

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



19/vi-78

P9 - 11337

K-143

2624/2-78

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА
И НЕЛИНЕЙНОСТИ КОЛЕБАНИЙ
НА ИЗМЕНЕНИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ
РАЗМЕРОВ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

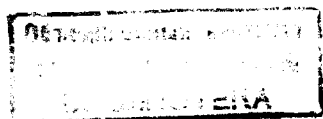
1978

P9 - 11337

Н. Ю. Казаринов, Э. А. Перельштейн

**ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА
И НЕЛИНЕЙНОСТИ КОЛЕБАНИЙ
НА ИЗМЕНЕНИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ
РАЗМЕРОВ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

Направлено в "Particle Accelerators"



Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А.

P9 - 11337

Влияние пространственного заряда и нелинейности колебаний на изменение среднеквадратичных размеров пучков заряженных частиц

Выводится система уравнений, описывающая изменение во времени среднеквадратичных размеров пучка заряженных частиц с плотностью заряда, имеющей эллиптические линии постоянного уровня. Полученная система уравнений не зависит от конкретного вида функции распределения частиц в пучке. Однако использованная линейная аппроксимация сил Лоренца не позволяет учитывать изменение эмиттанса пучка, вызываемое нелинейностью колебаний.

С помощью решения модельных задач показано, что эмиттанс можно считать постоянным до момента времени порядка обратного нелинейного сдвига частоты колебаний.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Kasarinov N.Yu., Perelstein E.A.

P9 - 11337

Influence of Space Charge and Oscillation Nonlinearity on Changing of Charged Particle Beam RMS-Dimensions

For charged beams density with elliptic symmetry the equations for RMS-dimensions are derived. The obtained system of equations does not depend on distribution function form. However, the linear approximation of Lorentz forces used does not allow to account for charging the beam emittance caused by the oscillation nonlinearity. It is shown that nonlinear effects are insufficient for a time less than the universe oscillation frequency nonlinear shift.

The investigation has been performed at the Department of New Accelerator Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna 1978

Рассматривая функции распределения, отличные от нуля, в ограниченной области фазового пространства или интегрируемые с произвольным степенным весом, можно ввести полные моменты функции распределения, т.е. моменты по всем фазовым переменным.

В работе ^{/1/} в случае релятивистского движения в произвольных электромагнитных полях сгустков заряженных частиц малой плотности была получена система дифференциальных уравнений, связывающая между собой моменты различных порядков. В линейных электромагнитных полях эта система распадается на независимые подсистемы для моментов одного порядка.

В работе ^{/2/} на основе методики, предложенной в ^{/1/}, была получена система уравнений для среднеквадратичных размеров произвольных сгустков заряженных частиц, движущихся в линейных электромагнитных полях. Если собственными полями сгустка можно пренебречь, то уравнения линейны, и не зависят от вида функции распределения частиц в сгустке. Влияние пространственного заряда учитывалось для линейных собственных полей /пучок с равномерной по эллиптическому сечению плотностью заряда/.

В ^{/3,4/} рассматривались эффекты, связанные с нелинейностью собственных полей пучков заряженных частиц. Показано, что нелинейность силы Лоренца собственного электромагнитного поля пучка приводит к изменению эффективного фазового объема /эмиттанса/ пучка. Среднеквадратичные размеры пучка удовлетворяют при этом уравнениям Владимирского-Калчинского ^{/5/} с переменным фазовым объемом.

В данной работе выводятся уравнения для изменения во времени среднеквадратичных размеров пучков заряженных частиц, с плотностью заряда, имеющей эллиптические линии постоянного уровня, в линейных внешних электромагнитных полях, а также рассматриваются эффекты, связанные с нелинейностью действующих на частицы сил.

1. Рассмотрим бесконечный в одном направлении /ось x_3 / пучок заряженных частиц, движущихся в направлении оси x_3 со скоростью v_0 . Поперечное движение частиц в пучке считается нерелятивистским. В линейных внешних электромагнитных полях, в пренебрежении собственными магнитными полями, связанными с поперечным движением частиц в пучке, уравнения движения частицы могут быть записаны в следующем общем виде:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{k=1}^2 (B_{ik}(t)x_k + A_{ik}(t)v_k) + F_i^s(\vec{x}, t), \quad /1/$$

где x_i, v_i - координаты и скорости частицы в декартовой системе координат; B_{ik}, A_{ik} - квадратные матрицы второго порядка, связанные с внешними полями; $\vec{F}^s(\vec{x}, t)$ - вектор, определяемый силой Лоренца собственного электромагнитного поля пучка.

Будем считать, что столкновениями частиц в пучке можно пренебречь. Тогда функция распределения частиц в фазовом пространстве f изменяется во времени согласно уравнению Лиувилля:

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad /2/$$

Можно показать^{/2/}, что моменты второго порядка функции распределения f удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dM_{xx}}{dt} = M_{xv} + M_{xv}^* \quad /3/$$

$$\frac{dM_{vv}}{dt} = BM_{xv} + M_{xv}^* B^* + AM_{vv} + M_{vv} A^* + F_{sv} + F_{sv}^*$$

$$\frac{dM_{xv}}{dt} = M_{vv} + M_{xx} B^* + F_{sx}^*$$

Здесь производная по времени понимается как:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad /4/$$

Знак "*" означает транспонирование матрицы; M_{xx}, M_{xv}, M_{vv} - квадратные матрицы второго порядка, элементы которых являются моментами функции распределения:

$$M_{xx}^{ij} = \overline{x_i x_j}; \quad M_{vv}^{ij} = \overline{v_i v_j}; \quad M_{xv}^{ij} = \overline{x_i v_j}; \quad i, j = 1, 2, \quad /5/$$

где первый индекс нумерует строку, второй - столбец.

Квадратные матрицы второго порядка F_{sx} и F_{sv} связаны с силой Лоренца собственного электромагнитного поля пучка:

$$F_{sx}^{ij} = \overline{F_i^s x_j}; \quad F_{sv}^{ij} = \overline{F_i^s v_j}; \quad i, j = 1, 2. \quad /6/$$

Черта в формулах /5/, /6/ означает усреднение данной величины с функцией распределения f . Так, например:

$$\overline{x_i x_j} = \frac{1}{N} \int x_i x_j f d\vec{x} d\vec{v}. \quad /7/$$

Интегрирование в /7/ проводится по полному фазовому объему, занимаемому частицами, N - линейная плотность частиц в пучке.

Система /3/ будет замкнутой, если элементы матриц F_{sx} и F_{sv} выражаются через моменты второго порядка. Предположим, что функция распределения f дает плотность частиц ρ , имеющую эллиптические линии постоянного уровня:

$$\rho = \rho(x^* G(t) x, t), \quad /8/$$

где $G(t)$ - квадратная симметричная положительно определенная матрица второго порядка, т.е. в фиксированный

момент времени плотность /8/ постоянна на эллипсах, повернутых в плоскости (x_1, x_2) на некоторый угол ϕ . Перейдем в систему координат (x'_1, x'_2) , связанную с исходной соотношениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \phi - x'_2 \sin \phi \\ x_2 &= x'_1 \sin \phi + x'_2 \cos \phi, \end{aligned} \quad /9/$$

тогда в штрихованной системе координат плотность /8/ запишется в следующем виде:

$$\rho = \rho \left(\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2}, t \right), \quad /10/$$

где a^2 и b^2 - обратные собственные значения матрицы G .

Пучки с плотностью /10/ рассматривались в работе /4/. Можно показать /3,4/, что для собственного электрического поля \vec{E}' пучка с такой плотностью справедливо соотношение, не зависящее от вида функции ρ :

$$\overline{x_1' E_1'} = eN \frac{a}{a+b}; \quad \overline{x_2' E_2'} = eN \frac{b}{a+b}, \quad /11/$$

e - заряд частицы. В силу симметрии системы:

$$\overline{x_1' E_2'} = \overline{x_2' E_1'} = 0. \quad /12/$$

Возвращаясь в исходную систему координат, получим, используя формулы /11,12/, выражение для матрицы F_{sx} :

$$\begin{aligned} F_{sx} &= \frac{\nu c^2}{\gamma^3} \frac{G^{-1/2}}{\text{Sp} G^{-1/2}} = B^s M_{xx} \\ B^s &= \frac{\nu c^2}{\gamma^3} \frac{M_{xx}^{-1/2}}{\text{Sp} M_{xx}^{1/2}} \end{aligned} \quad /13/$$

В формуле /13/ использованы следующие обозначения:

$\nu = N\gamma_0$ - параметр Будкера; $\gamma_0 = \frac{e^2}{mc^2}$, m - масса ча-

стицы; C - скорость света в вакууме; γ - релятивистский фактор продольного движения частиц. Матрица $M_{xx}^{1/2}$ определена так, что:

$$M_{xx}^{1/2} M_{xx}^{1/2} = M_{xx} \quad /14/$$

Выражение для матрицы B^s совпадает с полученным в работе /2/ в случае пучков с постоянной по эллиптическому сечению плотностью заряда*.

Для нахождения элементов матрицы F_{sv} воспользуемся методикой, предложенной в /4/. Рассмотрим задачу минимизации в фиксированный момент времени следующих функционалов:

$$D_1 = \frac{1}{N} \int [\epsilon_{11}(t)x_1 + \epsilon_{12}(t)x_2 - F_1^s(\vec{x}, t)]^2 f(\vec{x}, \vec{v}) dx d\vec{v} = \min$$

$$D_2 = \frac{1}{N} \int [\epsilon_{21}(t)x_1 + \epsilon_{22}(t)x_2 - F_2^s(\vec{x}, t)]^2 f(\vec{x}, \vec{v}) dx d\vec{v} = \min.$$

/15/

Функции $\epsilon_{ij}(t)$, осуществляющие минимум функционалов /15/, удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} \overline{x_1^2} + \epsilon_{12} \overline{x_1 x_2} &= \overline{x_1 F_1^s} \\ \epsilon_{11} \overline{x_1 x_2} + \epsilon_{12} \overline{x_2^2} &= \overline{x_2 F_1^s} \\ \epsilon_{21} \overline{x_1^2} + \epsilon_{22} \overline{x_1 x_2} &= \overline{x_1 F_2^s} \\ \epsilon_{22} \overline{x_2^2} + \epsilon_{21} \overline{x_1 x_2} &= \overline{x_2 F_2^s}, \end{aligned} \quad /16/$$

которую можно записать в матричной форме:

$$\epsilon(t) M_{xx} = F_{sx} \quad /17/$$

* Множитель 4 в формуле /24/ работы ** ошибочный.

после чего решение /16/ легко находится

$$\epsilon(t) = F_{sx} M_{xx}^{-1} = B^s \quad /18/$$

Равенства /17,18/ эквивалентны тому, что силу Лоренца собственного электромагнитного поля пучка можно заменить линейной силой:

$$F^s(\vec{x}, t) = B^s x, \quad /19/$$

при этом, однако, не учитывается изменение эффективного фазового объема пучка, связанное с нелинейностью собственных полей /3,4/. Подставляя /19/ в /6/, получим выражение для матрицы F_{sv} :

$$F_{sv} = B^s M_{xv}. \quad /20/$$

Таким образом, система уравнений для моментов второго порядка /3/ вместе с определением матриц F_{sx} и F_{sv} по формулам /13/, /20/ совпадает с полученной в /2/ для пучков с постоянной по эллиптическому сечению плотностью заряда. При выводе формул /13/, /20/ мы пользовались только предположением о постоянстве, в фиксированный момент времени, плотности частиц в пучке на эллиптических линиях, и не делали никаких предположений о конкретной зависимости плотности от координат. Таким образом, уравнения, описывающие изменение во времени среднеквадратичных размеров пучков заряженных частиц, полученные в /2/, справедливы для произвольных функций распределения, дающих плотность вида /8/.

2. Рассмотрим кольцевой пучок заряженных частиц, находящийся в фокусирующем потенциале и имеющий разброс по частотам обращения. В отсутствие связи между поперечными степенями свободы уравнения движения можно записать в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x. \quad /21/$$

В пренебрежении столкновениями частиц функция распределения удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial f}{\partial v} + \omega \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0. \quad /22/$$

Сила, действующая на частицу в /21/, нелинейна по полной совокупности фазовых переменных (x, v, ϕ, ω) , поэтому цепочка уравнений для моментов функции f уже не распадается на независимые подсистемы для моментов одного порядка. Будем считать, что частота ω не зависит от времени, и положим для простоты:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0. \quad /23/$$

Для моментов второго порядка с помощью /21/, /22/ можно получить систему уравнений:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dx^2}{dt}} &= 2 \overline{xv} \\ \overline{\frac{dxv}{dt}} &= \overline{v^2} - \overline{\omega^2 x^2} \\ \overline{\frac{dv^2}{dt}} &= -2 \overline{\omega^2 xv}. \end{aligned} \quad /24/$$

Черта в /24/, так же как в п. 1, означает усреднение с функцией распределения f в виде /7/. Таким образом, моменты второго порядка оказались связанными с высшими моментами - $\overline{\omega^2 x^2}$, $\overline{\omega^2 xv}$. Из /24/ нетрудно получить уравнение для среднеквадратичного размера пучка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overline{x^2}}{dt^2} + 4 \overline{\omega^2 x^2} &= 4 \overline{E} \\ \frac{d\overline{E}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{v^2}}{2} + \frac{\overline{\omega^2 x^2}}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad /25/$$

Введем моменты функции распределения:

$$M_n^{II} = \overline{\omega^{2n} x^2}; \quad E_n = \overline{\omega^{2n} E}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad /26/$$

Моменты /26/ удовлетворяют цепочке линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 M_n^{II}}{dt^2} + 4 M_{n+1}^{II} = 4 E_n; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad /27/$$

и для среднеквадратичного размера M_0^{II} решение /27/ имеет следующий вид /см. приложение/:

$$M_0^{II} = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int f(x, v, \omega, t=0) \left[\frac{x^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) + \frac{xv}{\omega} \sin 2\omega t + \frac{v^2}{2\omega^2} (1 - \cos 2\omega t) \right] dx dv d\omega, \quad /28/$$

где $f(x, v, \omega, t=0)$ - функция распределения в начальный момент времени. Остальные моменты M_n^{II} можно найти, используя /27/ как рекуррентное соотношение.

Аналогично /28/, можно получить выражение для изменения во времени положения центра масс пучка. Для моментов функции распределения:

$$M_n^I = \overline{\omega^{2n} x}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad /29/$$

справедлива следующая цепочка уравнений:

$$\frac{d^2 M_n^I}{dt^2} + M_{n+1}^I = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad /30/$$

Решение системы /30/ находится так же, как и /27/:

$$M_0^I = \overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int f(x, v, \omega, t=0) \left[x \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t \right] dx dv d\omega. \quad /31/$$

Если функция распределения зависит от ϕ , то вид решений /28/, /31/ несколько изменится. Например, для \overline{x} будем иметь:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \Phi(x, v, \phi - \omega t, \omega) \left[x \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t \right] dx dv d\omega,$$

где $\Phi(x, v, \phi, \omega)$ - начальная функция распределения.

Пусть функция распределения в начальный момент времени представляется в виде:

$$f(x, v, \omega, t=0) = \frac{N}{\omega} \Phi_1\left(x, \frac{v}{\omega}\right) \Phi_2(\omega - \bar{\omega}) \quad /33/$$

и функции Φ_1, Φ_2 выбраны так, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(x, u) dx du = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(y) dy = 1 \quad /34/$$

$$\Phi_2(y) = \Phi_2(-y).$$

Тогда для изменения во времени \overline{x} и $\overline{x^2}$ имеем:

$$\overline{x} = \overline{x}_0 F_1(t) \cos \bar{\omega} t + \frac{v_0}{\bar{\omega}} F_1(t) \sin \bar{\omega} t$$

$$\overline{x^2} = \frac{\overline{x_0^2}}{2} (1 + F_1(2t) \cos 2\bar{\omega} t) + \frac{\overline{xv_0}}{\bar{\omega}} F_1(2t) \sin 2\bar{\omega} t +$$

$$+ \frac{\overline{v_0^2}}{2(\bar{\omega}^2 + \Delta^2)} (1 - F_1(2t) \cos 2\bar{\omega} t), \quad /35/$$

где индексом "0" отмечены моменты начальной функции распределения /33/; Δ - разброс по частотам обращения $\Delta^2 = (\omega - \bar{\omega})^2$; функция $F_1(t)$ определена формулой:

$$F_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(y) \cos yt dy. \quad /36/$$

При $t=0 - F_1(t)=1$ и для любой интегрируемой с квадратом функции $\Phi_2(y)$, $F_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, \bar{x} изменяется по гармоническому закону с частотой $\bar{\omega}$ и с амплитудой колебаний, убывающей со временем как $F_1(t)$. Среднеквадратичное значение \bar{x}^2 колеблется с двойной частотой $2\bar{\omega}$ около равновесного значения

$\frac{1}{2}(\bar{x}_0^2 + \frac{v_0^2}{\bar{\omega}^2 + \Lambda^2})$ с амплитудой, меняющейся как

$F_1(2t)$. Закон затухания амплитуд колебаний зависит от вида функции $\Phi_2(y)$:

$$\Phi_2(y) = \frac{1}{\Delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\Lambda^2}}; \quad F_1(t) = e^{-\frac{\Delta^2 t^2}{2}} \quad /36.1/$$

$$\Phi_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{2\Delta} \sigma(3\Delta^2 - y^2); \quad F_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}\Delta t} \sin\sqrt{3}\Delta t \quad /36.2/$$

$$\Phi_2(y) = \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{4\Delta} \cos \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}y}{2\Delta} \sigma\left(\frac{\pi^2 \Delta^2}{\pi^2 - 8} - y^2\right); \quad /36.3/$$

$$F_1(t) = \frac{\cos \frac{\pi \Delta t}{\sqrt{\pi^2 - 8}}}{1 - \frac{4\Delta^2 t^2}{\pi^2 - 8}}$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

В отсутствие разброса по частотам ($\Lambda=0$) решение для \bar{x}^2 переходит в общее решение уравнения для колебаний среднеквадратичного размера пучка в фокусирующем потенциале ^{2/}. В случае $\Delta \neq 0$ амплитуды колебаний — $F_1(t)$

затухают, как это следует из /36/, при $t \gg \frac{1}{\Lambda}$. Особый интерес в этом случае представляет изменение во времени размера пучка a :

$$a^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \quad /37/$$

Предположим, что в начальный момент времени выполняется условие:

$$\bar{x}_0^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2 + \Lambda^2}, \quad /38/$$

тогда на больших временах ($t \geq \frac{1}{\Lambda}$) размер пучка будет стремиться к величине:

$$a^2 = a_0^2 + \bar{x}_0^2, \quad /39/$$

где a_0 — начальный размер пучка. Увеличение размеров пучка связано с переходом энергии когерентных колебаний за счет разброса по частотам в энергию некогерентного движения.

Как мы уже отмечали выше, нелинейность внешних полей приводит к бесконечной цепочке уравнений для моментов функции распределения, решение которой в общем случае неизвестно. Его можно искать приближенно, обрывая цепочку на некотором моменте /например, в рассматриваемом случае положить $M_n^{I,II} = 0$ при $n > N$ /. Это, однако, приводит к тому, что полученное приближенное решение справедливо лишь для конечного интервала времени, величина которого зависит от N . Действительно, решение системы /27/ имеет тогда следующий вид /см. приложение/:

$$M_0^{II} = \bar{x}^2 = \sum_{n=0}^{2N} b_n t^n, \quad /40/$$

где коэффициенты b_n связаны с моментами начальной функции распределения. Можно показать, что выражение /40/ является разложением в ряд по степеням времени вплоть до членов $\sim t^{2N}$ точного решения для \bar{x}^2 /35/,

т.е. на больших временах влияние отброшенных членов становится существенным.

Тем не менее, бесконечная цепочка уравнений /27/ может быть сведена к одному уравнению для средне-квадратичного размера пучка с введением эффективного фазового объема /эмиттанса/ пучка^{2,3,4/}:

$$F^2 = \overline{x^2 v^2} - (\overline{xv})^2 \quad /41/$$

Эмиттанс F удовлетворяет уравнению, являющемуся следствием системы /24/:

$$\frac{dF^2}{dt} = \overline{\omega^2 x^2} \frac{dx^2}{dt} - \overline{x^2} \frac{d\omega^2 x^2}{dt} \quad /42/$$

Из /24/ с помощью /41/ нетрудно получить уравнение для среднеквадратичного размера пучка $a = \sqrt{\overline{x^2}}$:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{F^2}{a^3} + \frac{\overline{\omega^2 x^2}}{a} = 0. \quad /43/$$

Решая /42/ относительно $\overline{\omega^2 x^2}$, имеем:

$$\overline{\omega^2 x^2} = -a^2 \int_0^t \frac{1}{a^4} \frac{dF^2}{dt'} dt' + C a^2 \quad /44/$$

Находя с помощью начальной функции распределения /34/ постоянную C и подставляя /44/ в /43/, получим:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + (\overline{\omega^2} + \Delta^2) a - \frac{F^2}{a^3} - a \int_0^t \frac{1}{a^4} \frac{dF^2}{dt'} dt' = 0. \quad /45/$$

Таким образом, если эмиттанс пучка - известная функция времени, бесконечная цепочка уравнений /27/ эквивалентна одному уравнению для среднеквадратичного размера. В отсутствие разброса по частотам ($\Delta = 0$) эмиттанс не меняется и уравнение /45/ совпадает с уравнением Владимирского-Капчинского⁵. Моменты

функции распределения, входящие в /41/, могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} \overline{xv} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int \int f(x, v, \omega, t=0) [xv \cos \omega t - \frac{x^2 \omega}{2} \sin 2\omega t + \\ &+ \frac{v^2}{2\omega} \sin 2\omega t] dx dv d\omega \\ \overline{v^2} &= \int \int \int f(x, v, \omega, t=0) [\frac{x^2 \omega^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) - xv \omega \sin 2\omega t + \\ &+ \frac{v^2}{2} (1 + \cos 2\omega t)] dx dv d\omega. \end{aligned} \quad /46/$$

Рассмотрим для примера начальную функцию распределения:

$$f(x, v, \omega, t=0) = \frac{1}{a_0 \omega \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} \delta\left(\frac{v}{\omega}\right) \Phi_2(\omega - \bar{\omega}). \quad /47/$$

с функцией $\Phi_2(\omega - \bar{\omega})$, определенной согласно /36.1/. В начальный момент времени частицы находятся на фазовой плоскости (x, v) на линии $v=0$. Эмиттанс /41/ изменяется во времени согласно формуле

$$F^2(t) = \frac{\bar{\omega}^2 a_0^4}{4} (1 - e^{-4\Delta^2 t^2}). \quad /48/$$

При выводе /48/ мы использовали условие $\Delta \ll \bar{\omega}$. На больших временах $t \geq \frac{1}{\Delta}$ эмиттанс F стремится к предельному значению $F_k = \frac{\bar{\omega} a_0^2}{2}$, и частицы занимают на фазовой плоскости область с эффективной площадью, равной F_k .

3. Предположим, что в поле Лоренца внешнего электромагнитного поля имеется нелинейность $\sim x^n$. Уравнения движения частицы в этом случае запишутся как:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad /49/$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x - \beta x^n$$

и для моментов второго порядка имеем следующую систему:

$$\frac{dx^2}{dt} = 2xv \quad /50/$$

$$\frac{dxv}{dt} = v^2 - \omega_0^2 x^2 - \beta x^{n+1}$$

$$\frac{dv^2}{dt} = -2\omega_0^2 xv - 2\beta vx^n$$

Так же, как в п.2, для изменения во времени средне-квадратичного размера $a = \sqrt{x^2}$ можно получить уравнение

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \omega_0^2 a - \frac{F^2}{a^3} + \beta \frac{x^{n+1}}{a} = 0. \quad /51/$$

Эмиттанс F , определенный по формуле /41/, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dF^2}{dt} = \frac{da^2}{dt} \beta x^{n+1} - a^2 \frac{2\beta}{n+1} \frac{dx^{n+1}}{dt}. \quad /52/$$

Считая эмиттанс известной функцией времени, разрешим /52/ относительно $\frac{dx^{n+1}}{dt}$ и подставим его в /51/, в результате имеем:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \omega_0^2 a - \frac{F^2}{a^3} - \frac{\beta}{2} (n+1) a^{n+1} \int_0^t \frac{1}{\beta a^{n+3}} \frac{dF^2}{dt'} dt' + \beta a^n = 0, \quad /53/$$

где $\tilde{\beta} = \beta \frac{x_0^{n+1}}{a_0^{n+1}}, x_0^{n+1}, a_0^2 = x_0^2$ - моменты начальной функции распределения.

Если изменением эмиттанса F можно пренебречь, то, согласно /53/, среднеквадратичный размер a удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \omega_0^2 a - \frac{F^2}{a^3} + \tilde{\beta} a^n = 0. \quad /54/$$

В этом случае малая статистическая нелинейность ($\frac{d\tilde{\beta}}{dt} = 0$) приводит к нелинейному сдвигу частоты колебаний. В отсутствие нелинейного члена ($\tilde{\beta} = 0$) общее решение /54/ можно записать в виде:

$$\left(\frac{a}{a_m}\right)^2 = \sqrt{1+A^2} + A \sin(2\omega_0 t + \phi), \quad /55/$$

где a_m - размер согласованного пучка. В первом порядке малости по β в выражении /55/ амплитуду A и фазу ϕ следует считать медленно меняющимися функциями, которые, согласно методу усреднения Крылова-Боголюбова^{16/}, удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dA}{dt} = 0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\tilde{\beta} a_m^{n-1}}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\sqrt{1+A^2}}{A} \sin\psi\right) (\sqrt{1+A^2} + A \sin\psi)^{\frac{n-1}{2}} d\psi. \quad /56/$$

Для кубической нелинейности ($n=3$) вычисление интеграла в /56/ дает:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{3}{2} \tilde{\beta} \frac{a_m^2}{\omega_0} \sqrt{1+A^2} \approx \frac{3}{2} \frac{\tilde{\beta} a_m^2}{\omega_0} \left(1 + \frac{A^2}{2}\right). \quad /57/$$

Таким образом, в отличие от нелинейных колебаний одной частицы, кроме нелинейного сдвига частоты, про-

порционального квадрату амплитуды \bar{x} , для среднего размера пучка имеется поправка, не зависящая от амплитуды колебаний.

В случае малой статической нелинейности можно также получить выражение для изменения во времени среднеквадратичного размера пучка, учитывающее изменение эмиттанса. В первом порядке малости по β , согласно /6/, уравнения движения /49/ эквивалентны следующей системе:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \omega^2(E) \bar{x} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{\omega^2(E) \bar{x}^2}{2} \right) = 0. \quad /58/$$

Для кубической нелинейности зависимость частоты от энергии имеет вид:

$$\omega(E) = \omega_0 + \frac{3}{4} \frac{\beta E}{\omega_0^3} \quad /59/$$

Так же, как в п.2, введем моменты функции распределения:

$$M_n^{\Pi} = \overline{\omega^{2n}(E) \bar{x}^2}; \quad E_n = \overline{\omega^{2n}(E) E}; \quad n=0,1,2... \quad /60/$$

Моменты M_n^{Π} и E_n удовлетворяют цепочке уравнений /27/, т.е. для среднеквадратичного \bar{x}^2 имеем:

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t=0) \left[\frac{x^2}{2} (1 + \cos 2\omega(E)t) + \frac{xv}{\omega(E)} \sin 2\omega(E)t + \frac{v^2}{2\omega^2(E)} (1 - \cos 2\omega(E)t) \right] dx dv, \quad /61/$$

где $f(x, v, t=0)$ - начальная функция распределения. Аналогично /61/, для положения центра масс пучка \bar{x} можно получить выражение:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t=0) \left[x \cos \omega(E)t + \frac{xv}{\omega(E)} \sin \omega(E)t \right] dx dv. \quad /62/$$

Из формулы /59/ следует, что члены, зависящие от времени в /61/, /62/ на больших временах являются быстроосциллирующими функциями и интегрирование их дает в результате величину, убывающую с ростом времени. Поэтому качественно изменения во времени \bar{x} и \bar{x}^2 ничем не отличаются от случая, разобранный в п.2. Центр масс пучка \bar{x} совершает затухающие колебания с частотой ω_0 . Среднеквадратичный размер \bar{x}^2 колеблется с двойной частотой и на больших временах стремится

к равновесному значению $\frac{1}{2} \left[x_0^2 + \left(\frac{v^2}{\omega^2(E)} \right)_0 \right]$. Закон затуха-

ния амплитуд колебаний зависит от вида начальной функции распределения. Например, для функции $f(x, v, t=0)$, равной:

$$f(x, v, t=0) = \frac{\sqrt{3} N}{2 a_0} \sigma(3 a_0^2 - x^2) \delta(v), \quad /63/$$

амплитуда колебаний среднеквадратичного размера убы-

вает на больших временах по закону $\frac{1}{\frac{\beta}{\omega_0} a_0^2 t}$. Эмит-

танс F /41/ в этом случае увеличивается от 0 до предельного значения $F_k = \frac{\omega_0 a_0^2}{2}$, т.е. частицы за время

$t \geq \frac{1}{\frac{\beta}{\omega_0} a_0}$ занимают на фазовой плоскости область с эффективной площадью F_k .

4. В заключение кратко изложим полученные результаты. Показано, что система уравнений, описывающая изменение во времени среднеквадратичных размеров пучка заряженных частиц, полученная в работе /2/, справедлива не только в случае пучков с равномерной по эллиптическому сечению плотностью заряда, но и для пучков с плотностью заряда, имеющей эллиптические линии постоянного уровня. При этом система не зависит от конкретного вида функции распределения. Однако использованная линейная аппроксимация сил Лоренца не позволяет учитывать изменение эмиттанса, вызываемое нелинейностью колебаний.

Эффекты, связанные с изменением эмиттанса, прослежены на простых модельных одномерных задачах с нелинейностью сил Лоренца внешнего электромагнитного поля. Учет изменения эмиттанса позволяет замкнуть уравнения для моментов во втором порядке, т.е. получить замкнутые уравнения для среднеквадратичных величин. Закон изменения эмиттанса можно задать извне, в частности, из решения модельных задач.

Из полученных результатов следует, что в течение времени порядка обратного нелинейного сдвига частоты колебаний /обратного разброса по частотам обращения в круговом пучке/ эмиттанс можно считать постоянным. На временах, гораздо больших указанных, эффективный эмиттанс стремится к предельному значению. На тех же временах колебания центра масс пучка затухают и из-за перехода энергии когерентных колебаний в некогерентные среднеквадратичный размер растёт.

Авторы благодарят В.Ф.Шевцова за помощь в работе и ценные обсуждения.

Приложение

Для образцов Лапласа моментов /26/ M_{np}^{II} имеем, согласно уравнениям /27/:

$$p^2 M_{np}^{II} + 4 M_{n+1p}^{II} = \frac{4E_n}{p} + p M_n^{II}(t=0) + \left. \frac{dM_n^{II}}{dt} \right|_{t=0} = F_n \quad /64/$$

Рассмотрим последовательность определителей (N+1)-го порядка:

$$D_N = \begin{vmatrix} p^2 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p^2 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & p^2 \end{vmatrix} ;$$

$$D_N^{\circ} = \begin{vmatrix} F_0 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ F_1 & p^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_N & 0 & \dots & \dots & p^2 \end{vmatrix} \quad /65/$$

Неизвестное M_{op}^{II} может быть найдено по формуле:

$$M_{op}^{II} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D_N^{\circ}}{D_N} \quad /66/$$

Вычисление определителя D_N легко проводится:

$$D_N = p^{2(N+1)} \quad /67/$$

Разложим определитель D_N° по элементам первого столбца. В результате получим выражение:

$$D_N^{\circ} = p^{2N} \sum_{n=0}^N (-1)^n F_n \left(\frac{2}{p}\right)^{2n} \quad /68/$$

Подставляя /67/, /68/ в /66/ и переходя к пределу, имеем:

$$M_{op}^{II} = \frac{1}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n \left(\frac{2}{p}\right)^{2n} \quad /69/$$

Воспользовавшись определением моментов /26/, формулу /69/ можно переписать в следующем виде:

$$M_{op}^{II} = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int f(x, v, \omega, t=0) \left[\frac{4}{p} E \cdot p x^2 + 2xv \right] \times \\ \times \frac{1}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2\omega}{p}\right)^{2n} dx dv d\omega \quad /70/$$

Суммируя в подынтегральном выражении ряди производя обратное преобразование Лапласа, получим окончательный результат:

$$M_0^{\text{II}} = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x, v, \omega, t = 0) \left[x^2 \cos 2\omega t + \frac{xv}{\omega} \sin 2\omega t + \frac{E}{\omega^2} (1 - \cos 2\omega t) \right] dx dv d\omega. \quad /71/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дымников А.Д., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-10620, Дубна, 1977.
2. Казаримов Н.Ю., Перельштейн Э.А., Шевцов В.Ф. ОИЯИ, Р9-10985, Дубна, 1977.
3. Lapostolle P.M. In: *Proceedings of 1971 Particle Accelerator Conference, Chicago, IEEE Trans. NS-18, 3, p. 1101.*
4. Sacherer F.J. Там же, с. 1105.
5. Kapchinsky I.M., Vladimirsky V.V. In: *Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators and Instruments, CERN, Geneva, 1959, p. 274.*
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, "Наука", М., 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 февраля 1978 года.