СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P9 - 11916

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ РАЗМЕРАХ КОЛЬЦЕВЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

1978

P9 - 11916

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ РАЗМЕРАХ КОЛЬЦЕВЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. P9 - 11916

О среднеквадратичных размерах кольцевых пучков заряженных частиц

С помощью метода полных моментов функции распределения выводятся уравнения для среднеквадратичных размеров кольцевых заряженных пучков с учетом бетатронных колебаний и энергетического разброса частиц, движущихся в линейных электромагнитных полях. Исследуются стационарные состояния пучков и их устойчивость. В случае медленного изменения внешних электромагнитных полей получены адиабатические инварианты, на основе которых в произвольные моменты времени определяются размеры пучков. Полученные уравнения для изменения малых размеров при адиабатическом изменении внешних полей могут применяться в расчетах сжатия электронных колец в коллективных ускорителях ионов, когда размеры колец определяются как разбросом по энергии, так и бетатронными колебаниями.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Kasarinov N.Yu., Perelshteyn E.A. P9 - 11916

On RMS-Dimensions of Circular Charged Particle Beams

The system of equations for RMS-dimensions of circular charged particle beams has been obtained using the mometum method. The betatron ocsillations and energy spread have been taken into account. The steady state of beams and their stability are considered. For slowely changing external electromagnetic fields adiabatic invariants are found. These invariants may be used for determination of beam RMS-dimensions at arbitrary moment of the time.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

При исследовании равновесных характеристик кольцевых пучков заряженных частиц и их поведения при адиабатическом изменении параметров внешнего электромагнитного поля обычно рассматриваются две модели. В первой [1] не учитывается энергетический разброс и радиальный размер пучка определяется амплитудами бетатронных колебаний частиц. Во второй модели [2] радиальный фазовый объем считается равным нулю и размер определяется энергетическим разбросом частиц в пучке.

В данной работе с помощью метода полных моментов функции распределения [3] рассматриваются стационарные состояния, свободные колебания и адиабатическое изменение среднеквадратичных размеров кольцевых пучков заряженных частиц с отличными от нуля энергетическим разбросом и радиальным фазовым объемом.

1. Рассмотрим азимутально-симметричный пучок заряженных частиц, имеющих энергетический разброс и движущихся в магнитном поле $\vec{H} = (H_r, 0, H_z)$. Линеаризованные уравнения движения в цилиндрической системе координат (r, θ, z) можно записать в следующем виде [2,4]:

$$\ddot{x} + \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}\dot{x} + \omega_r^2 x + F_x = \frac{\omega_0}{m\gamma_0 r_0} w,$$

$$\ddot{z} + \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}\dot{z} + \omega_z^2 z + F_z = 0, \qquad /1/$$

$$\dot{w} = 0,$$

где m - масса частицы; $x = r - r_0$; $w = M_\theta - M_\theta^0$; $\omega_{r,z} = \nu_{r,z}\omega_0$ - частоты бетатронных колебаний; $\gamma_0, \omega_0, r_0, M_\theta^0$ - релятивистский фактор, частота обращения, радиус и обобщенный момент количества движения равновесной частицы соответственно. Сила $\vec{F}$ обусловлена действием собственного электромагнитного поля пучка.

Образуем из координат и скоростей частицы вектор-столбец Y:

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{z} \\ w \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X \\ \\ V \end{pmatrix} . \qquad /2/$$

Уравнения движения /1/ представим в матричном виде:

$$\frac{dY}{dt} = AY + F_\Lambda . \qquad /3/$$

Матрица A определена следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma \\ b & a \end{pmatrix} ;$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad b = \begin{pmatrix} -\omega_r^2 & 0 \\ 0 & -\omega_z^2 \\ 0. & 0 \end{pmatrix} ; \qquad /4/$$

$$a = \begin{pmatrix} -\dfrac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} & 0 & \dfrac{\omega_0}{m\gamma_0 r_0} \\ 0 & -\dfrac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Вектор-столбец F_Λ построен из компонентов силы Лоренца собственного электромагнитного поля пучка:

$$F_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_x \\ F_z \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \\ F \end{pmatrix} . \qquad /5/$$

Так же как в работе /5/, введем моменты второго порядка функции распределения f частиц в пучке:

$$M = \overline{YY^*} = \frac{1}{N} \int_\Omega YY^* f\, d\Omega , \qquad /6/$$

где N - линейная плотность частиц, знак "$*$" означает транспонирование матрицы. Интегрирование в /6/ проводится по всей области фазового пространства, занятого частицами ($d\Omega = dx\,dz\,d\dot{x}\,d\dot{z}\,dw$). Матрицу M удобно представить в блочном виде:

$$M = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xv} \\ M_{xv}^* & M_{vv} \end{pmatrix} . \qquad /7/$$

Матрицы M_{xx}, M_{vv}, M_{xv} определены так же, как в /5/, например, M_{xx} - матрица среднеквадратичных размеров пучка:

$$M_{xx}^{ij} = \overline{x_i x_j} , \quad i, j = 1, 2. \qquad /8/$$

В отличие от /5/ эти матрицы имеют разный порядок. M_{xx}, M_{vv} - квадратные симметричные матрицы второго и третьего порядка соответственно, а M_{xv} - прямоугольная матрица размерности 2x3.

Моменты второго порядка удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dM}{dt} = AM + MA^* + \overline{F_\Lambda Y^*} + \overline{YF_\Lambda^*} . \qquad /9/$$

Согласно формулам /2/, /5/ запишем:

$$\overline{YF^*_\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{XF^*} \\ 0 & \overline{VF^*} \end{pmatrix}. \qquad /10/$$

Система /9/ будет замкнутой, если элементы матрицы $\overline{YF^*_\Lambda}$ выражаются через моменты второго порядка. Эти зависимости легко находятся в случае линейных собственных полей, т.е. для пучков с равномерной по эллиптическому сечению плотностью заряда /1/. Для таких пучков учет собственного электромагнитного поля приводит к зависимости элементов матрицы b /4/ от среднеквадратичных размеров пучка:

$$b = b_{ext} + b_s\,, \qquad /11/$$

где матрица b_{ext} совпадает с b в формуле /4/, а матрица b_s равна:

$$b_s = \frac{\nu c^2}{\gamma_0^3 \ \mathrm{Sp} M_{xx}^{1/2}} \ \Sigma^* M_{xx}^{-1/2} \ . \qquad /12/$$

Здесь $\nu = N r_e$ - параметр Будкера; $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$, e - заряд частицы; c - скорость света в вакууме; матрица $M_{xx}^{-1/2}$ определена так, что $M_{xx}^{-1/2} \cdot M_{xx}^{-1/2} = M_{xx}^{-1}$; $\mathrm{Sp} M_{xx}^{1/2}$ - след матрицы $M_{xx}^{1/2}$.

Полученные уравнения для моментов второго порядка остаются справедливыми и для пучков с плотностью заряда более общего вида. Определим функцию распределения f как

$$f = f(Y^* M^{-1} Y). \qquad /13/$$

Матрица M^{-1} в /13/ - обратная матрица к M /7/. Проводя вычисление плотности заряда и тока так же, как в /1/, получим:

$$\rho = \frac{eN}{\pi\, |M_{xx}|^{1/2} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)} \rho_0 \,(X^* M_{xx}^{-1} X), \qquad /14.1/$$

$$j = M_{xv}^* M_{xx}^{-1} X \rho. \qquad /14.2/$$

$|M_{xx}|$ - определитель матрицы M_{xx} , j - вектор-столбец:

$$j = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix}. \qquad /15/$$

Компоненты $j_{1,2}$ определяют токи, связанные с бетатронными колебаниями, а j_3 обусловлен отклонением азимутального тока от среднего значения $j_\theta = \omega_0 r_0 \rho$.

В работе /6/ показано, что для пучков с плотностью заряда вида /14.1/ справедливо выражение

$$\overline{XF^*} = M_{xx} b_s^* \,, \qquad /16/$$

не зависящее от вида функции ρ_0. Воспользовавшись определением плотности тока /14.2/, имеем:

$$\overline{VF^*} = M^*_{xv} M_{xx}^{-1} \ \overline{XF^*} = M^*_{xv} b_s^* \ . \qquad /17/$$

Таким образом, уравнения /9/ с учетом /10/, /16/, /17/ образуют замкнутую систему для моментов второго порядка и вид их не зависит от распределений f.

2. Если радиальное и аксиальное движения разделяются, то можно искать частное решение системы /9/ с диагональной матрицей M_{xx} . Для моментов второго порядка, связанных с радиальным движением, имеем в этом случае согласно /9/:

$$\dot{\overline{x^2}} = 2\overline{x v_r},$$

$$\dot{\overline{v_r^2}} = 2\frac{\omega_0}{m\gamma_0 r_0}\overline{v_r w} - 2\omega_r^2\overline{x v_r} - 2\frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}\overline{v_r^2},$$

$$\dot{\overline{x v_r}} = \overline{v_r^2} + \frac{\omega_0}{m\gamma_0 r_0}\overline{xw} - \omega_r^2\overline{x^2} - \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}\overline{x v_r}, \qquad /18/$$

$$\dot{\overline{xw}} = \overline{v_r w},$$

$$\dot{\overline{v_r w}} = \frac{\omega_0}{m\gamma_0 r_0}\overline{w^2} - \omega_r^2\overline{xw} - \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}\overline{v_r w},$$

$$\dot{\overline{w^2}} = 0.$$

Учет собственных полей пучка приводит к обычному кулоновскому сдвигу частоты

$$\nu_r^2 = 1 - n - \frac{\nu}{\gamma_0^3\beta_0^2}\frac{r_0^2}{a_r(a_r + a_z)}, \qquad /19/$$

где $a_{r,z}$ - среднеквадратичные полуразмеры пучка, $a_r = \sqrt{\overline{x^2}}$, $a_z = \sqrt{\overline{z^2}}$, n- показатель спада внешнего поля, $\beta_0 = \frac{\omega_0 r_0}{c}$ - относительная угловая скорость частиц в кольце.

Уравнения для моментов второго порядка, связанных с аксиальным движением, в этом случае совпадают с уравнениями, подробно исследовавшимися в /5/. Нетрудно показать, что изменение аксиального размера a_z определяется уравнением Владимирского-Капчинского:

$$\frac{1}{\gamma_0}\frac{d}{dt}\gamma_0\frac{da_z}{dt} + \omega_z^2 a_z - \frac{E_z^2}{\gamma_0^2 a_z^3} = 0. \qquad /20/$$

Здесь $\nu_z^2 = n - \frac{\nu}{\gamma_0^3\beta_0^2}\frac{r_0^2}{a_z(a_r+a_z)}$, E_z - величина эффективного фазового объема, связанного с аксиальными колебаниями:

$$E_z^2 = \gamma_0^2(\overline{z^2}\,\overline{v_z^2} - (\overline{zv})^2) = \text{const}. \qquad /21/$$

В стационарном состоянии уравнения /18/,/20/ переходят в систему алгебраических уравнений, определяющих размеры пучка:

$$a_r^2 = a_б^2 + a_c^2, \qquad /22.1/$$

$$a_б^2 = \frac{\overline{v_r^2}}{\omega_0^2\nu_r^2}, \qquad /22.2/$$

$$a_c = \frac{\sqrt{\overline{w^2}}}{m\gamma_0\beta_0 c\nu_r^2}, \qquad /22.3/$$

$$a_z^2 = \frac{E_z}{\gamma_0\omega_0\nu_z}. \qquad /22.4/$$

Как видно из формул /22/, стационарные размеры пучка зависят от трех произвольных постоянных: аксиального фазового объема E_z, разброса по обобщенным моментам количества движения $\sqrt{\overline{w^2}}$ /или, с точностью до постоянного множителя, энергетического разброса/ и радиальной "температуры" $\overline{v_r^2}$. Для пучков частиц малой плотности безразмерные частоты бетатронных колебаний $\nu_{r,z}$ не зависят от размеров пучка и формулы /22/ определяют равновесные размеры. В этом случае квадрат радиального размера является суммой квадратов "бетатронного" размера $a_б$, определяемого радиальной температурой, и "синхротронного" размера a_c, определяемого энергетическим разбросом. При $a_б \ll a_c$ из /22/ следуют результаты модели /1/. В обратном предельном случае $a_c \gg a_б$ уравнения /22/ совпадают с полученными в /2/.

Если собственными полями частиц можно пренебречь, то уравнения /18/ линейны. В статистических полях система /18/ дает устойчивые колебания среднеквадратичного размера:

$$\overline{x^2} = C_1 + C_2\cos\omega_r t + C_3\sin\omega_r t + C_4\cos 2\omega_r t + C_5\sin 2\omega_r t, \qquad /23/$$

где постоянные C_i линейным образом связаны с моментами начальной функции распределения.

Как видно из формулы /23/, колебания среднеквадратичного размера $\overline{x^2}$ имеют характерные частоты ω_r и $2\omega_r$.

Особенный интерес представляют адиабатические инварианты системы /18/, /20/, дающие зависимость от времени размеров пучка при медленном изменении параметров внешнего электромагнитного поля. При медленной зависимости параметров системы /18, 20/ от времени, когда выполняются соотношения

$$\frac{\dot\gamma_0}{\omega_0\gamma_0} \sim \frac{\dot r_0}{\omega_0 r_0} \sim \epsilon \ll 1, \qquad /24/$$

первые производные по времени в /18/, /20/ являются величинами $\sim\epsilon$. Пренебрегая величинами более высокого порядка малости, получим:

$$m\beta_0 c\gamma_0\nu_r^2\overline{xw} = \overline{w^2} = \text{const}, \qquad /25.1/$$

$$\gamma_0^2\omega_z^2 a_z^4 = E_z^2 = \text{const}. \qquad /25.2/$$

Выражение /25.2/ совпадает с адиабатическим инвариантом бетатронных колебаний [/4/].

Для нахождения третьего адиабатического инварианта воспользуемся известным свойством системы линейных дифференциальных уравнений /18/ [/7/]:

$$D = C e^{-2\int_0^t \frac{\dot\gamma_0}{\gamma_0}dt'}, \qquad /26/$$

где C - произвольная постоянная, D - определитель матрицы моментов, связанных с радиальным движением:

$$D = \begin{vmatrix} \overline{x^2} & \overline{xv_r} & \overline{xw} \\ \overline{xv_r} & \overline{v_r^2} & \overline{v_r w} \\ \overline{xw} & \overline{v_r w} & \overline{w^2} \end{vmatrix}. \qquad /27/$$

Пренебрегая при вычислении определителя величинами $\sim\epsilon^2$, имеем:

$$\gamma_0^2 v_r^2(\overline{x^2}\,\overline{w^2} - (\overline{xw})^2) = C \equiv C_1\overline{w^2}. \qquad /28/$$

Из третьего уравнения системы /18/ в этом же приближении находим:

$$\overline{v_r^2} + \frac{\omega_0}{m\gamma_0 r_0}\overline{xw} - \omega_r^2\overline{x^2} = 0. \qquad /29/$$

Исключим $\overline{v_r^2}$ и $\overline{xw}$ из /29/ с помощью формул /25.1/, /28/. В результате получим искомый инвариант:

$$\gamma_0\omega_r\left(a_r^2 - \frac{\overline{w^2}}{\nu_r^2 m\gamma_0\omega_0 r_0}\right) = \text{const} \geq 0. \qquad /30/$$

Это выражение удобно переписать, используя "бетатронный" и "синхротронный" размеры, аналогично формулам /22/:

$$a_r^2 = a_c^2 + a_б^2, \qquad /31/$$

причем $a_б^2 = \frac{const}{\gamma_0 \omega_r}$, а синхротронный размер по-прежнему определяется выражением /22.3/.

Уравнения /22.3/, /25.2/, /31/ определяют зависимость размеров от времени при адиабатическом изменении параметров системы. При малом числе частиц "бетатронный" и "синхротронный" размеры не зависят друг от друга и изменяются во времени согласно своим инвариантам. Квадрат радиального размера, так же как в стационарном случае, является суммой квадратов "синхротронного" и "бетатронного" размеров.

Полученные уравнения для изменения малых размеров при адиабатическом изменении внешних полей могут применяться в расчетах сжатия электронных колец в коллективных ускорителях ионов, когда размеры колец определяются как разбросом по энергии, так и бетатронными колебаниями электронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ярковой О.И. ЖТФ, 1966, 36, с. 986.*
2. *Рубин Н.Б. ОИЯИ, 2-2882, Дубна, 1966.*
3. *Дымников А.Д., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-10620, Дубна, 1977; Nuclear Instruments and Methods, 1978, 148(3), p.567.*
4. *Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей, ФМ, М., 1962.*
5. *Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А., Шевцов В.Ф. ОИЯИ, Р9-10985, Дубна, 1977.*
6. *Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-11337, Дубна, 1978.*
7. *Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, "Наука", М., 1966.*

Рукопись поступила в издательский отдел 26 сентября 1978 года.