Воеводин М.А., Коваленко А.Д. P9 - 12233

Исследование двумерных магнитных полей методом гармонического анализа. I. Основы метода

Методом гармонического анализа оперативно и точно определяются все необходимые характеристики магнитных полей (МП) в элементах магнитных систем ускорителей заряженных частиц высоких энергий и каналах транспортировки пучков. При этом произвольное плоскопараллельное МП определяется как градиент скалярного магнитного потенциала $\Phi=\Phi_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi)$. В работе рассчитаны гармонические коэффициенты a_n, b_n для квадрупольных магнитных линз с нарушенной симметрией. Показано, что измерительная система должна иметь известиую чувствительность ко всему спектру, вплоть до некоторой наивысшей гармоники. Практически достижимая точность зависит от способа измерения гармонических коэффициентов и ряда аппаратурных и инструментальных факторов и может быть доведена до 10^{-3} при абсолютных измерениях и до 10^{-5} при относительных. Использование индукционных катушек в качестве датчиков обеспечивает также большой динамический диапазон амплитуд и частот МП, поддающихся исследованию, возможность проводить измерения в широком интервале температур, вплоть до температуры жидкого гелия.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Voevodin M.A., Kovalenko A.D. P9 - 12233

Investigation of Two-Dimensional Magnetic Field by the Harmonic Analysis Method. Foundations of the Method

All needed magnetic field (MF) characteristics of magnet optic elements for high energy accelerators and beam transport lines could operatively and with a high accuracy be measured by using a harmonic analysis method. For this purpose MF is represented by means of magnetic scalar potential in cylindrical coordinates $\Phi=\Phi_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi)$. Harmonic coefficients a_n, b_n are calculated for quadrupole lenses with some model cases of symmetry breaking. It is shown that in general the measurement system must have a known sensitivity for all harmonics up to some highest one. Accuracy of measurement being realized practically depends in large part on a type of a search coil, apparatus and some other factor, but it could be made so high as $\sim 10^{-3}$ for absolute measurements and $\sim 10^{-5}$ for relative ones. Using induction coils as a MF monitor it is also possible to achieve a wide dynamic range for amplitudes and frequencies of MF to be investigated, and the opportunity to measure in large temperature intervals down to liquid helium.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Магнитные системы современных ускорителей высоких энергий и каналов транспортировки пучков заряженных частиц состоят в основном* из периодически чередующихся элементов - поворотных магнитов /диполей/ и фокусирующих магнитных квадрупольных линз, пространственные конфигурации и амплитуды магнитных полей в которых должны быть выдержаны с весьма высокой точностью. Последнее обстоятельство обуславливает необходимость экспериментального исследования магнитных характеристик этих элементов.

Одним из методов, позволяющих с высокой точностью определить необходимые характеристики магнитных полей /МП/ в указанных устройствах, является метод гармонического анализа с использованием индукционных измерительных катушек в качестве датчиков [1,2]. Суть метода состоит в выделении и анализе гармонических составляющих МП из экспериментально полученных с помощью датчика зависимостей амплитуды МП от азимута $(B(\phi))$ в пределах полного оборота **. Этот метод исследования МП обеспечивает:

- непосредственное определение величин производных $\frac{\partial^n B_x}{\partial x^n}$, $\frac{\partial B_y}{\partial y^n}$, необходимых при расчетах динамики пучка,

* Используются также корректирующие элементы, создающие МП более высокого порядка мультипольности.

** Для получения зависимости $B(\phi)$ в переменных МП датчик перед каждым следующим импульсом поворачивают на угол $\phi_m = 2\pi/m$, при исследовании статических МП датчик вращают с постоянной угловой скоростью и подбирают соответствующим образом момент регистрации сигнала.

- высокую точность измерений / $\sim 10^{-3}$ - абсолютных и $\sim 10^{-5}$ - относительных/,
- высокую чувствительность, большой динамический диапазон амплитуд и частот МП, поддающихся исследованию,
- возможность проводить измерения в широком диапазоне температур, вплоть до температуры жидкого гелия,
- определение ряда необходимых параметров магнитных элементов без продольного перемещения датчика.

Кроме того, метод допускает относительную простоту конструкции датчика.

Отмеченные преимущества данной методики, особенно при использовании ЭВМ для обработки данных и представления результатов, ставят ее практически вне конкуренции там, где необходимо точное и оперативное измерение характеристик плоскопараллельных МП.

Основным недостатком при всем сказанном выше является, пожалуй, необходимость калибровки датчиков в мультипольной магнитной мере /МММ/ - специальном устройстве, генерирующем отдельные гармоники магнитного поля с известной амплитудой.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУМЕРНОГО МП ГАРМОНИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

Произвольное квазистационарное МП описывается парой уравнений Максвелла:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,$$
$$\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{j}_0 + \vec{\nabla}\times\vec{M}. \qquad /1.1/$$

В апертуре магнитооптических систем $\vec{j}_0 = 0$ /так как собственное магнитное поле пучков заряженных частиц считаем малым по сравнению с внешним/ и $\vec{M} = 0$ /нет ферромагнетиков/, поэтому /1.1/ принимает вид

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0 \qquad /1.2/$$

и, следовательно, МП в данном случае может быть выражено как

$$\vec{B} = -\mu_0\vec{\nabla}\Phi, \qquad /1.3/$$

где Φ - скалярный магнитный потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad /1.4/$$

и краевым условиям задачи.

Общее решение /1.4/ в цилиндрической системе координат [3]:

$$\Phi(r,\phi) = \begin{cases} \int f(n)\,\Phi_n(r,\phi)\,dn, & n \neq 0; \\ (c_0 \ln r + d_0)(a_0\phi + b_0), & n = 0, \end{cases} \qquad /1.5/$$

где

$$\Phi_n(r,\phi) = (c_n r^n + d_n r^{-n})(a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

n - постоянная разделения.

Исходя из физической сущности, общей для рассматриваемого класса задач, следует положить: 1/ $c_0 = 0$, $d_n = 0$, поскольку потенциал должен быть ограничен при $r = 0$; 2/ $a_0 = 0$, n - целому числу, так как необходимо выполнить условие $\Phi(r,\phi) = \Phi(r,\phi+2\pi)$ периодичности потенциальной функции.

С учетом сказанного:

$$\Phi(r,\phi) = \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi). \qquad /1.6/$$

Для компонент индукции МП на основании /1.3/ получаем:

$$B_r = -\mu_0\sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1}(a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) = -\mu_0\sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} Q_n \sin(n\phi + \phi_n),$$
$$B_\phi = -\mu_0\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}(-a_n \sin n\phi + b_n \cos n\phi) = -\mu_0\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} Q_n \cos(n\phi + \phi_n), \qquad /1.7/$$

где $Q_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$, $\phi_n = \mathrm{arctg}\, a_n/b_n$.

Из /1.7/ видно, что произвольное двумерное МП может быть определено с любой точностью, если известно достаточное количество гармонических коэффициентов a_n, b_n. Эти коэффициенты имеют определенный физический смысл. Представим МП в виде ряда по степеням r:

$$B(r,\phi) = B(0) + \frac{r}{1!}\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)_{r=0} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1} B}{\partial r^{n-1}}\right)_{r=0} \qquad /1.8/$$

Используя /1.2/, можно показать, что при $r=0$

$$\frac{\partial^{n-1} B_r}{\partial r^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1} B_x}{\partial x^{n-1}} \cos n\phi + \frac{\partial^{n-1} B_x}{\partial y^{n-1}} \sin n\phi . \qquad /1.9/$$

Подставляя этот результат в /1.8/ и сравнивая /1.8/ и /1.7/, видим, что:

$$a_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^{n-1} B_x}{\partial x^{n-1}}\right)_{r=0} ; \quad b_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^{n-1} B_x}{\partial y^{n-1}}\right)_{r=0} \qquad /1.10/$$

то есть гармонические коэффициенты - это производные компонент МП на оси системы.

Зная потенциал $\Phi_c(\phi)$ или его нормальную производную $\Phi_c'(\phi)$ на границе области, заданные как функции азимутального угла ϕ, можно рассчитать коэффициенты a_n и b_n. Если границей является окружность $r=R$, то, разлагая $\Phi_c(\phi)$ или $\Phi_c'(\phi)$ в ряд Фурье и сравнивая полученный ряд с /1.7/ при $r=R$, получим:

$$a_n = \alpha_n R_n ; \quad b_n = \beta_n R_n ; \quad \Phi_0 = \alpha_0 R_n . \qquad /1.10/$$

где α_0, α_n, β_n рассчитываются обычным способом.

Компоненты МП в декартовой системе координат x, y можно найти, пользуясь следующими соотношениями:

$$B_x = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} [a_n \cos(n-1)\phi + b_n \sin(n-1)\phi] ,$$

$$B_y = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} [-a_n \sin(n-1)\phi + b_n \cos(n-1)\phi] \qquad /1.12/$$

Следует также сказать, что магнитный скалярный потенциал Φ можно рассматривать как, например, мнимую часть некоторой аналитической функции

$$W(s) = \Psi + i\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(h_n + ik_n)s^n$$

комплексной переменной $s = x + iy = re^{i\phi}$. Функция потока Ψ также удовлетворяет уравнению Лапласа, а семейства кривых $\Psi = const$, $\Phi = const$ взаимно ортогональны. Компоненты МП в этом представлении выражаются как

$$B_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = Im\left(-\frac{dW}{ds}\right),$$

$$B_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = Re\left(-\frac{dW}{ds}\right) \qquad /1.13/$$

Развивать этот способ анализа дальше мы не будем /он изложен в [4]/, отметим только, что переход в комплексную плоскость дает возможность воспользоваться методом конформных преобразований и в некоторых случаях расчета полей упростить задачу.

2. МП МУЛЬТИПОЛЬНЫХ СИСТЕМ

Мультипольные магнитные поля создаются либо параллельными проводниками /поверхностями/ с заданным распределением тока, противоположно направленного в соседних проводниках, либо последовательностью ферромагнитных полюсов определенного профиля и чередующегося знака. Число полюсов* должно быть кратно двум ($N=2p$), и, следовательно, p определит порядок мультипольности системы: $p=1$ - диполь, $p=2$ - квадруполь, $p=3$ - секступоль и так далее. В этих системах МП имеет дополнительные плоскости симметрии и антисимметрии, и поэтому потенциал /1.6/ должен удовлетворять еще двум условиям:

$$\Phi(r,\phi) = -\Phi(r,-\phi),$$

$$\Phi(r,\phi) = \Phi\left(r, \frac{\pi}{p} - \phi\right). \qquad /2.1/$$

* Под "полюсами" мы имеем в виду и все другие способы получения МП.

С учетом этих условий /1.6/ принимает вид

$$\Phi(r,\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} b_N r^N \sin N\phi , \qquad /2.2/$$

где $N = (2k+1)p$. Соответственно для компонент индукции МП получим:

$$B_r = -\mu_0 \sum_{k=0}^{\infty} N r^{N-1} b_N \sin N\phi ,$$

$$B_\phi = -\mu_0 \sum_{k=0}^{\infty} N r^{N-1} b_N \cos N\phi . \qquad /2.3/$$

Таким образом, в спектре МП мультипольных систем с ненарушенной симметрией присутствуют гармоники только с $N = (2k+1)p$, $(k=0,1,\ldots)$, в частности в диполе $(p=1)$ - это гармоники с $N=1,3,5,\ldots$, в квадруполе $(p=2)$ – $N=2,6,10,\ldots$, в секступоле $(p=3)$ - это гармоники с $N=3,9,15,\ldots$ и т.д. Гармоника, соответствующая $k=0$, является основной, а в идеальной мультипольной системе - единственной. Наличие гармоник с $k>0$ связано с невозможностью обеспечить в реальном устройстве такую форму полюсов или распределение тока, которые создавали бы граничные условия, требующие, в свою очередь, существования во внутренней области только одной основной гармоники. Например, невозможно практически обеспечить распределение тока строго по закону $I = I_0 \sin 2\phi$ на границе $r=R$ в системе для формирования квадрупольного МП, невозможно также изготовить дипольный магнит, например, с полюсами неограниченной протяженности. Следует отметить, что фазы этих, характерных для данной мультипольной системы, гармоник либо совпадают с фазой основной гармоники, либо отличаются на 180°.

В случае нарушения условий симметрии, что всегда имеет место для реальной конструкции, в спектре МП мультипольной системы могут появляться и нехарактерные для нее любые другие гармоники, фазы которых относительно основной заранее неизвестны. В качестве иллюстрации мы рассчитали гармонические спектры МП идеальной в оригинале квадрупольной линзы для некоторых модельных случаев нарушения симметрии. При расчете гармонических коэффициентов предполагалось выполнение условий $\sin\phi_0 n \simeq n\phi_0$, $\cos n\phi_0 \simeq 1$ с точностью не хуже 0,05 для $n \le 15$, что и определяет верхнюю границу углового смещения полюса. Гармонические спектры, показанные на *рис.1,2,* получены для независящих друг от друга азимутальных и амплитудных возмущений функции, заданной на границе. Амплитудные возмущения можно интерпретировать как радиальное смещение полюса или токовой поверхности, образующих мультипольную систему, но при этом следует полагать $\alpha_i \ll 1$, расчет, однако, справедлив и для любых других значений α_i. Результат совместного воздействия амплитудных и азимутальных возмущений может быть получен посредством соответствующей суперпозиции приведенных спектров. Амплитуды гармоник в наших примерах вычислены для $\phi_0 = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-2}$ /это в большинстве случаев ниже возможной точности изготовления магнитных систем/ на границе области.

Анализируя полученные данные, можно сказать, что в общем случае в МП мультипольной системы могут присутствовать любые гармоники и, следовательно, измерительная система должна быть чувствительна ко всему спектру, вплоть до некоторой наивысшей гармоники, номер которой определяется требованиями к точности измерений. Заметим только, что дополнительные гармоники появляются и тогда, когда ось измерительной катушки, обладающей чувствительностью к спектру, не совпадает с осью симметрии системы.

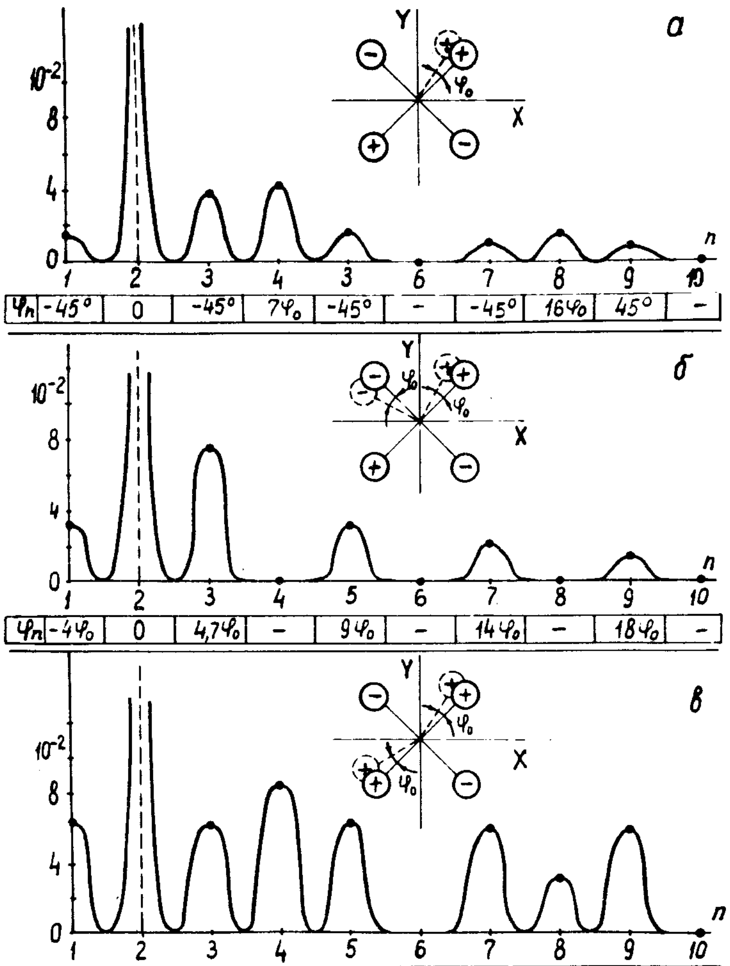
3. ТОЧНОСТЬ МЕТОДА

Рассмотрим два основных фактора, определяющих методическую точность определения МП методом гармонического анализа.

Это, во-первых, количество гармонических коэффициентов, подлежащих измерению, и во-вторых, точность определения величин гармонических коэффициентов.

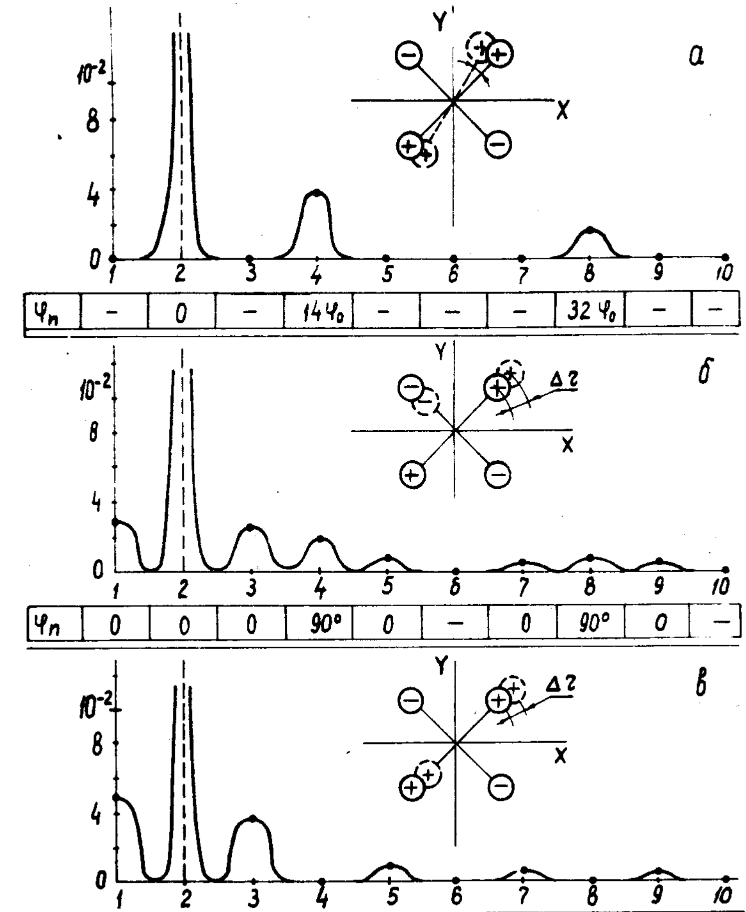
а. Количество гармонических коэффициентов

В общем случае заранее точно определить количество членов разложения /1.7/, обеспечивающих заданную точность оп-



а: φ_n	-45°	0	-45°	$7\varphi_0$	-45°	–	-45°	$16\varphi_0$	45°	–
б: φ_n	$-4\varphi_0$	0	$4{,}7\varphi_0$	–	$9\varphi_0$	–	$14\varphi_0$	–	$18\varphi_0$	–
в: φ_n	90°	0	270°	0	90°	–	270°	0	90°	–

Рис. 1. Гармонические спектры магнитного поля квадрупольной линзы при азимутальных нарушениях симметрии.



а: φ_n	–	0	–	$14\varphi_0$	–	–	–	$32\varphi_0$	–	–
б: φ_n	0	0	0	90°	0	–	0	90°	0	–
в: φ_n	45°	0	-45°	–	45°	–	-45°	–	45°	–

Рис. 2. Гармонические спектры магнитного поля квадрупольной линзы при других нарушениях симметрии.

ределения МП, затруднительно, поскольку это количество зависит от величины гармонических коэффициентов, обуславливаемой типом системы формирования МП и несовершенством ее изготовления. В случае, когда можно считать, что

$$C_n\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \approx \text{const.} \equiv D,$$

где, в соответствии с /1.10/ :

$$C_n = \left[\left(\frac{\partial^{n-1}B_x}{\partial x^{n-1}}\right)^2_{r=0} + \left(\frac{\partial^{n-1}B_y}{\partial y^{n-1}}\right)^2_{r=0}\right],$$

для оценки получаем:

$$B \equiv B^a_{r,\phi} = -D\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = -D\cdot e, \qquad /3.1/$$

и, следовательно, номер наивысшей гармоники можно найти из соотношения

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(n-1)!} \gtrsim e(1-\boldsymbol{e}), \qquad /3.2/$$

где $\boldsymbol{e}$ - относительная точность определения МП, $e \approx 2{,}71828\ldots$ Если, например, задать $\boldsymbol{e} \lesssim 10^{-6}$, то необходимо взять $m \geq 10$.

На практике обычно требуется сформировать по возможности "чистое" мультипольное поле, и идеальным является МП, определяемое одной основной гармоникой с номером $n = p$. В этом случае относительную погрешность поля можно выразить как:

$$\boldsymbol{e} = \sum_{\substack{n \\ (n\neq p)}}^{m} \boldsymbol{e}_n,$$

где

$$\boldsymbol{e}_n = \frac{nQ_n}{pQ_p}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-p}. \qquad /3.3/$$

Если считать, что основной вклад в МП дают гармоники, характерные для данной мультипольной системы, то в /3.3/ следует положить $n = p(2k+1)$. В этом случае также количество гармоник, подлежащих определению, зависит от качества изготовления системы и размера рабочей области апертуры магнита. Сопоставление результатов экспериментального исследования целого ряда мультипольных систем [6-8] показывает, что в среднем достаточно определить 10÷14 гармонических коэффициентов.

б. Точность измерения гармонических коэффициентов

Используя /1.7/, можно получить выражение для квадрата модуля вектора МП в виде:

$$B^2 \equiv |\vec{B}|^2 = \sum_{n=1}^{m}\left(P_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_{in})P_nP_i\cos[(n-i)\phi + \phi_n - \phi_i]\right), \qquad /3.4/$$

где

$$P_n = -\mu_0 n\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} Q_n;$$

$$\delta_{in} = \begin{cases} 1, & i = n; \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

Относительная ошибка в определении B, связанная с неточностью измерения гармонических коэффициентов в предположении, что $\delta\phi_n - \delta\phi_i \approx 0$, будет:

$$\frac{\delta B}{B} = \sum_{n=1}^{m}\frac{\dfrac{\delta P_n}{P_n} + \sum\limits_{i=1}^{n}(1-\delta_{in})\dfrac{P_i}{P_n}\left(\dfrac{\delta P_n}{P_n} + \dfrac{\delta P_i}{P_i}\right)\cos[(n-i)\phi + \phi_n - \phi_i]}{1 + 2\sum\limits_{i=1}^{n}(1-\delta_{in})\dfrac{P_i}{P_n}\cos[(n-i)\phi + \phi_n - \phi_i]}. \qquad /3.5/$$

Если считать, что все гармоники могут быть измерены с одинаковой относительной точностью, то /3.5/ принимает простой вид

$$\frac{\delta B}{B} = \sum_{n=1}^{m}\frac{\delta P_n}{P_n} = m\frac{\delta P}{P}, \qquad /3.6/$$

из которого следует, что в случае произвольного двумерного МП

$$\frac{\delta Q_n}{Q_n} = \frac{1}{m}\frac{\delta B}{B}. \qquad /3.7/$$

В мультипольных магнитных системах относительная точность измерения гармоник в соответствии с /3.2/ будет:

$$\delta(\epsilon_n) = \frac{n}{p}\cdot\frac{\delta(Q_n)}{Q_n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-p}. \qquad /3.8/$$

Практически достижимая точность определяется способом измерения гармоник, а также целым рядом аппаратурных и инструментальных факторов, подробно рассматривать которые в этой части работы мы не будем. Отметим только, что такими факторами являются погрешности в определении радиального и азимутального положения датчика относительно магнитной системы; количество азимутов, на которых определяются значения магнитного потока и ошибки в определении величины последнего, погрешности калибровки датчика.

В заключение авторы выражают благодарность Л.П.Зиновьеву за интерес к работе и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

А. Вычисление гармонических спектров при амплитудных возмущениях

Зададим граничные условия следующим образом:

$$f(\phi) = (1+\alpha_i)\sin 2\phi ,$$

где α_i - неизменны в промежутках $\frac{(i-1)\phi}{2} \leq \phi \leq \frac{i\phi}{2}$, $i = 1,2,3,4$.

Для нахождения коэффициентов фурье-разложения используем обычные выражения:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi\, d\phi ; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin n\phi\, d\phi . \qquad /A.1/$$

После подстановки и группировки получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_0^{2\pi} \sin 2\phi \cos n\phi\, d\phi + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \int_{\frac{(i-1)\pi}{2}}^{\frac{i\pi}{2}} \sin 2\phi \cdot \cos n\phi\, d\phi \right\}, \qquad /A.2/$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_0^{2\pi} \sin 2\phi \cdot \sin n\phi\, d\phi + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \int_{\frac{(i-1)\pi}{2}}^{\frac{i\pi}{2}} \sin 2\phi \cdot \sin n\phi\, d\phi \right\} \qquad /A.3/$$

и, наконец, вычисляя интегралы, находим:

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi(4-n^2)} \times \begin{cases} 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4); & n = 4k, \quad k = 0,1,\dots \\ (\alpha_1 - \alpha_4) - (\alpha_3 - \alpha_2); & n = (2k+1), \end{cases} \\ 0; \qquad\qquad n = 2(2k+1). \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi(4-n^2)} \times (-1)^k [(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_3 - \alpha_4)]; & n = 2k+1, \quad k = 0,1,\dots \\ 0, & n = 2k, \quad k \geq 2, \\ 1 + \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4); & n = 2. \end{cases}$$

Б. Гармонические спектры при азимутальных возмущениях

В качестве примера рассмотрим модель, изображенную на *рис. 1в.* Граничные условия зададим в виде:

$$f(\phi) = \begin{cases} 0; & 0 \leq \phi \leq \phi_0 ; \quad \frac{3}{2}\pi - \phi_0 \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi ; \\ \sin 2\phi ; & \pi/2 + \phi_0 \leq \phi < \pi - \phi_0 ; \quad 3/2\pi < \phi \leq 2\pi ; \\ \sin 2(\phi - \phi_0); & \phi_0 < \phi \leq \pi/2, \quad \pi \leq \phi < 3/2\pi - \phi_0 ; \\ \sin 2\phi + \sin 2(\phi - \phi_0); & \pi/2 < \phi < \pi/2 + \phi_0, \quad \pi - \phi_0 \leq \phi < \pi . \end{cases} \qquad /Б.1/$$

Подставляя /В.1/ в /А.1,2/ и вычисляя интегралы, получим в конечном итоге:

$$a_n = \begin{cases} \frac{2\phi_0}{\pi}(1 - 2\phi_0)\sin^2\frac{n\pi}{2}; & n \neq 2, \\ 0 & n = 2 . \end{cases} \qquad /Б.2/$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4n\phi_0}{\pi(4-n^2)}\left[\cos^2\dfrac{n\pi}{2}\left(1+\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\right], & n \neq 2 \\ 1, & n=2. \end{cases} \quad /Б.3/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dayton I.E. et al. Rec. Scin. Instr., 1954, v.25, p.485.*
2. *Греков Н.Н. и др. ПТЭ, 1956, №2, с.29.*
3. *Смайт В. Электростатика и электродинамика. ИЛ., М., 1954.*
4. *Elmore W.C., Garret M.W. Rev.Scin. Instr., 1954, v.25,p.480.*
5. *Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.*
6. *Coupland J.H., Baynham D.E. Proc. of the 4th Int. Conf. on Magnet Technology, Brookhaven, 1972, p.738.*
7. *Lamb W.H. et al. Proc. of the Int. Symp. on Magnet Technology. Stanford, 1965, p.487.*
8. *Langenbeck B. Proc. of the 5th Int. Conf. on Magnet Technology. Roma, 1975, p.237.*

Рукопись поступила в издательский отдел
8 февраля 1979 года.