

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



A-469

19/VI-78

P9 - 11356

262/2-78

Ю.И.Алексахин, А.П.Беляев, Э.А.Перельштейн

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ
ЭЛЕКТРОННОГО СГУСТКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ
В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

1978

P9 - 11356

Ю.И.Алексахин, А.П.Беляев, Э.А.Перельштейн

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ
ЭЛЕКТРОННОГО СГУСТКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ
В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Направлено в ЖТФ

Алексахин Ю.И., Беляев А.П., Перельштейн Э.А. P9 - 11356

Электрическое поле электронного сгустка, движущегося
в магнитоэлектрическом канале

Найдены поля, возбуждаемые электронным сгустком, движущимся по каналу в изотропном, недиспергирующем и неограниченном по радиусу магнитоэлектрике. Показано, что продольная самофокусировка сгустка в таком канале отсутствует.

Вычисленные значения напряженности электрического поля в канале представляют интерес с точки зрения ускорения ионов.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Aleksakhin Ju.I., Belyaev A.P., Perelshtein E.A. P9 - 11356

Electric Field of Electron Bunch Propagated in the
Magnetic Dielectric Channel

Electromagnetic fields have been found excited by an electron bunch moving along the channel in an isotropic, non-dispersive and infinite on the radius magnetodielectric. It is shown that there is no longitudinal selffocusing of the bunch in such a channel.

The calculated values for the tension of electric field in the channel are of interest from the point of view of ion acceleration.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В сильноточных электронных индукционных ускорителях^{/1/} электрическое поле замедленной волны, возбуждаемой фронтом электронного пучка в материале индукторов, может существенно влиять на процесс ускорения. Вычисление полей, возбуждаемых пучком с произвольной /несинусоидальной/ зависимостью линейной плотности заряда по длине, представляет интерес также в связи с обсуждавшейся в работе^{/2/} возможностью продольной самофокусировки коротких электронных сгустков, движущихся в ферритовом канале, и их использованием для ускорения ионов.

В настоящей работе рассматривается возбуждение полей электронным пучком с линейной плотностью заряда $q(z,t) = q(z - v_0 t)$ и током $I_z = v_0 q$, движущимся по каналу радиуса d в неограниченной изотропной среде с диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями, дисперсия которых в интересующей области частот не существенна. Предполагается, что плотность пучка постоянна по сечению, причем изменением радиуса пучка $a < d$ можно пренебречь.

Внутри пучка ($r \leq a$) решение волнового уравнения для продольного электрического поля имеет в фурье-представлении вид

$$E_z(k_z, r) = - \frac{4iq(k_z)}{k_z a^2} \left\{ 1 + \frac{\pi i k \rho}{2} J_0 \left(i k \frac{r}{d} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[Y_1(i k \rho) - J_1(i k \rho) \frac{Y_1(i k) - i a D Y_0(i k)}{J_1(i k) - i a D J_0(i k)} \right] \right\}, \quad /1/$$

где $\kappa = \frac{k_z d}{\gamma_0}$, $\alpha = \frac{\epsilon}{\gamma_0 \sqrt{n^2 \beta_0^2 - 1}}$, $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ - показатель преломления среды /предполагается, что $n \beta_0 > 1$ /, $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$, $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$, $\rho = \frac{a}{d}$, $J_m(x)$ и $Y_m(x)$ - функции Бесселя и Неймана порядка m . Коэффициент D для неограниченной по радиусу среды равен /3/

$$D = \frac{H_1^{(1)}(k_r d)}{H_0^{(1)}(k_r d)},$$

где $k_r = k_z \sqrt{n^2 \beta_0^2 - 1}$; $H_m^{(1,2)} = J_m \pm iY_m$. Вид коэффициента D для ограниченной среды приведен в /3/.

В предположении, что характерная длина неоднородности /фронта/ пучка и, соответственно, длина генерируемых ею волн велика по сравнению с радиусом пучка ($|\kappa| \rho \ll 1$), можно пренебречь изменением поля по сечению пучка и считать $E_z(r < a) = E_z(a)$. Производя обратное преобразование Фурье, получим

$$E_z(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_z \xi} E_z(k_z) dk_z = - \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - \xi') \frac{dq(\xi')}{d\xi'} d\xi', \quad /2/$$

где введены обозначения $\xi = z - v_0 t$ и

$$G(\xi) = \frac{i}{\gamma_0^a} \int_{-\infty + i0}^{\infty} \frac{dk_z}{k_z} e^{ik_z \xi} \frac{J_1(i\kappa \rho) (\psi_1 - i\alpha D \psi_0)}{J_1(i\kappa) - i\alpha D J_0(i\kappa)},$$

$$\psi_{0,1} = J_{0,1}(i\kappa) Y_0(i\kappa \rho) - J_0(i\kappa \rho) Y_{0,1}(i\kappa). \quad /3/$$

Контур интегрирования в /3/ показан на рис. 1 (C_1). При $\xi > 0$ контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости комплексной переменной k_z ,

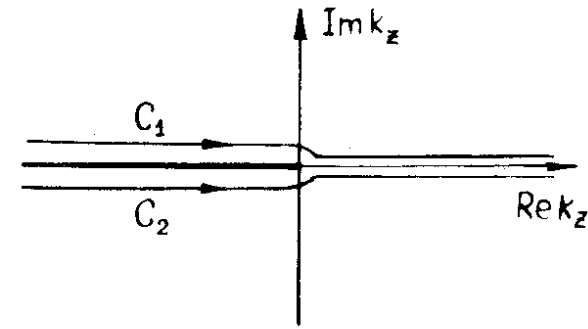


Рис. 1.

где подынтегральная функция имеет полюса в точках $\kappa = i x_s$, x_s - решения уравнения

$$\frac{J_1(x_s)}{J_0(x_s)} = -\alpha \frac{K_1(x_s \frac{\epsilon}{a})}{K_0(x_s \frac{\epsilon}{a})}. \quad /4/$$

Вычисление вычетов приводит к ряду

$$G(\xi) = G_1(\xi) = \frac{4}{\gamma_0^a} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-x_s \frac{\xi}{d}} \frac{\gamma_0 \xi}{J_0(x_s \rho) J_1(x_s \rho)} \frac{K_1^2}{x_s^2 J_0^2(x_s) [(1-\epsilon) + (\alpha^2 + \epsilon) \frac{K_1^2}{K_0^2}]}, \quad \xi > 0. \quad /5/$$

Анализ уравнения /4/ показывает, что минимальное значение x_s больше первого нуля функции $J_0(x)$, так что при $\beta_0 \gamma_0 n \gg 1$ $K_1/K_0 \approx 1$ и корни x_s приближенно равны

$$x_s \approx \pi(s + \frac{1}{4}) - \arctg \alpha, \quad s = 1, 2, \dots$$

Для значений $\xi < 0$ обычное представление исходного интеграла /3/ в виде суммы интегралов по контуру C_2 /рис. 1/ и разрезу приводит к неудобным для анализа выражениям, так как аналитические свойства подынтегральной функции в нижней полуплоскости намного сложнее. Поэтому для вычисления $G_2(\xi)$ при $\xi < 0$ воспользуемся следующим приемом. Добавим и вычтем из /3/ интеграл по контуру C_2 от функции, отличающейся от подынтегрального выражения в /3/ заменой $H_{0,1}^{(1)}$ на $H_{0,1}^{(2)}$ в коэффициенте D. Контур C_2 может быть замкнут в нижней полуплоскости, и вычисление добавленного интеграла приводит к ряду /5/, в котором следует заменить ξ на $|\xi|$. Оставшаяся разность интегралов сводится к интегралу по полуоси:

$$G_2(\xi) = \frac{16a^2}{\pi^2 \gamma_0 \epsilon a} \int_0^\infty \frac{\sin(\kappa \frac{\gamma_0 \xi}{d}) I_0(\kappa \rho) I_1(\kappa \rho)}{(J_0 I_1 - a J_1 I_0)^2 + (Y_0 I_1 - a Y_1 I_0)^2} \frac{d\kappa}{\kappa^3}, \quad /6/$$

где аргумент функций $I_{0,1} - \kappa$, $J_{0,1}$, $Y_{0,1} - \kappa \frac{\xi}{a}$.
Итак, для всех ξ

$$G(\xi) = G_1(|\xi|) + \sigma(-\xi) G_2(\xi), \quad \sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi > 0 \\ 1/2, & \xi = 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

Первое слагаемое в этой сумме определяет неизлучаемое /"квазистатическое"/ поле, второе - поле излучения.

Функция Грина /5/ существенно отлична от нуля только в узкой области $|\xi| \leq \frac{d}{\gamma_0}$. Поэтому для гладких

функций $q(\xi)$, в интеграле /2/ при вычислении квазистатического поля можно положить

$$\frac{dq(\xi')}{d\xi'} \approx q'(\xi') = q'(\xi) + q''(\xi) \cdot (\xi' - \xi).$$

Производя интегрирование, при $\beta_0 \gamma_0 n \gg 1$ и $a = d$, получим

$$E_z^{(1)}(\xi) \approx \frac{8a}{\pi^3 \gamma_0^2 (1+a^2)} q'(\xi). \quad /7/$$

Для функции $G_2(\xi)$ имеют место следующие приближенные выражения ($\xi < 0$):

$$G_2(\xi) \approx -\frac{2}{\gamma_0 a d} \cdot \frac{\epsilon d}{a \gamma_0 |\xi|}, \quad \frac{\gamma_0 |\xi|}{d} \gg \max\{1, \frac{\epsilon}{a}\}, \quad /8/$$

$$G(\xi) \approx -\frac{2}{\gamma_0 a d} \cdot [1 - \exp(-2a \frac{\gamma_0 |\xi|}{d})], \quad 1 \leq \frac{\gamma_0 |\xi|}{d} \leq \frac{\epsilon}{a}, \quad /9/$$

Последнее выражение справедливо и при $|\xi| \rightarrow 0$, если $a \ll 1$.

На рис. 2 показана величина $\tilde{G} = -\frac{\gamma_0 a d}{2} G_2(\xi)$ как

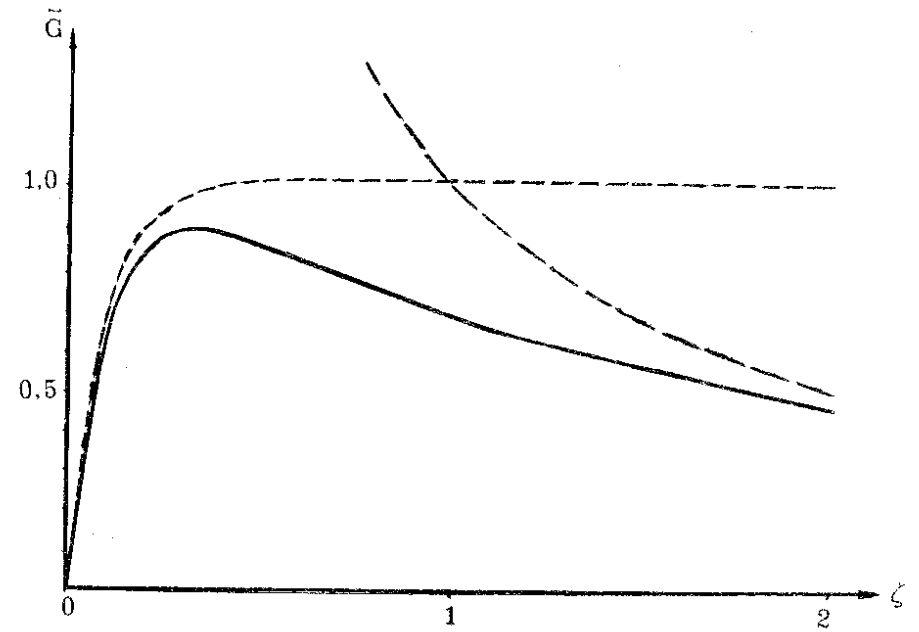


Рис. 2.

функция $\zeta = \frac{a}{\epsilon} \frac{\gamma_0 |\xi|}{d}$, вычисленная /при $\epsilon = 10$ / по

формуле /6/ - сплошная линия, и /8,9/ - пунктирные. Формулы /8,9/ дают удовлетворительную точность.

Поле излучения, как следует из /8,9/, не зависит от радиуса пучка, поэтому при $a \ll 1$ формула /9/ может быть использована для определения потерь на излучение энергии W точечного заряда e , движущегося по оси канала:

$$\frac{dW}{dz} \approx \frac{2e^2}{d^2},$$

что в 4 раза больше потерь энергии заряда, движущегося параллельно плоской границе диэлектрика на расстоянии d от него /4/.

Рассмотрим теперь цилиндрический ($a=d$) сгусток малой, но конечной протяженности $\frac{d}{\gamma_0} \ll L \leq n\beta_0 d (n^2\beta_0^2 \gg 1)$ с линейной плотностью заряда

$$q(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi Q}{2L} \cos \frac{\pi \xi}{L}, & |\xi| \leq \frac{L}{2}, \\ 0, & |\xi| > \frac{L}{2}, \end{cases}$$

где Q - полный заряд сгустка. По формулам /2/, /9/ для поля излучения получим

$$E_z^{(2)}(\xi) = -\frac{2Q}{d^2} \sin \phi \left\{ \cos \left(\frac{\pi \xi}{L} + \phi \right) + \sin \phi \cdot \exp \left[-\frac{\pi}{2 \operatorname{tg} \phi} \left(1 - \frac{2\xi}{L} \right) \right] \right\},$$

где $\phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi d}{2a \gamma_0 L} \right)$. Напряженность квазистатического поля /7/ пренебрежимо мала:

$$\frac{|E_z^{(1)}|_{\max}}{|E_z^{(2)}|_{\max}} < \frac{2}{\pi \sin \phi} \cdot \frac{a}{1 + \alpha^2} \left(\frac{d}{\gamma_0 L} \right)^2 < \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{d}{\gamma_0 L} \ll 1,$$

так что определяющую роль в динамике сгустка играет поле излучения*.

Из рис. 3, на котором показана функция $E = -\frac{d^2}{2Q} E_z^{(2)}$

для разных значений ϕ , следует, что поле, возбуждаемое сгустком, растягивает его, а не фокусирует, так как

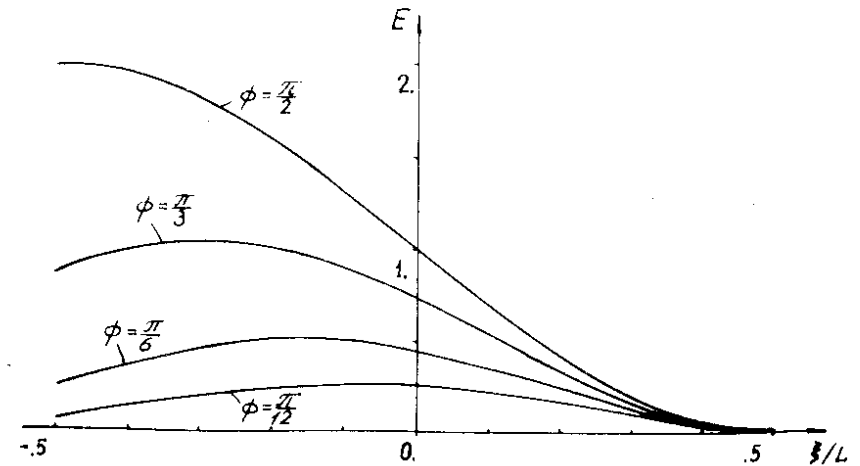


Рис. 3.

*В работе /2/ содержится утверждение, что сгусток, движущийся по каналу в ограниченной по радиусу ($d < r < b$) среде /диэлектрическом волноводе/ с действительными ϵ и μ не теряет энергию. Однако известно /5/, что заряды, движущиеся в таком волноводе со скоростью

$v_0 > \frac{c}{n}$, излучают. Наличие же мнимых частей у ϵ и μ

приводит к тому, что при достаточно большой толщине диэлектрика $b-d$ можно пренебречь отражением волн от наружной границы и считать среду неограниченной.

на электроны в центре сгустка и на заднем фронте действует тормозящая сила, бóльшая, чем на электроны переднего фронта. Это относится и к сгусткам с другим профилем плотности заряда.

Таким образом, по крайней мере в случае изотропной, недиспергирующей и неограниченной среды, продольная самофокусировка коротких ($L \leq n\beta_0 d$) сгустков невозможна.

Напряженность поля, возбуждаемого градиентом плотности электронного пучка, движущегося по каналу в среде с $1 \ll \epsilon \ll \mu$ со скоростью $v_0 \gg \frac{c}{n}$, может достигать значительной величины. Для пучка с фронтом длины L :

$$q(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi > L \\ q_0 \left(1 - \frac{\xi}{L}\right), & 0 < \xi \leq L \\ q_0, & \xi \leq 0 \end{cases}$$

напряженность максимальна при $\xi = 0$ и равна

$$|E_z|_{\max} = E_0 \begin{cases} 1, & L < \Lambda, \\ \frac{\Lambda}{L} \left(1 + \ln \frac{L}{\Lambda}\right), & L \geq \Lambda, \end{cases}$$

где $\Lambda = n\beta_0 d$, $E_0 = \frac{2I}{cd} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, $I = v_0 q_0$. При значениях

$\epsilon = 10$, $\mu = 100$, $d = 5$ см, $I \approx 1$ кА, типичных для индукционных ускорителей с ферритовыми индукторами, тормозящее поле на переднем фронте пучка $|E_z| \approx 4 \cdot 10^4$ В/см сравнимо с ускоряющим, что должно приводить к потере электронов фронта и укорочению пучка.

Поле, возбуждаемое фронтом электронного пучка, можно использовать для ускорения положительных ионов. Напряженность ускоряющего ионы поля ограничивается эффектом насыщения феррита:

$$E_0 = \frac{2I}{cd} \cdot \frac{\mu}{n} < \frac{B_s}{n},$$

где B_s - индукция насыщения, и может достигать величины $10^5 \div 10^6$ В/см, что, несомненно, представляет практический интерес.

В заключение авторы выражают признательность Б.М.Болотовскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вахрушин Ю.П., Матора И.М. УФН, 1973, 110, с.117.
2. Гришин В.К. ЖТФ, 1976, 46, с.2112.
3. Алексахин Ю.И., Беллев А.П., Перельштейн Э.А. Радиопизика, 1977, XX, с.592.
4. Морозов А.И. ЖЭТФ, 1957, 32, с.1260.
5. Болотовский Б.М. УФН, 1961, 75, с.295.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 февраля 1978 года.