ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р9 - 11788

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

СТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИРКУЛИРУЮЩИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКАХ

1978

P9 - 11788

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

СТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИРКУЛИРУЮЩИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКАХ

Направлено в ЖТФ

Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. Р9 - 11788

Стационарные нелинейные азимутальные волны в циркулирующих заряженных пучках

Рассматриваются нелинейные стационарные волны при условиях, когда линейная теория предсказывает развитие неустойчивости типа отрицательной массы. Волны представляют собой последовательность самофокусирующихся сгустков, которые движутся со скоростью, равной средней скорости обращения частиц. Если энергетический разброс частиц значительно меньше порогового разброса, следующего из линейной теории эффекта отрицательной массы, то угловой и радиальный размеры сгустков малы.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Kasarinov N.Yu., Perelstein E.A. P9 - 11788

Stationary Nonlinear Azimuthal Waves in Circulating Charged Beams

Under negative-mass instability conditions the existence of nonlineary stationary waves is established. The waves are consecutive self-focusing bunches moving with average rotation velocities of particles. Whenever the energy spread in the beam is sufficiently less than the linear theory negative-mass instability threshould,the angular as well as radial bunch dimensions are small.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Вопрос о режиме сильной нелинейности был поставлен уже в первых теоретических работах по эффекту отрнцательной массы [1,2]. Линейная теория возмущений, используемая в этих работах, указывала на возможность образования сгустков /банчей/ в первоначально однородных по азимуту пучках. В работе [1] рассматривалось решение самосогласованной задачи, соответствующее движению одного эллипсоидального сгустка. Азимутальная самомодуляция пучков наблюдалась в экспериментах [3,4].

В последнее время интерес к нелинейной теории азимутальных неустойчивостей в циркулирующих пучках проявляется , в частности, в связи с экспериментами по устойчивости интенсивных электронных колец [5,6,7]. В конечном счете изучение сильной нелинейности в проблеме устойчивости электронных колец должно привести к прояснению вопроса о допустимых параметрах коллективных ускорителей с электронными кольцами.

В данной работе рассматриваются нелинейные стационарные волны при условиях, когда возможен только эффект отрицательной массы. Волны представляют собой сгустки, которые движутся со скоростью, равной средней скорости обращения частиц.

Функция распределения f для одномерного /азимутального/ движения частиц удовлетворяет уравнению [1,2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \dot{w}\frac{\partial f}{\partial w} = 0 , \qquad /1/$$

где ϕ - азимутальная координата, w - отклонение обобщенного момента количества движения от его значения для равновесной частицы.

Уравнения движения частицы записывают обычно для малых отклонений от равновесного /для которого $\dot{\phi} = \omega_0$, $w = 0$ / в приближенном виде:

$$\dot{\phi} = \omega_0 + a w, \quad \dot{w} = 2\pi R e E. \qquad /2/$$

Здесь R - равновесный радиус, E - азимутальная компонента напряженности собственного электрического поля пучка, a - константа, связанная с эффективной массой частицы.

Примем нормировку функции распределения

$$\int f(w, \phi)\, dw\, d\phi = 2\pi \qquad /3/$$

и свяжем напряженность электрического поля с плотностью числа частиц

$$\lambda(\phi) = \int f(w, \phi)\, dw \qquad /4/$$

через импеданс камеры с пучком $Z(\phi)$ соотношением [8]

$$2\pi R E = -\frac{N e \beta c}{(2\pi)^2 R} \int_0^{2\pi} Z(\phi - \phi')\lambda(\phi')\, d\phi', \qquad /5/$$

где $\beta = \frac{R\omega_0}{c}$, N - полное число частиц.

Рассматривая стационарные волны, зависящие лишь от координаты $\theta = \phi - \omega_0 t$, уравнение /1/ с учетом /2/-/5/ можно представить как

$$w\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{N e \beta c}{(2\pi)^2 R a} \frac{\partial f}{\partial w} \int_0^{2\pi} Z(\theta - \theta')\lambda(\theta')\, d\theta' = 0. \qquad /6/$$

Будем искать решения системы уравнений /4/, /6/ в классе факторизованных функций, т.е.

$$f(w, \theta) = \psi(\theta)\chi(w), \qquad /7/$$

нормируя функцию $\chi(w)$ на единицу.

Нетрудно убедиться, что функция

$$\chi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\mu}\right), \qquad /8/$$

а функция $\psi(\theta)$ находится из интегродифференциального уравнения:

$$\frac{d\psi}{d\theta} + \frac{N e \beta c}{(2\pi)^2 R a} \frac{1}{\mu} \psi(\theta) \int_0^{2\pi} Z(\theta - \theta')\psi(\theta')\, d\theta' = 0. \qquad /9/$$

Величина μ в соответствии с /8/ равна среднеквадратичному значению w ($\mu = \langle w^2 \rangle$). Область определения μ задается условием существования нетривиальных решений уравнения /9/.

Ограничение класса функций привело нас к "аппроксимации подобия", предложенной Э.М.Сесслером в [7]. Следовательно, если в модели Сесслера в асимптотике по времени возникают стационарные волны, то они характеризуются соотношениями /8-9/.

Чтобы выяснить свойства $\psi(\theta)$, удобно рассмотреть наряду с уравнением /9/ его фурье - трансформанту, которую запишем в виде

$$\mu n C_n - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \mu_m C_m C_{n-m} = 0, \qquad /10/$$

где введены обозначения

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta, \qquad /11/$$

$$\mu_n = \frac{i Z_n N e \beta C}{2\pi R a n}, \qquad /12/$$

$$Z_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta. \qquad /13/$$

Из формул /3/, /7/ и /8/ получаем $C_0 = 1$, μ_n есть пороговое для n -ой гармоники значение среднеквадратичного разброса по импульсу w в линейной теории эффекта отрицательной массы.

Из уравнения /1О/ следует:

1. Стационарные волны возможны лишь в системах без диссипации энергии. Действительно, при $n = 0$ из уравнения /1О/ получаем достаточное условие существования решения $\mu_m = \mu_{-m}$, или, учитывая /12/ и /13/, $Z_n = -Z_{-n} = -Z_n^*$. Таким образом, для существования стационарных волн импеданс должен быть чисто реактивным.

2. Коэффициенты C_n - четные функции n, и, следовательно, $\psi(\theta)$ - четная функция θ. Четность C_n можно установить, рассматривая уравнение /1О/ при $n < 0$, меняя при этом суммирование по m на суммирование по $-m$ и используя следствие 1/ $\mu_m = \mu_{-m}$. В результате непосредственно убеждаемся, что коэффициенты C_n удовлетворяют тем же уравнениям, что и C_{-n}, т.е. $C_n = C_{-n}$.

3. Если известно произвольное решение системы /1О/, скажем C_n, то коэффициенты $e^{in\theta_0} C_n$ также удовлетворяют системе /1О/. В этом легко убедиться прямой подстановкой новых коэффициентов в /1О/. Указанное свойство означает всего лишь инвариантность решения относительно выбора начала отсчета координаты θ.

4. Система /1О/ допускает решения с симметрией порядка n_0 /n_0 - натуральное число/, т.е. такие решения, которые не меняются при поворотах системы координат на величину, кратную $\frac{2\pi}{n_0}$. Действительно, выбор решения /1О/ в виде $C_n = \begin{cases} C_{kn_0} & n = kn_0 \\ 0 & n \neq kn_0 \end{cases}$, где n_0 - произвольное целое число, не противоречит системе /1О/. Физически это означает, что возможны нелинейные стационарные волны в виде последовательности n_0 одинаковых сгустков.

5. Линеаризация уравнения /1О/ при условиях $|C|_{n \neq 0} \ll 1$ дает приближенные значения μ, равные

$$\mu = \mu_p \qquad /14/$$

Значение C_p при этом произвольное /требуется лишь малость модуля C_p /, значения C_m при $m \neq p (m \neq 0)$- величины порядка малости, большей $|C_p|$. Такие линейные стационарные волны, естественно, могут существовать лишь при выполнении порогового условия /14/ для выделенной гармоники p.

Из положительной определенности μ и соотношений /12/ и /14/ следует, что линейные стационарные волны возможны при отрицательной эффективной массе $(\alpha < 0)$ и емкостном импедансе $(\mathrm{Im}\, Z_p > 0)$ и при положительной массе $(\alpha > 0)$ и индуктивном импедансе $(\mathrm{Im}\, Z_p < 0)$, что согласуется с результатами линейной теории продольных неустойчивостей.

Используя результаты 1, 2, и 4, редуцируем уравнение /9/ к системе алгебраических уравнений. Для этого представим импеданс $Z(\theta)$ в виде

$$Z(\theta) = 2i \sum_{m>0} Z_m \sin m\theta \qquad /15/$$

и подставим /15/ в /9/. Тогда с учетом /12/ формальное решение уравнения /9/ есть

$$\psi = A e^{2 \sum\limits_{m>0} B_m \frac{\mu_{mn_0}}{\mu} \cos mn_0 \theta}, \qquad /16/$$

где

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \psi(\theta) \cos mn_0 \theta , \qquad /17/$$

а постоянная A определяется из условия нормировки:

$$A = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp\left(2 \sum_{m>0} \frac{\mu_{mn_0}}{\mu} B_m \cos mn_0 \theta\right) d\theta\right]^{-1} . \qquad /18/$$

Из формул /16/-/18/ получается система уравнений для коэффициентов B_m:

$$B_m = \frac{\int_0^{\pi} d\theta \cdot \cos mn_0\theta \exp(2 \sum_{m>0} B_m \frac{\mu_{mn_0}}{\mu} \cos mn_0\theta)}{\int_0^{\pi} d\theta \cdot \exp(2 \sum_{m>0} B_m \frac{\mu_{mn_0}}{\mu} \cos mn_0\theta)} . \qquad /19/$$

Если параметры пучков меняются так, что $\frac{\mu_m}{\mu}$ сохраняются неизменными /в соответствии с /8/ и /12/ это означает $\frac{N}{\langle w^2 \rangle} = \text{const}$ /, то, как следует из /19/, не меняются и коэффициенты B_m. Такое правило было установлено экспериментально в работе /5/.

Найдем решения уравнения /19/, сделав модельные предположения о виде импеданса. Рассмотрим самый простой случай, когда в импедансе можно ограничиться одной гармоникой Z_{n_0}. При этом система /19/ сводится к одному уравнению:

$$\frac{\int_0^{\pi} d\theta \cos n_0\theta \cdot \exp(x_{n_0} \cos n_0\theta)}{\int_0^{\pi} d\theta \exp(x_{n_0} \cos n_0\theta)} = \frac{I_1(x_{n_0})}{I_0(x_{n_0})} = \chi_{n_0} x_{n_0} . \qquad /20/$$

В этой формуле $\chi_m = \frac{\mu}{2\mu_m}$, $x = \frac{B_m}{\chi_m}$, а $I_0(x)$ и $I_1(x)$ - модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно.

При малых значениях аргумента x_{n_0} получаем результат линейного приближения $\chi_{n_0} \simeq \frac{1}{2}$, B_{n_0} - произвольное малое число. В пределе $|x_{n_0}| \gg 1$ значения левой части в уравнении /20/ стремятся к единице, и мы получаем $B_{n_0} \simeq 1$, $\mu \ll \mu_{n_0}$. Таким образом, среднеквадратичный разброс w, при котором возможны стационарные волны, расположен в интервале

$$0 < \mu \le \mu_{n_0} . \qquad /21/$$

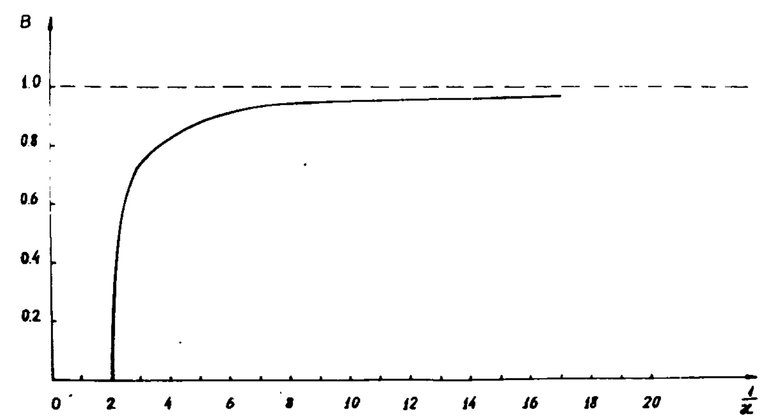
Зависимость амплитуды гармоники с номером n_0 - B от параметра $1/\chi$, полученная из уравнения /20/, представлена на рисунке.

Для сильной нелинейности колебаний /малые значения μ/μ_{n_0} / амплитуды гармоники n_0 и гармоник с не очень высокими номерами $(m \le n_0)$ близки к амплитуде нулевой гармоники.

Из формул /16/ и /18/ получаем явный вид функции $\psi(\theta)$ в режиме сильной нелинейности:

$$\psi(\theta) = \frac{\exp(\frac{2\mu_{n_0}}{\mu} \cos n_0\theta)}{I_0(\frac{2\mu_{n_0}}{\mu})} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{\frac{4\pi\mu_{n_0}}{\mu}} \exp[\frac{2\mu_{n_0}}{\mu}(\cos n_0\theta - 1)] .$$



Зависимость амплитуды гармоники B *от параметра* $1/\chi$.

Формулы /8/ и /22/ указывают на существование решений, соответствующих последовательности n_0 сгустков, удаленных по азимуту на расстояния $\frac{2\pi}{n_0}$ друг от друга, с малой радиальной и угловой шириной /угловая ширина сгустка примерно равна $\frac{2}{n_0}\sqrt{\frac{\mu}{\mu_{n_0}}}$ /.

В общем случае в последовательности μ_m можно ограничиться N первыми членами и рассматривать N уравнений вида /19/. Найдем решение такой системы в пределе сильной нелинейности $(\frac{\mu_m}{\mu} \gg 1)$. Заметим, что уравнения /19/ с использованием введенных выше обозначений можно представить как

$$\frac{\partial \ell n I}{\partial x_{kn_0}} = X_{kn_0} x_{kn_0}, \qquad /23/$$

где

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \exp\left(\sum_{k=1}^{N} x_{kn_0} \cos k n_0 \theta\right). \qquad /24/$$

Обозначим точки максимумов функции

$$P(\theta) = \sum_{k=1}^{N} x_{kn_0} \cos kn_0 \theta \qquad /25/$$

через θ_ℓ, причем если функция P положительно определена при $\theta = 0, \pi$, то $\theta = 0$ пусть соответствует $\ell = 0$, а $\theta = \pi - \ell = \ell_{max}$.

Вблизи максимумов ограничимся параболической аппроксимацией функции $P(\theta)$:

$$P(\theta) \simeq P(\theta_\ell) - a_\ell^2 \frac{(\theta-\theta_\ell)^2}{2}, \qquad /26/$$

где

$$a_\ell^2 = \left|\frac{d^2P}{d\theta^2}\right|_{\theta = \theta_\ell}.$$

Подстановка /26/ в /24/ и приближенное вычисление интеграла в /24/ дают в результате

$$I \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \epsilon_\ell \frac{1}{a_\ell} e^{P(\theta_\ell)}, \qquad \epsilon_\ell = \begin{cases} 1 & \ell = 0, \ell_{max}, \\ 2 & \ell \neq 0, \ell_{max}. \end{cases} \qquad /27/$$

Используя /27/ при решении уравнений /23/, с точностью до экспоненциально малых поправок получаем $B_{kn_0} = 1$. Распределение плотности частиц по азимуту соответственно есть

$$\psi(\theta) \simeq \sqrt{2\pi a_0} \exp\left[\frac{2}{\mu}\sum_{m=1}^{N} \mu_{mn_0}(\cos mn_0 \theta - 1)\right]. \qquad /28/$$

Экспоненциал формулы /28/ принимает максимальные значения в точках $\theta = \frac{2\pi}{mn_0}$. В окрестности этих точек функция $\psi(\theta)$ приближенно равна

$$\psi(\theta) \simeq \sqrt{2\pi a_0} \exp\left[-\frac{2\sum_{m=1}^{N} \mu_{mn_0} m^2 n_0^2}{\mu}\theta^2\right]. \qquad /29/$$

Таким образом, в случае, когда линейная теория предсказывает появление неустойчивости типа отрицательной массы, возможно существование стационарных волн в виде последовательности самофокусирующихся сгустков. Если энергетический разброс частиц значительно меньше порогового разброса, следующего из линейной теории эффекта отрицательной массы, то угловой размер сгустков, так же как и радиальный, мал.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коломенский А.А., Лебедев А.Н. АЭ, 1959, 7, с. 549; Proc. Internat.Conf. on High Energy Accelerat. and Instr. Geneva, 1959, p. 115.*

2. Nielsen C.E., Sessler A.M., Symon K.R. In: Proc. Internat.Conf. on High Energy Accelerat. and Instr., Geneva, 1959, p. 239.
3. Самойлов И.М., Соколов А.А. ЖЭТФ, 1960, 39, с. 257.
4. Seidl M., Čzech J. Phys., 1961, B11, p. 390.
5. Faltens A. et al. Proc.Internat. Conf. on High Energy Accelerat., Stanford, Calif. 1974, p. 226; LBL-2488, Berkeley, Calif., 1974.
6. Pellegrini C., Sessler A.M., LBL, ERAN-203, Berkeley, Calif., 1973.
7. Sessler A.M. LRL, ERAN-207, Berkeley, Calif., 1973.
8. Sessler A.M. IEEE Trans.Nuclear Science, NS-18, p. 3, 1971; p. 1039; LBL, UCRL-20607, Berkeley, Calif., 1971.

*Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября 1978 года.*