

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



9/4-78
P9 - 11720

K-143

Н.Ю.Казаринов, В.Ф.Шевцов

4969/2-78

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ
ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

1978

Р9 - 11720

Н.Ю.Казаринов, В.Ф.Шевцов

**ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ
ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Направлено в ЖТФ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Казаринов Н.Ю., Шевцов В.Ф.

P9 - 11720

Влияние нелинейности внешних электромагнитных полей на параметрический резонанс бетатронных колебаний

Рассмотрено влияние кубической нелинейности внешнего электромагнитного поля на параметрический резонанс бетатронных колебаний в присутствии сил пространственного заряда. Показано, что совместное действие пространственного заряда и нелинейности внешнего поля приводит к благоприятным условиям медленного пересечения резонанса как с увеличением, так и с уменьшением частоты колебаний.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Kazarinov N.Yu., Shevtsov V.F.

P9 - 11720

Effect of Nonlinearity of External Electromagnetic Fields on Parametric Resonance of Betatron Oscillations

Effect of nonlinearity of external electromagnetic fields on parametric resonance of betatron oscillations at the presence of space charge forces is considered. It is shown that the common action of a space charge and external field nonlinearity leads to favorable conditions of a slow crossing of resonance both with increasing and decreasing of oscillation frequency.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Влияние пространственного заряда на параметрический резонанс бетатронных колебаний в циклических ускорителях исследовалось в работах /1-3/. Собственный заряд пучка благоприятствует медленному прохождению резонанса с увеличением частоты, при прохождении резонанса с уменьшением частоты амплитуда колебаний неограниченно растет.

Известно также, что малая кубическая нелинейность внешнего электромагнитного поля улучшает условия медленного прохождения резонанса с увеличением (уменьшением) частоты, в зависимости от знака нелинейности /4/.

В данной работе рассматривается влияние кубической нелинейности внешнего поля на параметрический резонанс бетатронных колебаний в присутствии сил пространственного заряда.

В пренебрежении связью движений, обусловленной собственными полями, среднеквадратичный размер a кольцевого пучка, находящегося в электромагнитном поле, имеющем кубическую нелинейность, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{a} + \nu^2 a - \frac{F^2}{a^3} - \frac{Qa_0^2}{a} = \frac{2\nu\eta}{3a_0^2} a^3 + \epsilon a \cos \theta, \quad (1)$$

где ν - частота бетатронных колебаний, отнесенная к частоте обращения частицы во внешнем магнитном поле $\omega_0 = \beta c / R$, $F = \nu a_0^2$ - величина эффективного

фазового объема пучка, $Q = \frac{\nu_e R^2}{2\beta^2 \gamma^3 a_0^2}$ - относительный кулоновский сдвиг частоты, a_0 - среднеквадратичный размер согласованного пучка, R - средний радиус кольца, $\nu_e = N_e \tau_0$ - параметр Будкера, $\tau_0 = \frac{e^2}{mc^2}$; e, m - заряд и масса частицы, соответственно, c - скорость света в вакууме, N_e - линейная плотность частиц в кольце, γ - релятивистский фактор частиц. Дифференцирование в (1) проводится по угловой переменной $\theta = \omega_0 t$. Параметр η равен нелинейному сдвигу относительной частоты колебаний. Величина ϵ характеризует относительную ошибку показателя спада внешнего поля. Уравнение (1) получено в предположении малости изменения фазового объема F , обусловленного нелинейностью собственного и внешнего электромагнитных полей ^{/5/}.

В отсутствие нелинейного члена ($\eta = 0$), собственного заряда ($Q=0$) и возмущения магнитного поля ($\epsilon=0$) общее решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = E + \sqrt{E^2 - 1} \sin(2\nu\theta + \phi), \quad (2)$$

где E и ϕ - произвольные постоянные. В первом порядке метода усреднения Крылова-Боголюбова ^{/6/} медленно меняющиеся функции E и $W = \frac{2\delta\theta + \phi}{2}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{E} = 2G \sqrt{E^2 - 1} \cos 2W, \quad (3)$$

$$\dot{W} = \delta - G \frac{E}{\sqrt{E^2 - 1}} \sin 2W - \frac{Q}{E+1} - \eta E,$$

здесь

$$G = \frac{\epsilon}{2\nu}, \quad \delta = \nu - \frac{1}{2}.$$

Уравнения (3) при $\eta = 0$ совпадают с основными уравнениями работ ^{/1,2/}.

При медленном прохождении резонанса амплитуда колебаний среднеквадратичного размера пучка, согласованного в начальный момент времени, должна примерно следовать устойчивым стационарным решениям системы (3). На рис. 1-4 показана зависимость функции U :

$$U = \frac{a_{\max}}{a_0} = (E_0 + \sqrt{E_0^2 - 1})^{1/2}, \quad (4)$$

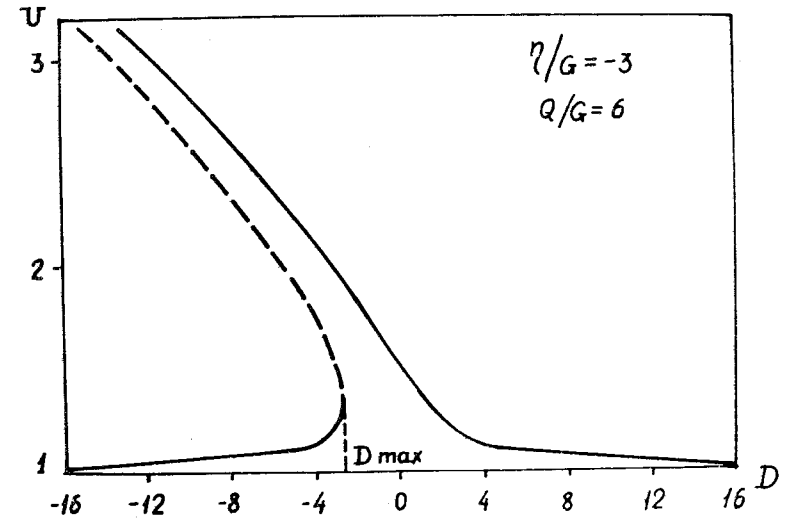


Рис.1. Зависимость функции U от относительной расстройки D при $\eta/G = -3$, $Q/G = 6$.

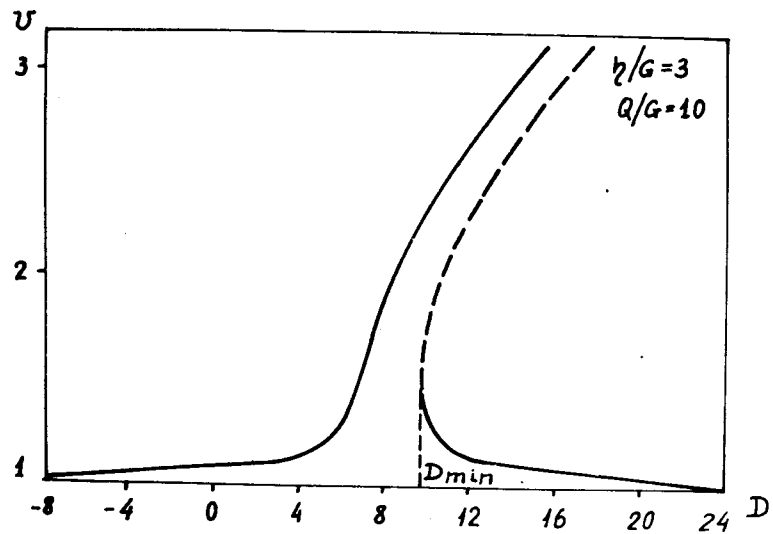


Рис.2. Зависимость функции U от относительной расстройки D при $\eta/G=3$, $Q/G=10$.

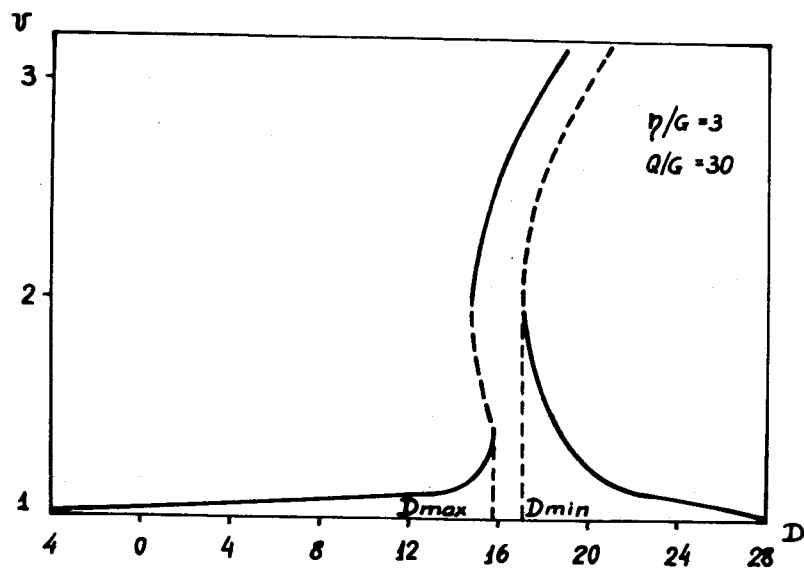


Рис.3. Зависимость функции U от относительной расстройки D при $\eta/G=3$, $Q/G=30$.

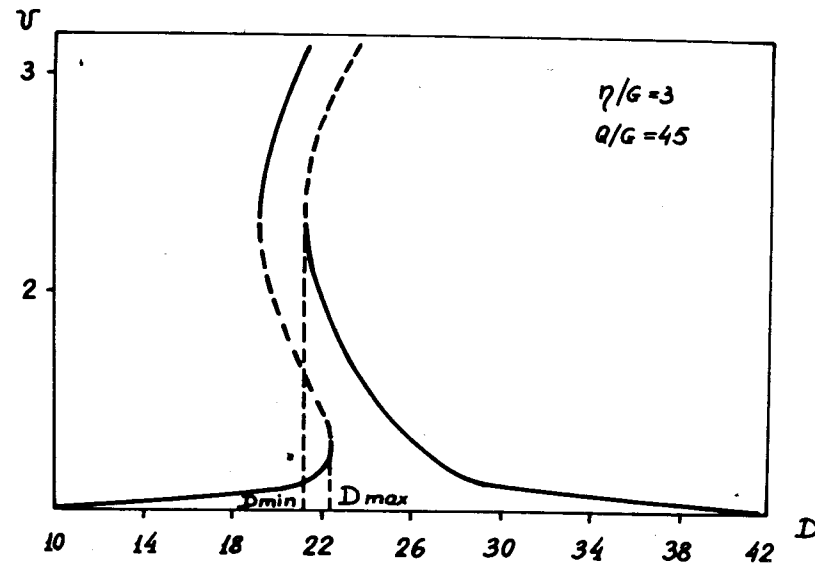


Рис.4. Зависимость функции U от относительной расстройки D при $\eta/G=3$, $Q/G=45$.

от относительной расстройки $D = \delta/G$ при различных соотношениях параметров η/G и Q/G . В формуле (4) E_0 означает стационарное решение системы (3). Пунктиром на графиках отмечены неустойчивые стационарные решения. Из графиков видно, что в зависимости от соотношения параметров η/G и Q/G возможны три режима прохождения резонанса.

В первом режиме ($\eta < 0$) вид функции U , вычисленной при $\eta/G = -3$ и $Q/G = 6$, показан на рис. 1. В этом случае возможно медленное прохождение резонанса с увеличением частоты ($\dot{D} > 0$). При этом максимальное увеличение размера пучка происходит в точке $D = D_{\max}$ (см. рис. 1):

$$D_{\max} = -\frac{E_0}{\sqrt{E_0^2 - 1}} + \frac{Q}{G} \frac{1}{E_0 + 1} + \frac{\eta}{G} E_0.$$

$$E_0 = 1 + \left[2 \left(\frac{Q}{4G} - \frac{\eta}{G} \right)^{2/3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{Q}{\left(\frac{Q}{4} - \eta \right)} \right]^{-1} \quad (5)$$

Формула (5) справедлива при выполнении условия

$$\frac{Q}{4} - \eta \gg G. \quad (6)$$

Увеличение размера в этом случае может быть найдено с помощью формулы (4), где стационарное решение системы (3) равно E_{\max} :

$$E_{\max} = 1 + 1,57 \left(\frac{Q}{4G} + \frac{|\eta|}{G} \right)^{-2/3}, \quad (7)$$

т.е. уменьшается с ростом Q и $|\eta|$.

При прохождении резонанса с уменьшением частоты ($\dot{D} < 0$) амплитуда колебаний неограниченно растет.

Во втором режиме ($\eta > 0, Q \leq Q_0$) зависимость $U(D)$ при $\eta/G = 3$ и $Q/G = 10$ показана на рис. 2. Величина Q_0 определяется соотношением:

$$Q_0 = \frac{3E_0(E_0 + 1)^2}{E_0 + 2} \eta, \quad (8)$$

$$E_0 = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3G}{\eta} \right)^{2/5}.$$

Для данных параметров η и Q $Q_0 = 24$.

В случае прохождения резонанса с уменьшением частоты максимальное увеличение амплитуды колебаний происходит при D , равном некоторому D_{\min} (см. рис. 2). Для слабой нелинейности, когда $\eta \ll Q$:

$$D_{\min} = \frac{E_0}{\sqrt{E_0^2 - 1}} + \frac{Q}{G} \frac{1}{E_0 + 1} + \frac{\eta}{G} E_0,$$

$$E_0 = \left[1 + \frac{Q/\eta}{(1 + \sqrt{Q/\eta})^2} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Значение E_{\max} можно найти, при $\eta > G$, с помощью формулы:

$$E_{\max} = \left\{ 1 + \frac{Q/\eta}{\left[1 + \sqrt{\eta/Q} - \sqrt{G^2/(\eta Q)} \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt{\eta/Q} \right) \right]^2} \right\}^{1/2}. \quad (10)$$

Согласно выражению (10) E_{\max} увеличивается с ростом Q и уменьшается с ростом η .

При прохождении резонанса с увеличением частоты амплитуда колебаний неограниченно растет.

В третьем режиме ($\eta > 0, Q > Q_0$) зависимость $U(D)$ при $\eta/G = 3$ и $Q/G = 30, Q/G = 45$ показана на рис. 3,4, соответственно.

Введем ширину "резонансной полосы" P (см. рис.3,4) как:

$$P = D_{\min} - D_{\max}, \quad (11)$$

где значения D_{\max}, D_{\min} даются формулами (5), (9). Если $P > 0$ (рис. 3), амплитуда колебаний сред-неквadraticного размера при медленном прохождении

резонанса изменяется так же, как во втором режиме. На рис. 5 показана зависимость ширины "резонансной полосы" P от параметра Q/G при нескольких значениях η/G . Из графиков видно, что величина P убывает с ростом Q/G (при фиксированном η/G) и при Q/G , больших некоторого $(Q/G)_{кр}$, становится отрицательной

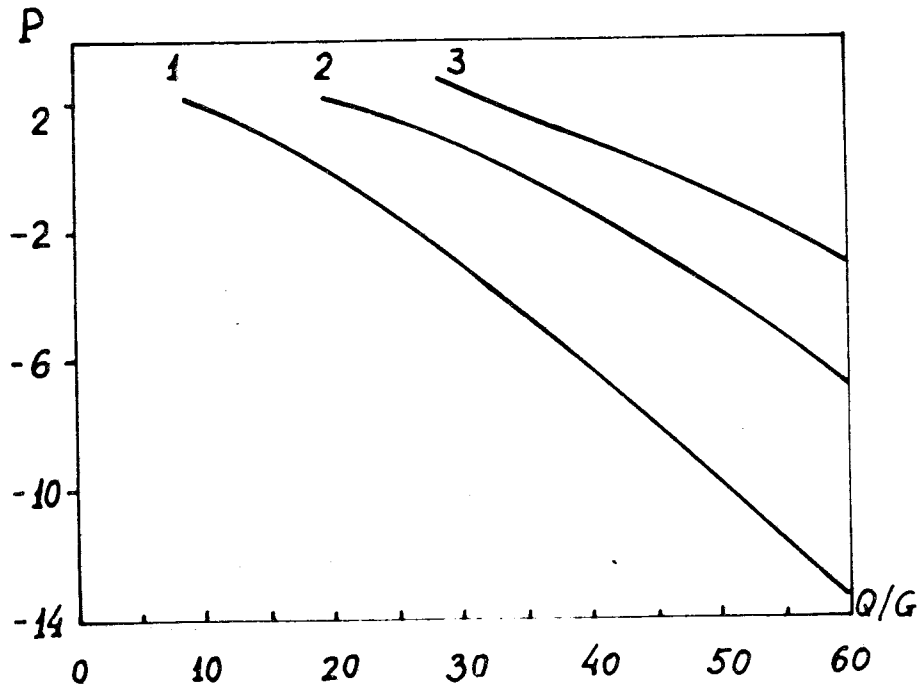


Рис.5. Зависимость ширины "резонансной полосы" P от параметра Q/G при следующих значениях η/G : кривая 1 - $\eta/G = \frac{3}{4}$, кривая 2 - $\eta/G = \frac{9}{4}$, кривая 3 - $\eta/G = \frac{15}{4}$.

(рис. 4). В этом случае возможно медленное прохождение резонанса как с увеличением, так и с уменьшени-

ем частоты колебаний. Значения $(Q/G)_{кр}$ при $Q \gg \eta$ могут быть найдены из уравнения

$$\sqrt{\frac{\eta}{Q}} = \frac{1}{2} [z_0 - \sqrt{z_0^2 - z_0 [1 - \frac{1}{2}(4x)^{-3/2} - 3x(1+x)] }], \quad (12)$$

где

$$z_0 = [1 + x - \frac{1}{16}(4x)^{-3/2}]^{-1}, \quad x = \frac{1}{4} \left(\frac{Q}{4G} \right)^{-2/3}$$

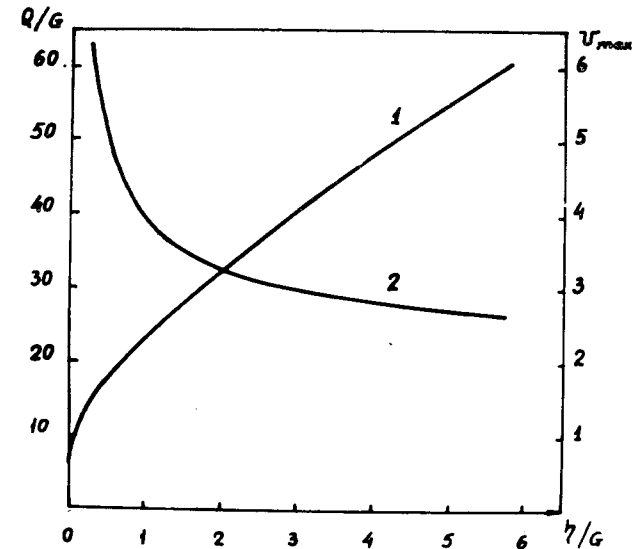


Рис.6. Кривая 1 - зависимость $(Q/G)_{кр}$ от параметра η/G . Кривая 2 - зависимость максимального среднего квадратичного размера пучка от параметра η/G при $Q/G = (Q/G)_{кр}$.

На рис. 6. представлена зависимость $(Q/G)_{кр}$ от параметра η/G (кривая 1). Максимальное увеличение

размера пучка происходит в точке $D = D_{\min}$ и может быть вычислено по формулам (4), (10). Зависимость максимального среднеквадратичного размера от параметра (η/G при $Q/G = (Q/G)_{\text{кр}}$) показана на рис. 6. (кривая 2). Из графика видно, что величина максимального размера убывает с ростом η/G .

Таким образом, совместное действие пространственного заряда и кубической нелинейности внешнего электромагнитного поля приводит к благоприятным условиям пересечения параметрического резонанса как с увеличением, так и с уменьшением частоты колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаринов Н.Ю. и др. ОИЯИ, Р9-9721, Дубна, 1976. Particle Accelerators, 1977, 8, 1, p.p. 43-47.
2. Smith L. В сб.: Труды Международной конференции по ускорителям заряженных частиц, М., 1964, стр. 897.
3. Кузнецов А.Б. ОИЯИ, Р9-2266, Дубна, 1965.
4. Коломенский А.А., Полухин А.Т. Вестник МГУ, физика, астрономия, 1968, 5, стр. 81.
5. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-11337, Дубна, 1978.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, "Наука", М., 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1978 года.