СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р9 - 11735

Е.П.Жидков, Е.М.Кулакова, Р.В.Полякова

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ

1978

P9 - 11735

Е.П.Жидков, Е.М.Кулакова, Р.В.Полякова

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ

Жидков Е.П., Кулакова Е.М., Полякова Р.В. Р9 - 11735

Существование решения одной нелинейной краевой задачи транспортировки заряженных частиц в ускорителях

Доказано существование решения нелинейной краевой задачи транспортировки заряженных частиц для случая, когда магнитное поле поворотных магнитов описывается одной компонентой $B_z(x,y,z)$, а компоненты B_x и B_y появляются за счет разворота магнитов. Данная работа относится к проблемам создания систем транспортировки и согласования пучков частиц. Для создания подобных систем необходим расчет параметров и геометрии элементов системы. Математически в данном случае это сводится к решению краевой задачи системы нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Приведена математическая постановка и алгоритм решения на ЭВМ системы транспортировки пучка при быстром выводе на синхрофазотроне ЛВЭ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

I. Введение

Математическое моделирование, связанное с проблемами создания новых ускорителей и реконструкции старых (в частности, синхрофазотрона ЛВЭ) приводит к интересным математическим задачам. Некоторые из них являются настолько сложными нелинейными задачами, что единственная возможность исследования их состоит в разработке численных алгоритмов и реализации последних на ЭВМ.

К указанным проблемам относится задача оптимизации систем транспортировки при выводе пучка из ускорителя и расчет согласованных ("невидимых") прямолинейных промежутков в ускорителях. Эти задачи сводятся к выбору индукции в поворотных магнитах и градиентов линз и их расстановке так, чтобы по заданным начальным координате и направлению пучка на входе системы получить требуемые конечные координату и направление пучка на выходе системы.

Математически это сводится к решению краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений 2- го порядка.

В работе [1] дано описание постановки и алгоритма решения краевой задачи расчета поворотно-фокусирующих систем транспортировки при быстром выводе пучка на синхрофазотроне ЛВЭ.

В настоящей работе доказывается существование решения такой краевой задачи, когда магнитное поле задается только одной компонентой.

2. Уравнения движения заряженной частицы в выбранной системе координат и описание магнитного поля

Движение частицы в магнитном поле описывается уравнением в векторной форме [2]

$$(m\vec{v})' = \frac{e}{c}[\vec{v}\times\vec{B}], \qquad (I)$$

где m - масса, v - скорость, e - заряд частицы, c - скорость света.

Полагаем $m=const$, т.е. рассматриваем движение без ускорения. Уравнение (I) в декартовой системе координат будет:

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{e}{c}\left(B_z\frac{dy}{dt} - B_y\frac{dz}{dt}\right)\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{e}{c}\left(B_z\frac{dx}{dt} - B_x\frac{dz}{dt}\right)\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{e}{c}\left(B_y\frac{dx}{dt} - B_x\frac{dy}{dt}\right),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

t – параметр интегрирования, B_x, B_y, B_z – компоненты поля B.

Исключив параметр t, получим уравнение движения частицы в выбранной системе координат ускорителя "XYZ" (рис.I).

$$
\begin{aligned}
y''_{xx} &= \frac{\sqrt{K}}{B\rho}\left[-B_z + B_x z'_x - B_z y'^2_x + B_y z'_x y'_x\right]\\
z''_{xx} &= \frac{\sqrt{K}}{B\cdot\rho}\left[B_z y'_x z'_x - B_y z'^2_x - B_y + B_x y'_x\right]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$B\rho$ – магнитная жесткость частицы, $K = 1 + y'^2_x + z'^2_x$.

Магнитное поле дипольных поворотных магнитов (с однородным полем) модели системы транспортировки (рис.I) описывается только одной вертикальной компонентой $B_z(x,y,z)$. Так как магниты можно разворачивать на углы γ_i, γ_{i1} и β_i относительно их осей координат $\tilde{z}_i, \tilde{y}_i, \tilde{x}_i$ соответственно, то у магнитного поля в системе координат ускорителя появятся все три составляющие, которые определяются по формулам:

$$
\begin{aligned}
B_z &= B_{z_i}\cos\gamma_{i1}\cos\gamma_i\\
B_y &= B_{z_i}\sin\gamma_{i1}\cos\gamma_i\\
B_x &= B_{z_i}\sin\gamma_i,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$i=1,2,\dots$ N – количество поворотных магнитов (мы рассматриваем модель из одного поворотного магнита).

Краевую задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо подобрать поле магнита заданной длины и горизонтальной апертуры, расстояния ℓ_1, ℓ_2 и углы разворота магнита так, чтобы частица из точки (x_0, y_0, z_0) с заданным направлением α_0 и α_{01} попала в точку (x_k, y_k, z_k) с заданным направлением α_k и α_{k1}.

Математически это означает, что траектория движения частицы должна удовлетворять уравнениям (3) и краевым условиям:

$$
\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0 \qquad & y'_x(x_0) &= tg\,\alpha_0 = y'_0\\
z(x_0) &= z_0 & z'_x(x_0) &= tg\,\alpha_{01} = z'_0\\
y(x_k) &= y_k & y'_x(x_k) &= tg\,\alpha_k = y'_k\\
z(x_k) &= z_k & z'_x(x_k) &= tg\,\alpha_{k1} = z'_k.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Формулы перехода из системы координат ускорителя в систему координат магнита:

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_i &= (x-\ell_i)(\cos\gamma_{i1}\cos\gamma_i - \sin\gamma_i\sin\beta_i\sin\gamma_{i1}) +\\
&\quad + (y-d_i)(\sin\gamma_i\cos\gamma_{i1} + \sin\gamma_{i1}\sin\beta_i\cos\gamma_i) -\\
&\quad - (z-d_{i1})\sin\gamma_{i1}\cos\beta_i\\
\tilde{y}_i &= -(x-\ell_i)\sin\gamma_i\cos\beta_i + (y-d_i)\cos\beta_i\cos\gamma_i +\\
&\quad + (z-d_{i1})\sin\beta_i\\
\tilde{z}_i &= (x-\ell_i)(\cos\gamma_i\sin\gamma_{i1} + \sin\gamma_i\sin\beta_i\cos\gamma_{i1}) +\\
&\quad + (y-d_i)(\sin\gamma_i\sin\gamma_{i1} - \sin\beta_i\cos\gamma_i\cos\gamma_{i1}) +\\
&\quad + (z-d_{i1})\cos\beta_i\cos\gamma_{i1}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$i=1,2,\dots N$

Так как в нашем случае модель системы транспортировки состоит из одного поворотного магнита, в дальнейшем i в обозначениях опускаем.

3. Существование решения краевой задачи для $B_z(x,y,z) = B_{z_0} = const$

Положим, что магнит М (рис.I) не разворачивается на углы γ, γ_1 и β, т.е. и в системе координат ускорителя магнитное поле задается только компонентой $B_z(x, y, z)$. Рассмотрим случай $B_z = B_{z_0} = const$. В этом случае краевая задача (3),(5) решается аналитически. Траекторией движения частицы в магнитном поле является дуга спирали /3/, в свободном пространстве – прямая линия.

В нашем случае траектория движения частицы будет:

$$
\begin{cases}
y - y_0 = tg\,\alpha_0\,(x - x_0)\\
x = C_1 + \frac{C_3}{\omega}\sin(\omega t + C_2)\\
y = C_4 + \frac{C_3}{\omega}\cos(\omega t + C_2)\\
y - y_k = tg\,\alpha_k\,(x - x_k),
\end{cases}
\tag{7}
$$

$\omega = \frac{eB_{z_0}}{mc}$, $r = \frac{C_3}{\omega}$ – радиус окружности, C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования уравнений (2) для случая $B_z = B_{z_0}$, $B_x = 0$, $B_y = 0$. Неизвестные величины $C_1, C_2, C_3, C_4, \omega, \ell_1, \ell_2$ определяются из системы уравнений, построенной с использованием краевых условий (5):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c_1 + \frac{c_3}{\omega}\sin(\omega t_1 + c_2)\\
y_1 &= c_4 + \frac{c_3}{\omega}\cos(\omega t_1 + c_2)\\
x_2 &= c_1 + \frac{c_3}{\omega}\sin(\omega t_2 + c_2)\\
y_2 &= c_4 + \frac{c_3}{\omega}\cos(\omega t_2 + c_2)\\
y_0' &= -tg(\omega t_1 + c_2)\\
y_k' &= -tg(\omega t_2 + c_2),
\end{aligned} \tag{8}
$$

где
$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + y_0'(x_1 - x_0)\\
y_2 &= y_k + y_k'(x_2 - x_0)\\
y_0' &= tg\,\alpha_0, \quad y_k' = tg\,\alpha_k,
\end{aligned}
$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) – координаты точек влета частицы в магнит и вылета из него. Определив эти координаты, найдем расстояния ℓ_1 и ℓ_2. Для углов α_0 и α_k получим соотношение:

$$
\alpha_k = \alpha_0 + \alpha_n, \tag{9}
$$

где $\alpha_n = \omega(t_2 - t_1)$ – угол поворота магнита, который зависит от величины поля B_{z_0}.

Аналогичным образом решается пространственная краевая задача, причем для углов получим соотношение:

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= \alpha_0 + \alpha_n\\
\alpha_{k\perp} &= \alpha_{0\perp}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

4. Существование решения краевой задачи для $B_z(x,y,z) \neq const$

Реально поле магнита не является константой/4/, однако оно всегда ограничено и находится в пределах

$$
\overline{B}_0 \leq B_z(x,y,z) \leq \overline{\overline{B}}_0 .
$$

Из (3) для $B_z \neq const$ $B_x = 0$, $B_y = 0$ в плоском случае получим уравнение движения заряженной частицы в виде:

$$
y''_{xx} = -\frac{1}{B\cdot\rho}(1 + y_x'^2)^{3/2} B_z(x,y). \tag{11}
$$

Для такого уравнения докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть в некоторой заданной области Ω функции $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{aligned}
y''_{xx} &= -\frac{1}{B\rho}(1 + y_x'^2)^{3/2} B_z(x,y)\\
\bar{y}''_{xx} &= -\frac{1}{B\rho}(1 + \bar{y}_x'^2)^{3/2} B_{z_0},
\end{aligned} \tag{12}
$$

где $B_{z_0} = const$, y и $\bar{y}$ – непрерывные функции, удовлетворяющие начальному условию

$$
\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0 = c & \bar{y}(x_0) &= \bar{y}_0 = c\\
y_x'(x_0) &= y_0' = d & \bar{y}_x'(x_0) &= \bar{y}_0' = d.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Причем пусть во всей области Ω в каждой ее точке выполняется соотношение:

$$
B_z(x,y) \geqslant B_{z_0} > 0. \tag{14}
$$

Тогда имеем, что $y_x' < \bar{y}_x'$, а $y(x) < \bar{y}(x)$ в каждой точке области Ω.

Доказательство.

1. $\exists\, \delta > 0$, $0 < h < \delta$, что $y_x'(x) < \bar{y}_x'(x)$ и $y(x) < \bar{y}(x)$ в δ-окрестности точки $(x_0 y_0)$.
   Разложим в ряд Тейлора функции $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ в окрестности точки $(x_0 y_0)$ с точностью до членов 2-ого порядка:
$$
\begin{aligned}
y(x) &= c + dh - (1 + d^2)^{3/2} B_z(x_0 y_0)\frac{h^2}{2}\\
\bar{y}(x) &= c + dh - (1 + d^2)^{3/2} B_{z_0}\frac{h^2}{2}.
\end{aligned} \tag{15}
$$
   Отсюда
$$
y(x) - \bar{y}(x) = -\frac{h^2}{2}\left[B_z(x_0 y_0) - B_{z_0}\right](1 + d^2)^{3/2} < 0,
$$
   т.е. $y(x) < \bar{y}(x)$ в окрестности точки $(x_0 y_0)$.
   Из разложения в ряд Тейлора производных $y_x'(x)$ и $\bar{y}_x'(x)$
$$
\begin{aligned}
y_x'(x) &= d - (1 + d^2)^{3/2} B_z(x_0 y_0) h\\
\bar{y}_x'(x) &= d - (1 + d^2)^{3/2} B_{z_0} h
\end{aligned} \tag{16}
$$
   имеем, что
$$
y_x'(x) - \bar{y}_x'(x) = -h\left[B_z(x_0 y_0) - B_{z_0}\right](1 + d^2)^{3/2} < 0,
$$
   т.е. $y_x'(x) < \bar{y}_x'(x)$ в окрестности точки $(x_0 y_0)$.
2. Предположим, что $\forall$ точка $x_1 \neq x_0$, что в интервале $[x_0 x_1)$ для каждой его точки выполняется условие $y_x'(x) < \bar{y}_x'(x)$ и $y(x) < \bar{y}(x)$.
   Пусть
$$
\vartheta = \{x \geqslant x_1 / y_x'(x) \geqslant \bar{y}_x'(x)\} \setminus \{x_0\}. \tag{17}
$$

Множество ϑ замкнуто. Точка $x_1 = \inf \vartheta$ такая, что

$$y'(x_1) = \bar{y}'(x_1) = K.$$

Из разложения $y'(x)$ и $\bar{y}'(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_1 с одной стороны имеем, что

$$0 < \bar{y}'(x_1 - h) - y'(x_1 - h) = K + (1+K^2)^{3/2} B_{z_0} h - K - (1+K^2)^{3/2} B_z(x, y_1) h + o(h) = -h(1+K^2)^{3/2}\left[B_z(x_1, y_1) - B_{z_0}\right] + o(h) < 0, \tag{18}$$

т.е. пришли к противоречию. Следовательно, множество $\vartheta = \phi$.

3. Из $y'(x) < \bar{y}'(x)$ в каждой точке области Ω имеем

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} y'_x(x)\,dx < \int_{x_0}^{x} \bar{y}'_x(x)\,dx = \bar{y}(x), \tag{19}$$

т.е.

$$y(x) < \bar{y}(x).$$

Итак, мы доказали, что

$$y(x) < \bar{y}(x)$$
$$y'_x(x) < \bar{y}'_x(x)$$

во всей области Ω, где функции $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ удовлетворяют уравнениям (12) и в каждой точке области выполняется соотношение

$$B_z(x, y) > B_{z_0} > 0.$$

<u>Следствие 1.</u> Если для уравнений (12) имеем, что в каждой точке области Ω $B_{z_0} > B_z(x,y) > 0$, то

$$\bar{y}(x) < y(x)$$
$$\bar{y}'_x(x) < y'_x(x)$$

в каждой точке области Ω.

<u>Следствие 2.</u> Так как имеем, что реальное магнитное поле находится в пределах

$$\bar{B}_{z_0} \le B_z(x, y) \le \bar{\bar{B}}_{z_0},$$

то

$$\bar{y}(x) < y(x) < \bar{\bar{y}}(x)$$
$$\bar{y}'_x(x) < y'_x(x) < \bar{\bar{y}}'_x(x), \quad \text{т.е.}$$

решение уравнения (12) для переменного поля ограничено решениями такого же уравнения для постоянного поля.

<u>Следствие 3.</u> Так как для $B_z = const$ краевая задача имеет решение, то в силу следствия 2 она имеет решение и для $B_z \ne const$.

Чтобы доказать существование решения краевой задачи для $B_z(x,y,z) \ne const$ в пространственном случае, покажем, что уравнения для проекций траектории на плоскости "XOZ" и "XOY" удовлетворяют условиям теоремы.

Уравнения для проекций траектории на плоскости "XOY" и "XOZ" соответственно будут:

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= -\frac{\sqrt{1 + y'^2_x + c^2(1 + y'^2_x)}}{B\rho}(1 + y'^2_x)\,\widetilde{B}_z(x, y, z(y)) \\ z''_{xx} &= -\frac{\sqrt{\frac{1}{c^2} + 1}}{B\rho}\, z'^2_x \sqrt{\frac{z'^2_x - c^2}{c^2}}\,\widetilde{\widetilde{B}}_z(x, y(z), z), \end{aligned} \tag{20}$$

где c – константа интегрирования для получения связи

$$z'_x = c\sqrt{1 + y'^2_x},$$

$\widetilde{B}_z$ и $\widetilde{\widetilde{B}}_z$ – проекции функции $B_z(x,y,z)$ на плоскости "XOY" и "XOZ" соответственно.

Правые части уравнений (20) удовлетворяют условиям теоремы (постоянство знака в области Ω), следовательно, имеем существование решения краевой задачи (3), (5) для проекций траектории движения частицы в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Таким образом, мы показали существование решения нелинейной краевой задачи транспортировки заряженных частиц, когда магнитное поле в поворотных магнитах описывается только компонентой $B_z(x,y,z)$. Однако, как уже отмечалось выше, в системе координат ускорителя за счет разворотов магнитов у поля появляются и компоненты B_x, B_y. Если же траекторию движения частицы рассматривать в системе координат магнита, то мы остаемся в условиях, когда у поля будет только компонента $B_z(x,y,z)$ и, следовательно, решение краевой задачи в этом случае, как показано выше, существует. Обратный переход в систему координат ускорителя осуществляется по формулам (6).

5. <u>Выводы</u>

1. Доказано существование решения нелинейной краевой задачи (3), (5) транспортировки заряженных частиц для случая, когда магнитное поле поворотных магнитов задается одной компонентой $B_z(x,y,z)$, компоненты же B_x и B_y появляются за счет разворотов магнитов.

2. Величина реализуемого магнитного поля $B_z(x,y,z)$ влияет на существование решения в конкретной физической задаче, поэтому ограничения на α_k и α_{k_1} всегда можно получить для конкретных магнитов, используя соотношение (10).

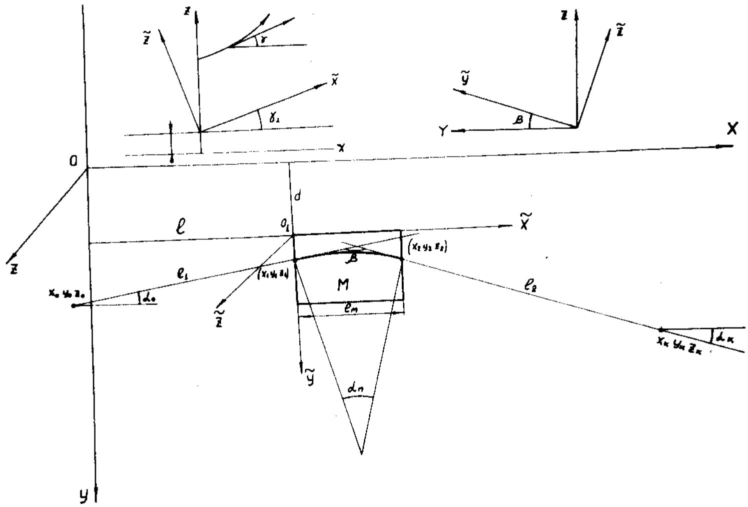

Рис. I. Модель системы транспортировки из одного поворотного магнита M с выбранными системами координат.

Литература

1. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, 9-6430, Дубна, 1972.
2. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Учебное пособие для гос.ун-тов. Изд. 6-е, М., Гостехиздат, 1956.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Физматгиз, М., 1960.
4. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, М., 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 июля 1978 года.