

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



M-345

2883/2-78

P9 - 11407

И.М.Матора

ТОЧНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ  
ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ  
В МОЩНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ  
ЛАМИНАРНЫХ ПУЧКАХ

**1978**

P9 - 11407

И.М.Матора

ТОЧНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ  
ТРАЕКТОРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ  
В МОЩНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ  
ЛАМИНАРНЫХ ПУЧКАХ

*Направлено на Всесоюзный семинар по численным  
методам решения задач электронной оптики  
/Рязань, 1978/*

Матора И.М.

P9 - 11407

Точное релятивистское уравнение траекторий электронов в мощных осесимметричных ламинарных пучках

Приводится вывод точного релятивистского уравнения траекторий электронов в сильноточных ламинарных осесимметричных пучках. Показано, что точное исследование радиального движения возможно только при совместном рассмотрении радиального и азимутального уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Matora I.M.

P9 - 11407

Exact Relativistic Equation for Electron Trajectories in Strongcurrent Axisymmetric Laminar Beams

An exact relativistic equation for electron trajectories in strong-current axisymmetric laminar beams was deduced. It is shown that the exact investigation of radial motion is possible only at a joint consideration of radial and azimuthal equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В<sup>/1,2/</sup> кратко изложена методика расчета формы меридионального сечения эмиттера сильноточных осесимметричных электронных пушек с ламинарным потоком, с помощью которой<sup>/1-5/</sup> рассчитано несколько таких пушек на ток 250 А. Ее эффективность подтверждена экспериментально<sup>/6/</sup>.

Ниже приводится вывод точного уравнения траекторий, являющегося одним из основных элементов методики.

В цилиндрической системе координат с осью OZ, совмещенной с осью симметрии потока, функция Лагранжа для электрона<sup>/7/</sup> будет иметь вид

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + eV - \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A});$$

$$(\vec{v} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}). \quad /1/$$

Здесь  $e > 0$  и  $m_0$  - величина заряда и масса покоя электрона,  $c$  и  $\vec{v}$  - скорость света и вектор скорости электрона/гауссова система единиц/. Стационарные скалярный (V) и векторный (A) потенциалы осесимметричны и представляют собой суперпозицию потенциалов пучка и ускоряющего электрического и фокусирующего магнитного полей.

Получая из /1/ уравнение движения электрона, ввиду стационарности полей мы должны считать

$$\frac{dA_k}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) A_k \quad (A_k - \text{проекция } \vec{A}). \quad /2/$$

С учетом /2/ и осевой симметрии системы из /1/ получаем уравнение движения

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) - \gamma r \dot{\phi}^2 - \eta \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\eta}{c} [(\vec{v} \cdot \nabla) A_r - r \frac{\partial A_r}{\partial r} - \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi - z \frac{\partial A_z}{\partial r})] &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\gamma r^2 \dot{\phi} - \frac{\eta}{c} r A_\phi) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) - \eta \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\eta}{c} [(\vec{v} \cdot \nabla) A_z - r \frac{\partial A_r}{\partial z} - r \dot{\phi} \frac{\partial A_\phi}{\partial z} - z \frac{\partial A_z}{\partial z}] &= 0. \end{aligned} \right. \quad /3/$$

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}; \quad \eta = \frac{e}{m_0}.$$

Тождественные преобразования в квадратных скобках и интегрирование приводят его к виду:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) - \gamma r \dot{\phi}^2 - \eta \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\eta}{c} (r \dot{\phi} H_z - z H_\phi) &= 0, \\ \phi &= \frac{\eta}{c \gamma r} (A_\phi - \frac{a}{r}), \\ \frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) - \eta \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\eta}{c} (r H_\phi - r \dot{\phi} H_r) &= 0, \\ \alpha &= r A_\phi - \frac{c \gamma}{\eta} r^2 \dot{\phi} \Big|_{t=0} \equiv r_0 A_0 - \frac{c \gamma_0}{\eta} r_0^2 \dot{\phi}_0. \end{aligned} \right. \quad (\vec{H} = \text{rot } \vec{A}). \quad /4/$$

4

$\alpha = r_0 A_0$  если рассмотрение траектории начато с катода, где  $\dot{\phi}_0 = 0$ .

Наиболее удобной независимой переменной в системе является координата  $z$ . Замена  $t$  на  $z$  в /4/, а также учет того, что в условиях вышеупомянутой симметрии системы и ламинарности потока, в котором по определению

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad (\vec{j} - \text{плотность тока в пучке}) \quad /5/$$

и, следовательно, точное выражение компоненты поля  $H_\phi$  есть

$$H_\phi = -\frac{2I}{c r} \quad (I - \text{ток пучка, заключенный в круге} \quad /6/$$

радиуса  $r$ ), дает

$$\left\{ \begin{aligned} r'' + \frac{\sigma}{\gamma \beta_z^2} \left\{ r \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2I}{c r} (1 + r'^2) \beta_z + \right. \\ \left. + \frac{\sigma}{\gamma} (A_\phi - \frac{a}{r}) \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - r' \frac{\partial A_\phi}{\partial z} + \frac{a}{r^2} \right) \right\} &= 0, \\ \phi' &= \frac{\sigma}{\gamma \beta_z r} (A_\phi - \frac{a}{r}). \end{aligned} \right. \quad /7/$$

$$(f' = \frac{df}{dr}); \quad \sigma = \frac{e}{m_0 c^2}; \quad \beta_z = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1 - \sigma^2 (A_\phi - \frac{a}{r})^2}{1 + r'^2}}.$$

/7/ - точное уравнение как наружной, так и внутренних траекторий в аксиально-симметричном ламинарном потоке релятивистских электронов, ускоряемых или дрейфующих в осесимметричных стационарных полях. Азимутальное уравнение, которое в параксиальном приближении

5

обычно опускается /8/, здесь необходимо. Азимутальная скорость электрона, исключенная из всех членов радиального уравнения, в которые она входит явно, вместе с тем неявно возмущает  $A_\phi$ . Поэтому точные траектории можно рассчитать, строго говоря, только при совместном решении обоих уравнений /7/.

В заключение искренне благодарю Л.А.Меркулова за ценные дискуссии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Матора И.М., Меркулов Л.А. Радиотехника и электроника, 1977, 22, №6, с.1246.
2. Матора И.М., Меркулов Л.А. ОИЯИ, Р9-9818, Дубна, 1976.
3. Матора И.М., Меркулов Л.А. ОИЯИ, Р9-10670, Дубна, 1977.
4. Матора И.М., Меркулов Л.А. ОИЯИ, Р9-10795, Дубна, 1977.
5. Матора И.М., Меркулов Л.А. ОИЯИ, Р9-10504, Дубна, 1977.
6. Анцупов П.С. и др. ОИЯИ, Р9-10999, Дубна, 1977.
7. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955.
8. Молоковский С.И., Сушков А.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. Энергия, Л., 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел  
23 марта 1978 года.