризации  $\xi$  /кривая 3/ от времени.

значений, сравнимых с величиной амплитуды первой гармоники  $\phi_1^{(1)}$ . Это увеличение является, по-видимому, следствием конечного количества учитываемых гармоник. Изменение логарифмов амплитуд  $\Phi_k = [\phi_k^{(1)} + \phi_k^{(2)}]^{1/2}$  во времени показано на рис. 7. В расчетах мы ограничились учетом 25 членов ряда /3/, поскольку дальнейшее увеличение их числа приводит к большим затратам машинного времени.

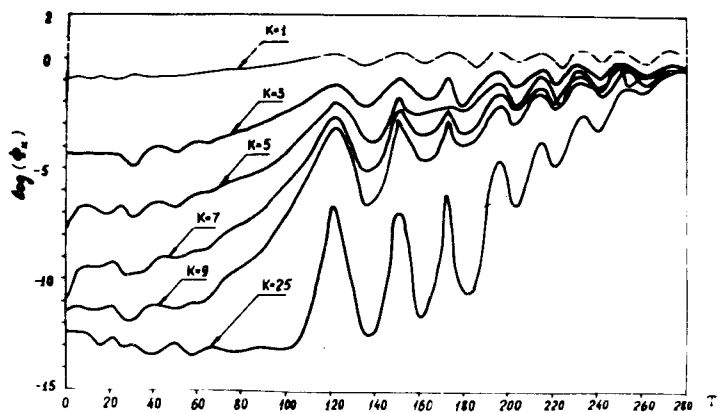


Рис. 7. Изменение десятичных логарифмов амплитуд гармоник во времени.

Результаты численного решения системы уравнений /4/, /3/ с параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответствующими точке 1 на рис. 1, представлены на рис. 8. Колебания локальных центров масс компонент имеют характер биений с максимальными откло-

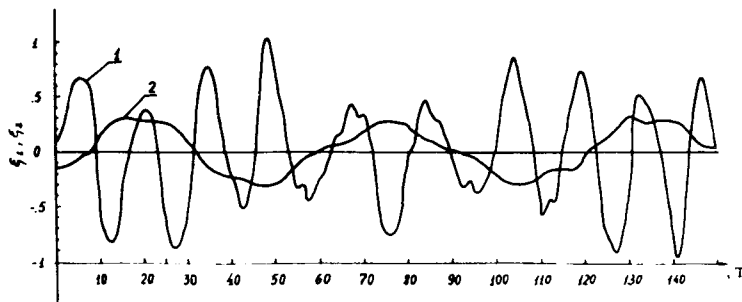


Рис. 8. Зависимость относительных смещений электронов  $\xi_1$  /кривая 1/ и ионов  $\xi_2$  /кривая 2/ от времени. Расчет выполнен для параметров кольца, полученного на КУТИ ОИЯИ.

нениями порядка размеров пучка. Качественно такое поведение можно объяснить следующим образом: увеличение амплитуд колебаний приводит к нелинейному сдвигу их частот до значений, лежащих вблизи границы области устойчивости, вследствие чего амплитуды убывают до величин, при которых вновь начинает проявляться линейный характер сил. Устойчивые нелинейные колебания наблюдались при исследовании радиальной неустойчивости типа "змейка" электронно-ионных колец /11,15/.

4. Прделанная работа позволяет сделать следующие выводы.

Исследование реальных сил, действующих между локальными центрами масс компонент, показывает, что приближение малой нелинейности /9/ справедливо, если величины относительных смещений центров масс меньше полуразмеров пучка.

Амплитуды колебаний отклонений центров масс не превышают размеров пучка даже в случае, когда параметры пучков выбраны достаточно далеко в области неустойчивости ( $\gamma_1/\omega_1 \approx 1$ ). Колебания носят характер биений с максимальными амплитудами, возрастающими с увеличением линейных инкрементов.

В области параметров, для которой  $\gamma_1/\omega_1 \geq 1$ , найдено сильное уменьшение скорости развития неустойчивости. В этом режиме нелинейные взаимодействия приводят к резкому росту амплитуд высших гармоник, в то время как амплитуда неустойчивой первой гармоники не испытывает заметного увеличения. В целом это приводит к слабому по сравнению с линейной теорией увеличению амплитуд колебаний локальных центров масс электронной и ионной компонент.

Экспериментально нелинейные эффекты наблюдались в работе /15/, где исследовалось развитие радиальной неустойчивости типа "змейка". Амплитуды колебаний центров масс в эксперименте были сравнимыми с размерами пучка или меньше.

Изучение неустойчивости типа "змейка" в данной работе проведено на основе модели жестких пучков, которая применима, когда размеры пучков не изменяются существенно во времени и разбросом по импульсам частиц пучка можно пренебречь. Случай, когда эти условия не выполняются, требуют специального рассмотрения.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Векслер В.И. и др. Коллективное ускорение ионов. Доклад на IУ Международной конференции по ускорителям, США, Кембридж, 1967; ОИЯИ, Р9-3440-2, Дубна, 1972.
2. Зенкевич П.Р., Кошкареев Д.Г. Препринт ИТЭФ, №841, М., 1970; *Particle Accelerators*, 1972, 3, p. 1.
3. Будкер Г.И. Атомная энергия, 1956, 5, с. 9.
4. Чириков Б.В. Атомная энергия, 1965, 19, с. 239.
5. Mohl D., Sessler A.M. Preprint LBL, ERAN-172, 1971.
6. Ott W., Laslett L.J. Preprint LBL, ERAN-234, 1974.
7. Dommaschk W. IPP Report 0/19, 1973.
8. Бонч-Осмоловский А.Г., Решетникова К.А. ОИЯИ, Р9-6136, Дубна, 1971.
9. Казаринов Н.Ю. и др. ОИЯИ, Р9-6284, Дубна, 1972; *Particle Accelerators*, 1975, 7, p. 49.
10. Берман Г.П. ЖТФ, 1974, 44, с. 2116.
11. Dommaschk W. IPP Report 0/29, 1976.
12. Долбилов Г.В. и др. ОИЯИ, Р9-11191, Дубна, 1977.
13. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Физматгиз, М., 1963.
14. Мазный Г. Программирование на БЭСМ-6 в системе "Дубна", "Наука", М., 1978.
15. Schumacher U. et al. Proc. Intern. Conf. on Electron Beam Research and Technology, Albuquerque, 1976, 1, p. 385.

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 февраля 1979 года.