

11776

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Эк чит зала  
P9 11776

Л.С.Барабаш, П.Ф.Белошицкий, Н.Ю.Казаринов,  
Э.А.Перельштейн, В.П.Саранцев, В.В.Чалышев

СПОСОБ ФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ  
В СТАТИЧЕСКОМ И ИМПУЛЬСНОМ  
МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

**1978**

Р9 - 11776

Л.С.Барабаш, П.Ф.Белошицкий, Н.Ю.Казаринов,  
Э.А.Перельштейн, В.П.Саранцев, В.В.Чалышев

СПОСОБ ФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ  
В СТАТИЧЕСКОМ И ИМПУЛЬСНОМ  
МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

ОИЧ  
БИБЛИОТЕКА

Барабаш Л.С. и др.

P9 - 11776

Способ формирования электронных колец в статическом и импульсном магнитных полях

С целью повышения цикличности работы коллективного ускорителя ионов рассмотрен вариант компрессора электронных колец со статическим магнитным полем. Для продвижения кольца в область сильного статического поля используется импульсное магнитное поле в виде бегущей волны. Бегущая волна создается токовым импульсом, распространяющимся по замедляющей линии с сосредоточенными параметрами. Обеспечиваются условия набора вращательной энергии электронов и их фокусировки. Приводятся результаты численного моделирования динамики электронного кольца и обсуждаются некоторые технические достоинства компрессора.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Barabash L.S., et al.

P9 - 11776

On a Formation of Electron Rings in Static and Pulse Magnetic Fields

With the aim of increasing cycle of operation of the ion collective accelerator a compressor for electron rings with a static field is considered. For ring moving into the region of a strong static field a pulse magnetic field in the form of a running wave is used. The running wave is created by a current pulse travelling over the distributed parameters line. The conditions for electron rotational energy gain and their focusing are provided. The simulation results of electron ring dynamics are presented and some technical advantages of compressor are discussed.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

После первого сообщения о способе формирования плотных электронных колец в динамических адгезаторах, где кольца сжимаются в импульсном магнитном поле<sup>/1/</sup>, сразу же появились различные предложения статических способов компрессии<sup>/2-5/</sup>. В статических адгезаторах электронные кольца формируются при движении электронов в статическом магнитном поле. Основное достоинство статических адгезаторов состоит в том, что они позволяют формировать кольца с большой частотой повторений и, следовательно, на их основе могут строиться коллективные ускорители с большой интенсивностью ускоренных ионов. Цикличность работы динамических адгезаторов ограничена большими значениями потребляемой и рассеиваемой мощностей.

Обладея очевидным преимуществом - высокой цикличностью, статические адгезаторы, однако, уступают динамическим в степени компрессии электронных колец. Кольца с наибольшей ускоряющей способностью получены в настоящее время именно в динамических адгезаторах<sup>/6/</sup>.

В данной работе предлагается способ компрессии электронных колец, который допускает и высокую цикличность работы адгезатора, и достаточно большую плотность сжатых колец. Такие качества появляются за счет использования для компрессии комбинации статического и импульсного магнитных полей, причем значения напряженности импульсного магнитного поля здесь значительно ниже, чем в динамических адгезаторах. В отличие от известных статических адгезаторов предлагаемый вариант позволяет увеличить вращательную энергию электронов за счет действия вихревого электрического поля, связан-

ного с импульсным магнитным полем. Увеличение вращательной энергии электронов приводит к дополнительному по сравнению с возможным в статических адгезаторах поджатию малых размеров кольца, к ослаблению требований на энергию инжектируемого электронного пучка и к существенному ослаблению кулоновского расталкивания в кольце.

Конфигурация статического и импульсного магнитных полей выбирается так, чтобы в месте нахождения кольца выполнялись условия фокусировки электронов.

### 1. ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ АДГЕЗАТОРА СО СТАТИЧЕСКИМ И ИМПУЛЬСНЫМ МАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

Принципиальная схема установки для формирования электронных колец изображена на рис. 1. Нарастающее вдоль оси  $z$  статическое магнитное поле  $B_z^{CT}$  создается соленоидом, расположенным снаружи металлической ка-

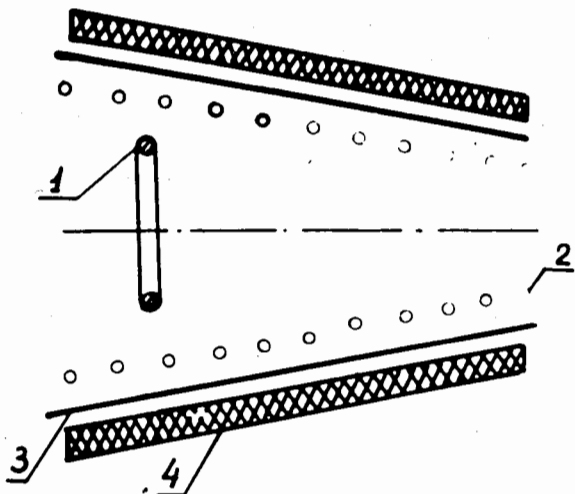


Рис. 1. Принципиальная схема установки: 1 - электронное кольцо; 2 - замедляющая линия; 3 - металлическая камера; 4 - соленоид, создающий статическое магнитное поле.

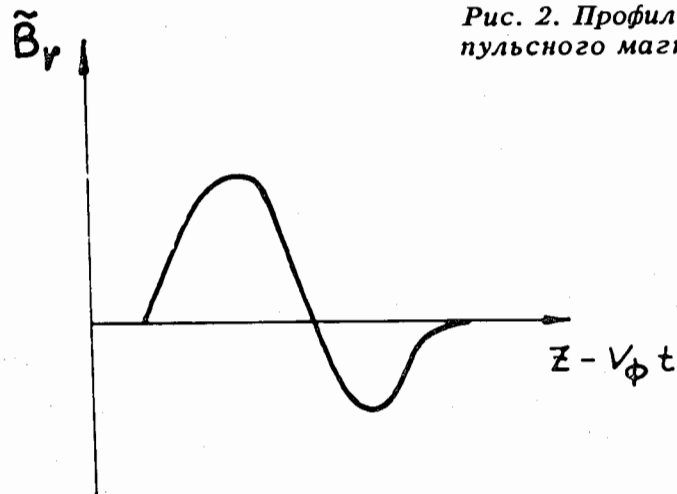


Рис. 2. Профиль волны импульсного магнитного поля.

меры, внутри которой помещена спиральная замедляющая линия с сосредоточенными параметрами. Импульсное магнитное поле образуется при распространении по линии токового импульса, генерируемого специальной схемой, подключенной ко входу линии.

Способ расчета импульсного магнитного поля приведен в Приложении 1, характерные параметры установки приведены в разделе 2, где обсуждаются результаты численного моделирования динамики электронного кольца.

Характерный профиль радиальной компоненты напряженности импульсного магнитного поля  $\tilde{B}_r$  /символ-здесь и в дальнейшем указывает на то, что величина относится к импульсному полю/ показан на рис. 2, где  $v_\phi$  - фазовая скорость волны. В месте нахождения кольца радиальная компонента напряженности импульсного поля компенсирует соответствующую компоненту статического поля  $B_r^{CT}$ , так что выполняется условие

$$\tilde{B}_r(r, z, t) + B_r^{CT}(r, z) = 0, \quad /1/$$

здесь  $r$  - радиус кольца. Условие продвижения кольца в нарастающее статическое поле есть  $\tilde{B}_r > 0$  /в месте нахождения кольца/. Вторым уравнением, определяющим

положение кольца, является условие сохранения момента количества движения:

$$M_\phi = r^2 B_{z\Sigma} - r A_\phi = \text{const},$$

$$B_{z\Sigma}(r, z, t) = B_{z\Sigma}^{\text{ст}}(r, z) + \tilde{B}_z(r, z, t), \quad /2/$$

$$A_\phi(r, z, t) = A_\phi^{\text{ст}}(r, z) + \tilde{A}_\phi(r, z, t),$$

где  $A_\phi^{\text{ст}}$ ,  $\tilde{A}_\phi$  - азимутальные компоненты векторных потенциалов статического и импульсного магнитных полей.

Дифференцируя /1/ и /2/ по времени, получим условия сжатия и продвижения кольца в сильное статическое поле в виде:

$$\dot{r}_0 = -\frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{p \frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial t} + n \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial t} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial t} \right)}{n(1-n) - p^2} < 0, \quad /3/$$

$$\dot{z}_0 = \frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{p \left( \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial t} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial t} \right) + (1-n) \frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial t}}{n(1-n) - p^2} > 0, \quad /4/$$

где  $n = -\frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{\partial B_{z\Sigma}}{\partial r} = -\frac{r}{B_{r\Sigma}} \frac{\partial B_{r\Sigma}}{\partial z}$  - показатель спада поля,

$p = \frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{\partial B_{z\Sigma}}{\partial z} = -\frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{\partial B_{z\Sigma}}{\partial r}$ , Если все величины им-

пульсного поля зависят от  $z$  и  $t$ , как  $f(z - v_\phi t)$ , а статическое поле выбрано линейно растущим по  $z$  так, что

$$B_r^{\text{ст}} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z^{\text{ст}}}{\partial z}, \text{ то}$$

$$\dot{r}_0 = -v_\phi \frac{n}{n(1-n) - p^2} \frac{r}{B_{z\Sigma}} \frac{\partial B_z^{\text{ст}}}{\partial z}, \quad /5/$$

$$\dot{z}_0 = v_\phi \left\{ 1 - \frac{1}{n(1-n) - p^2} \frac{r}{B_{z\Sigma}} \left[ p \frac{\partial B_r^{\text{ст}}}{\partial r} - (1-n) \frac{\partial B_r^{\text{ст}}}{\partial z} \right] \right\}. \quad /6/$$

Из /5/ видно, что при  $p^2 < n(1-n)$  условие сжатия выполняется на участке волны  $\tilde{B}_r$  с  $0 < n < 1$ . В области достаточно сильного поля  $B_{z\Sigma}$  скорость кольца, как это следует из /6/, примерно равна фазовой скорости волны.

Увеличение вращательной энергии электронов происходит под действием вихревого электрического поля

$$\tilde{E}_\phi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial t}. \text{ Для увеличения энергии необходимо, что-}$$

бы в месте нахождения кольца выполнялось условие

$$\frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial t} > 0. \text{ Для волны } \tilde{A}_\phi(z, t) = \tilde{A}_\phi(z - v_\phi t) \text{ это условие вы-}$$

полняется на спаде  $\tilde{A}_\phi$  и удовлетворяется одновременно с условиями  $B_r > 0$  и  $0 < n < 1$ .

Зависимость радиальной компоненты индукции от радиуса ( $p \neq 0$ ) приводит к тому, что малые колебания частицы около равновесного положения являются связанными, а частоты нормальных колебаний в пренебрежении пространственным зарядом кольца равны /4/

$$\nu_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p^2 - n(1-n)}. \quad /7/$$

Для устойчивости малых колебаний необходимо, чтобы в области нахождения кольца выполнялось условие

$$p^2 < n(1-n), \quad /8/$$

в частности, заведомо должно выполняться условие  $|p| < \frac{1}{2}$ .  
Условие /8/ вместе с условиями продвижения кольца

в область нарастающего статического поля и увеличения вращательной энергии электронов является определяющим при выборе режима работы с импульсным полем.

Изменение малых полуразмеров кольца  $a_1, a_2$  в процессе сжатия определяется уравнениями

$$\gamma^2 a_{1,2}^4 \left( \frac{\nu_{1,2}^2}{r^2} - \frac{Q}{a_{1,2}(a_1+a_2)} \right) = \text{const}, \quad /9/$$

где  $Q = \frac{4\nu}{\beta^2 \gamma^3}$ ,  $\nu = \frac{N_e}{2\pi r} \frac{e^2}{mc^2}$ ,  $\gamma$  - релятивистский фактор,  $N_e$  - число электронов в кольце. Уравнения /9/,

полученные в модели с равномерным распределением плотности заряда по сечению кольца /7/, справедливы для широкого класса распределений, если  $a$  понимать как среднеквадратичный размер /8/.

Как видно из уравнений /9/, в рассматриваемом случае малые размеры кольца уменьшаются /кулоновским расталкиванием пренебрегаем/, как в динамических адгезаторах, пропорционально величине  $\sqrt{\gamma/\gamma}$ , т.е. значительно сильнее, чем в статических адгезаторах. Влияние кулоновского расталкивания на конечном этапе сжатия сильно ослаблено ростом  $\gamma$ .

## 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА

При расчете импульсного поля были выбраны следующие параметры установки: спираль состояла из 100 витков, каждый из которых через конденсатор был соединен с металлической камерой, радиус витка линейно уменьшался с возрастанием его номера, например от 34 до 9 см, шаг витков - 2 см. Емкости конденсаторов полагались все равными  $15 \cdot 10^{-9}$  Ф, так что собственная частота LC-контуров, последовательность которых изображена на рис. 9,  $\omega_c \approx 10^7$  Гц. Напряжение на входе замедляющей линии выбиралось в виде  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}, \quad t < \frac{T_0}{2}, \quad U(t) = 0, \quad t > \frac{T_0}{2} \quad \text{с } U_0 = 50 \div 60 \text{ кВ,}$$

$T_0 = 10 \div 15$  мкс. При этом в линии возникал токовый импульс, который распространялся со скоростью  $v_{\Phi} \approx 10^7$  см/с. Типичный вид полей, получающихся при распространении такого импульса по линии, приведен на рис. 3,4.

Как видно из рис. 3, через время  $\sim 4$  мкс амплитуда напряженности магнитного поля достигает величин, близких к максимальным. Сравнение рис. 3 и рис. 4 показывает, что возможны режимы, при которых после окончания переходного процесса, т.е. достижения максимальной амплитуды напряженности поля, последняя остается примерно постоянной. Уменьшение амплитуды на рис. 4 можно объяснить более ранним по сравнению со случаем, соответствующим рис. 3, выключением входного сигнала. Другой причиной, уменьшающей амплитуду поля, является отражение импульса от конца линии. Как видно из рис. 3,4, впереди основной волны благодаря индуктивным взаимодействиям ближайших витков наводятся

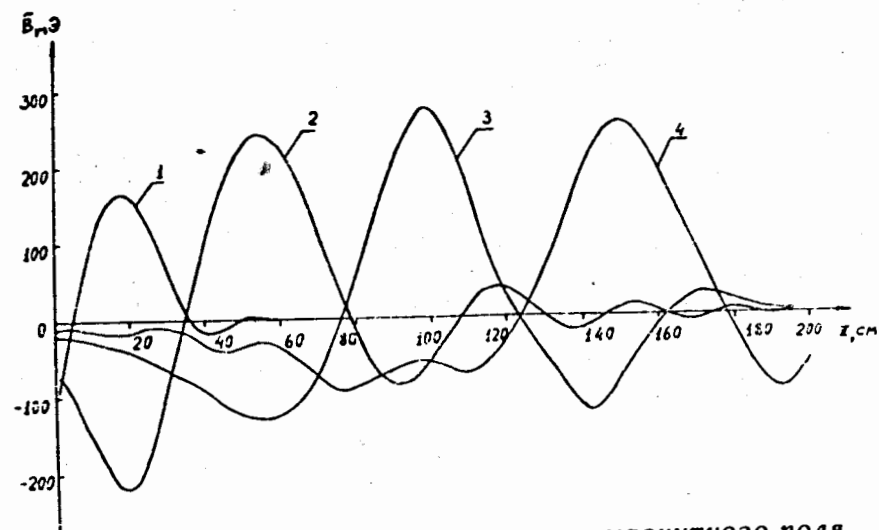


Рис. 3. Распространение импульсного магнитного поля по замедляющей линии: 1 - пространственное распределение поля через 3 мкс после подачи входного сигнала / $T_0 = 15$  мкс/, 2 - через 9 мкс, 3 - через 15 мкс, 4 - через 21 мкс. Величины напряженностей полей вычислены на расстоянии 6 см от витков замедляющей линии.

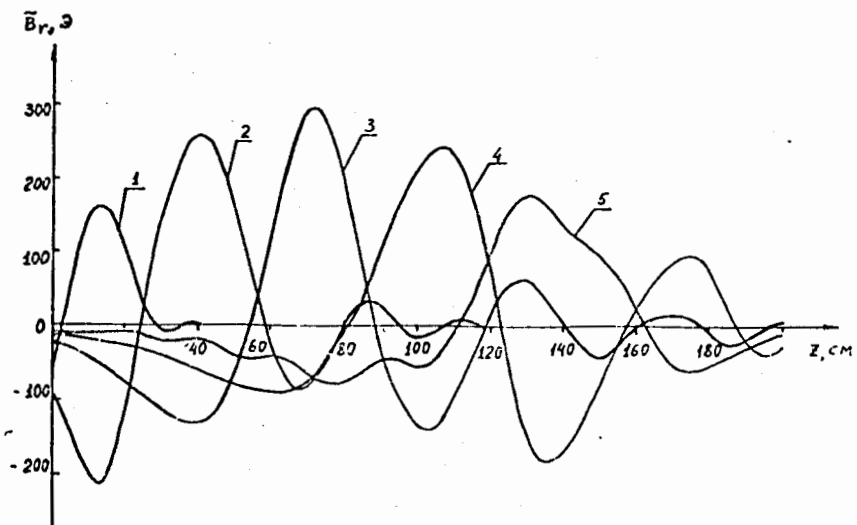


Рис. 4. Распространение импульсного магнитного поля по замедляющей линии: 1 - пространственное распределение поля через 2 мкс после подачи входного сигнала  $/T_0 = 10$  мкс/, 2 - через 6 мкс, 3 - через 10 мкс, 4 - через 14 мкс, 5 - через 18 мкс. Величины напряженностей полей вычислены на расстоянии 6 см от витков замедляющей линии.

противоположные по знаку токи и поля. Когда наведенные токи достигают конца линии, они могут существенно исказить форму волны. Как видно из сравнения рис. 3 и рис. 4, дисперсия сигнала во втором случае проявляется гораздо сильнее. Кроме того, уширение импульса при распространении его по линии приводит к уменьшению градиентов поля, а следовательно, к уменьшению показателя спада  $n$ . Этот эффект можно компенсировать уменьшением шага спирали.

При численном моделировании динамики электронного кольца статическое магнитное поле задавалось аналитически в виде

$$A_{\phi}^{CT}(r, z) = \frac{r}{2} B_z^{CT}(z),$$

$$B_z^{CT}(z) = B_z^i + \frac{2B_r}{r_i} (z - z_i) + a(z - z_i)^2,$$

/10/

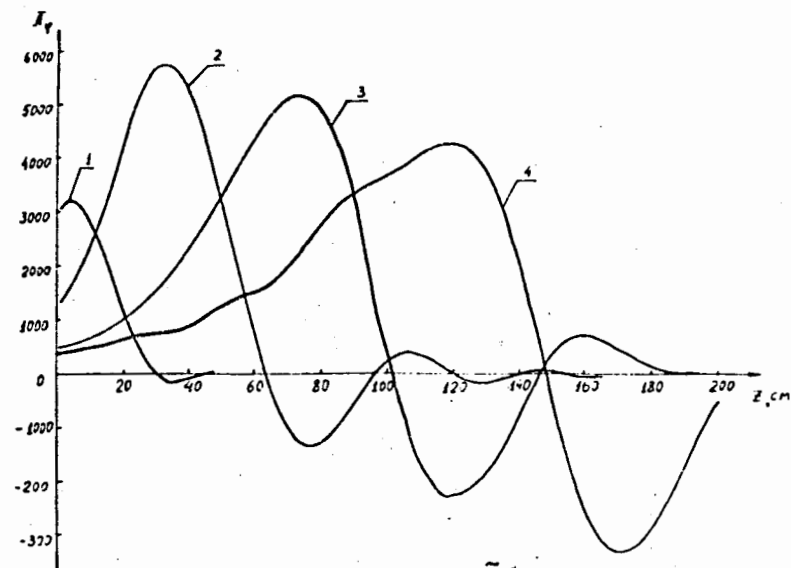


Рис. 5. Распространение волны  $\vec{A}_{\phi}$  по замедляющей линии: 1 - пространственное распределение векторного потенциала через 3 мкс после подачи входного сигнала  $/T_0 = 15$  мкс/, 2 - через 9 мкс, 3 - через 15 мкс, 4 - через 21 мкс.

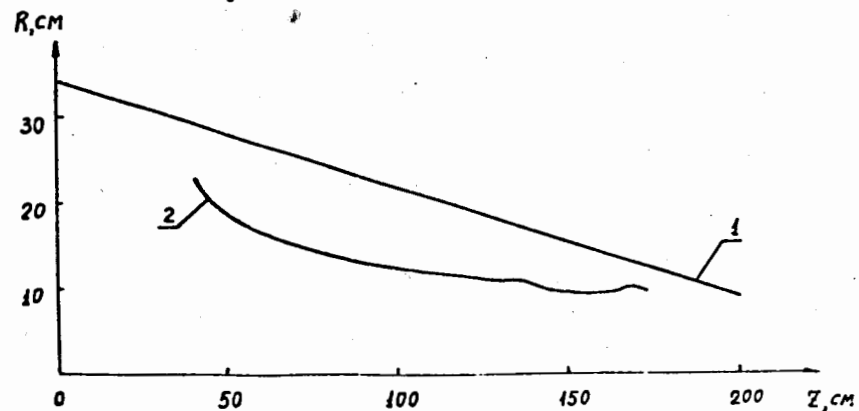


Рис. 6. Траектория кольца при его движении в статическом и импульсном магнитных полях: 1 - витки замедляющей линии; 2 - траектория кольца.

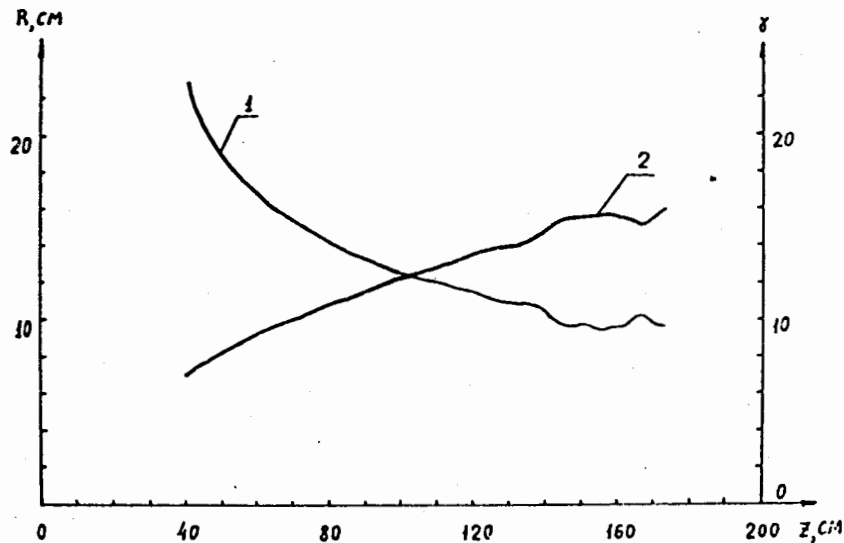


Рис. 7. Изменение радиуса кольца /1/ и вращательной энергии электронов /2/ при движении в область сильного статического поля.

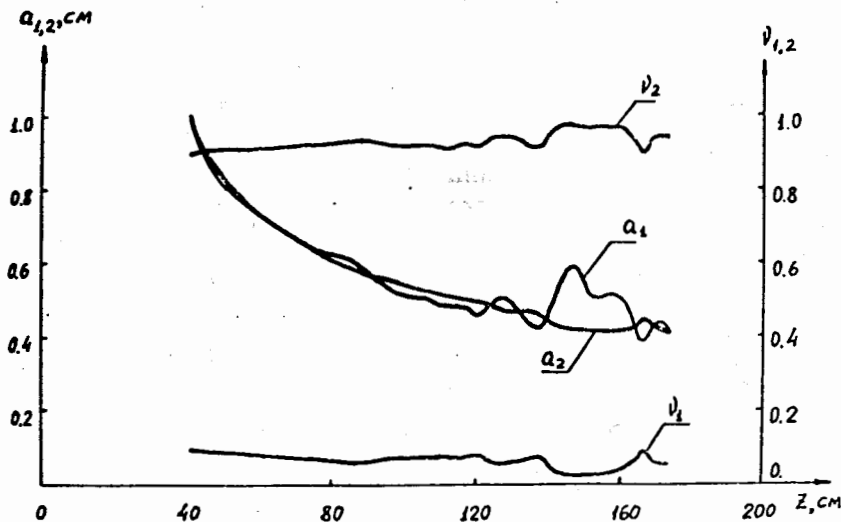


Рис. 8. Изменение полуразмеров  $a_1$ ,  $a_2$  и собственных частот  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  бетатронных колебаний при движении кольца в область сильного статического поля.

где  $V_r^i$ ,  $V_z^i$  - значения полей в точке инжекции  $r_i$ ,  $z_i$ ,  $t_i$ ;  $\alpha$  - коэффициент, изменяющийся в пределах  $0 < \alpha < 0,04$ , так что при  $z = 2$  м /конец установки/ отношение квадратичного члена к линейному было 30% для  $\alpha = 0,04$ . Коэффициент  $\alpha$  использовался, как свободный параметр, для управления движением кольца /замедления, сжатия/. Напряженность радиального статического поля вычислялась по формуле

$$V_r^{CT}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial V_z^{CT}(z)}{\partial z} \quad /13/$$

Траектория кольца в  $r-z$  плоскости определялась в каждый момент времени путем численного решения уравнений /1/, /2/ со статическим полем /12/, /13/. Типичный вид траектории представлен на рис. 6, на рис. 7, 8 показано изменение большого радиуса кольца  $R$ , его энергии  $\gamma$ , малых полуразмеров  $a_{1,2}$  и частот нормальных колебаний  $\nu_{1,2}$  при движении кольца в область сильного  $V_z \Sigma$  поля.

Отметим некоторые технические достоинства рассмотренного способа формирования электронных колец. Внутреннее расположение системы токовых витков позволяет повысить механическую прочность камеры адгезатора и облегчает получение высокого вакуума в установке. Благодаря движению кольца с большой скоростью, быстро проходятся резонансы бетатронных колебаний. Цикличность работы рассматриваемого варианта адгеза-

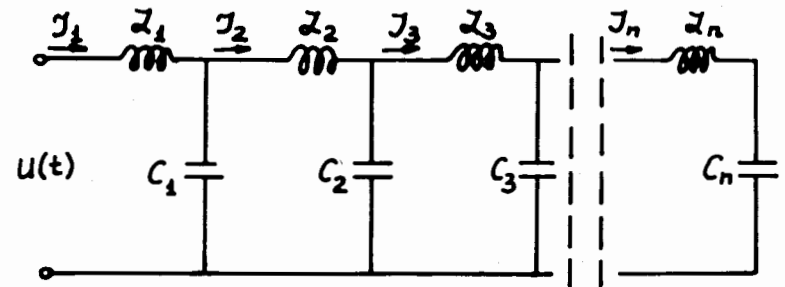


Рис. 9. Эквивалентная электрическая схема замедляющей линии.



тора должна быть ~100 Гц, что практически недоступно в динамических адгезаторах.

Авторы благодарны Ю.И.Алексахину за полезные обсуждения и В.А.Сенченко за помощь при численном моделировании на ЭВМ.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Расчет токов в замедляющей линии

Для расчета токов в замедляющей линии с сосредоточенными параметрами воспользуемся простейшей эквивалентной схемой, изображенной на рис. 9 и включающей в себя основные элементы линии.

На рис. 9  $I_1, I_2, \dots, I_n$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ,  $L_1, L_2, \dots, L_n$  — токи, емкости и индуктивности соответствующих элементов.

В квазистационарном случае токи определяются из системы уравнений [9]:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_0^t (I_1 - I_2) dt + \sum_{m \neq 1} M_{1,m} \frac{dI_m}{dt} = U(t),$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_0^t (I_2 - I_1) dt + \frac{1}{C_2} \int_0^t (I_2 - I_3) dt + \sum_{m \neq 2} M_{2,m} \frac{dI_m}{dt} = 0,$$

$$\dots$$

$$L_k \frac{dI_k}{dt} + \frac{1}{C_{k-1}} \int_0^t (I_k - I_{k-1}) dt + \frac{1}{C_k} \int_0^t (I_k - I_{k+1}) dt + \sum_{m \neq k} M_{k,m} \frac{dI_m}{dt} = 0,$$

$$\dots$$

$$L_{n-1} \frac{dI_{n-1}}{dt} + \frac{1}{C_{n-2}} \int_0^t (I_{n-1} - I_{n-2}) dt + \frac{1}{C_{n-1}} \int_0^t (I_{n-1} - I_n) dt +$$

$$+ \sum_{m \neq n-1} M_{n-1,m} \frac{dI_m}{dt} = 0,$$

$$L_n \frac{dI_n}{dt} + \frac{1}{C_{n-1}} \int_0^t (I_n - I_{n-1}) dt + \frac{1}{C_n} \int_0^t I_n dt + \sum_{m \neq n} M_{n,m} \frac{dI_m}{dt} = 0.$$

/П.1.1/

При написании системы /1/ учтено, что все витки попарно взаимодействуют через взаимные индуктивности  $M_{ik}$ . Продифференцируем систему /П.1.1/ по времени:

$$\sum_{m=1}^n \tilde{M}_{1m} \ddot{I}_m + \frac{1}{C_1} (I_1 - I_2) = \dot{U}(t),$$

$$\sum_{m=1}^n \tilde{M}_{2m} \ddot{I}_m - \frac{1}{C_1} I_1 + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) I_2 - \frac{1}{C_3} I_3 = 0,$$

$$\dots$$

$$\sum_{m=1}^n \tilde{M}_{km} \ddot{I}_m - \frac{1}{C_{k-1}} I_{k-1} + \left( \frac{1}{C_{k-1}} + \frac{1}{C_k} \right) I_k - \frac{1}{C_{k+1}} I_{k+1} = 0,$$

$$\dots$$

$$\sum_{m=1}^n \tilde{M}_{n-1,m} \ddot{I}_m - \frac{1}{C_{n-2}} I_{n-2} + \left( \frac{1}{C_{n-2}} + \frac{1}{C_{n-1}} \right) I_{n-1} - \frac{1}{C_n} I_n = 0,$$

$$\sum_{m=1}^n \tilde{M}_{nm} \ddot{I}_m - \frac{1}{C_{n-1}} I_{n-1} + \left( \frac{1}{C_{n-1}} + \frac{1}{C_n} \right) I_n = 0,$$

/П.1.2/

где

$$\tilde{M}_{ik} = \begin{cases} M_{ik}, & i \neq k, \\ L_{ii}, & i = k. \end{cases}$$

Систему /П.1.2/ удобно записать в матричном виде:

$$\tilde{M} \ddot{\vec{I}} + C \dot{\vec{I}} = \vec{U},$$

/П.1.3/

где матрица  $C$  и столбец  $\vec{U}$  имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{C_{n-1}} & \frac{1}{C_{n-1}} + \frac{1}{C_n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}(t) = \begin{pmatrix} \dot{U}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\xi^{(k)}$  и  $\lambda_k$  - собственные вектора и соответствующие им собственные числа матрицы  $\tilde{M}$ .

$$\sum_{\ell} \tilde{M}_{i\ell} \xi_{\ell}^{(k)} = \lambda_k \xi_i^{(k)}. \quad /П.1.4/$$

Решение уравнения /П.1.3/ будем искать в виде

$$I_k(t) = \sum_m a_m(t) \xi_k^{(m)}. \quad /П.1.5/$$

Подставляя /П.1.5/ в /П.1.3/ с учетом /П.1.4/ и используя ортогональность собственных векторов  $\xi^{(k)}$ , получим

$$\begin{aligned} \ddot{a}_i(t) + \sum_m \sum_{i,k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} C_{ik} \xi_i^{(n)} \xi_k^{(m)} \tilde{a}_m(t) &= \\ = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_i \tilde{U}_i(t) \xi_i^{(n)}, \end{aligned} \quad /П.1.6/$$

где  $\tilde{a}_n(t) = \sqrt{\lambda_n} a_n(t)$ . Решение уравнения /П.1.6/ ищем в виде разложения по собственным векторам  $\xi^{(\ell)}$  матрицы, составленной из элементов

$$A_{nm} = \sum_{i,k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} C_{ik} \xi_i^{(n)} \xi_k^{(m)},$$

$$\tilde{a}_n(t) = \sum_{\ell} \beta_{\ell}(t) \xi_n^{(\ell)}, \quad /П.1.7/$$

$$\sum_m \sum_{i,k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} C_{ik} \xi_i^{(n)} \xi_k^{(m)} \zeta_m = \tilde{\lambda}_p \zeta_n^{(p)}. \quad /П.1.8/$$

Подставляя /П.1.7/ в /П.1.6/, получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_{\ell}(t) + \tilde{\lambda}_{\ell} \beta_{\ell}(t) &= \gamma_{\ell}(t), \\ \gamma_{\ell}(t) &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_i \tilde{U}_i \xi_i^{(n)} \zeta_n^{(\ell)}. \end{aligned} \quad /П.1.9/$$

Отсюда

$$\beta_{\ell}(t) = A_{\ell}(t) \cos(\sqrt{\tilde{\lambda}_{\ell}} \cdot t) + B_{\ell}(t) \sin(\sqrt{\tilde{\lambda}_{\ell}} \cdot t),$$

$$A_{\ell}(t) = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_{\ell}}} \int_0^t \gamma_{\ell}(t) \sin(\sqrt{\tilde{\lambda}_{\ell}} \cdot t) dt + A_{\ell}(0),$$

$$B_{\ell}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_{\ell}}} \int_0^t \gamma_{\ell}(t) \cos(\sqrt{\tilde{\lambda}_{\ell}} \cdot t) dt + B_{\ell}(0). \quad /П.1.10/$$

Пусть в начальный момент времени  $I_k(0) = 0$ . Тогда в силу ортогональности собственных векторов  $\xi^{(k)}$  и  $\zeta^{(m)}$   $A_{\ell}(0) = 0$ .

Выразим  $B_{\ell}(0)$  через начальные значения  $\tilde{U}(0)$ . Из системы /1/ в начальный момент времени

$$\sum_k \tilde{M}_{ik} \dot{I}_k(0) = U_i(0)$$

найдем величины  $\dot{I}_k(0)$ :

$$\dot{I}_k(0) = U_1(0) \sum_m \frac{1}{\lambda_m} \xi_1^{(m)} \xi_k^{(m)}. \quad /П.1.11/$$

С другой стороны, из /П.1.5/ и /П.1.7/ имеем

$$\dot{I}_k(0) = \sum_{m,\ell} \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \dot{\beta}_\ell(0) \xi_k^{(m)} \zeta_m^{(\ell)} \quad /П.1.12/$$

Приравнявая /П.1.11/ и /П.1.12/ и используя ортогональность собственных векторов  $\xi^{(m)}$ , найдем

$$B_\ell(0) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} \dot{\beta}_\ell(0) = \frac{U_1(0)}{\sqrt{\lambda_\ell}} \sum_m \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \xi_1^{(m)} \zeta_m^{(n)} \quad /П.1.13/$$

Объединяя /П.1.5/, /П.1.7/, /П.1.10/ и /П.1.13/, окончательно получаем

$$\begin{aligned} I_k(t) = \sum_{m,\ell,n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} \{ & -\cos(\sqrt{\lambda_\ell} t) \int_0^t \dot{U}_1(t) \sin(\sqrt{\lambda_\ell} t) dt + \\ & + \sin(\sqrt{\lambda_\ell} t) [ \int_0^t \dot{U}_1(t) \cos(\sqrt{\lambda_\ell} t) dt + U_1(0) ] \} \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \xi_1^{(n)} \xi_k^{(m)} \zeta_n^{(\ell)} \zeta_m^{(\ell)} \quad /П.1.14/ \end{aligned}$$

Поле спиральной замедляющей линии получается путем суммирования полей отдельных витков. Магнитные поля  $B_r$ ,  $B_z$  тонкого кругового витка с током  $I$ , его векторный потенциал  $A_\phi$  и градиенты  $\partial B_r / \partial z$ ,  $\partial B_z / \partial z$  даются формулами /9,10/

$$F(r, z) = \frac{I}{C} G_F(r, z, R, Z), \quad /П.1.15/$$

где  $r$ ,  $z$  - координаты точки наблюдения,  $R$ ,  $Z$  - координаты витка, а  $G_F$  - геометрические факторы, соответствующие вычисляемой величине  $F$ , которая обозначает  $B_r$ ,  $B_z$  и т.д.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Veksler V.I. e.a. In: Proc. of VI Int. Conf. on High Energy Accelerat., Cambridge, 1967, p.289; ОИЯИ, Р9-3440-2, Дубна, 1968.
2. Berg R.E. e.a. Phys.Rev.Lett., 1969, 22, p.419.
3. Christofilos N.C. Phys. Rev.Lett., 1969, 22, p.830.
4. Laslett L.Y., Sessler A.M. IEEE Trans. Nucl.Sci., 1969, NS-16, No. 3, p.1034.
5. Левин М.И., Милиц А.Л., Науменко Е.Д. ДАН СССР, 1972, 204, №4, с. 840.
6. Долбилов Г.В. и др. ОИЯИ, Р9-11191, Дубна, 1977.
7. Ярковой О.И. ОИЯИ, 2183, Дубна, 1965.
8. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-11337, Дубна, 1978.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
10. Александров В.С. и др. ОИЯИ, Р9-9091, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел  
20 июля 1978 года.