

Б-438

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



1828 / 2-78

24/IV-78

P9 - 11195

П.Ф.Белошицкий, Э.А.Перельштейн

ОБ ИМПЕДАНСЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ
ВРАЩАЮЩИХСЯ ЭЛЕКТРОНОВ
В ОТКРЫТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

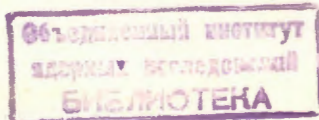
1978

P9 - 11195

П.Ф.Белошицкий, Э.А.Перельштейн

ОБ ИМПЕДАНСЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ
ВРАЩАЮЩИХСЯ ЭЛЕКТРОНОВ
В ОТКРЫТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

Направлено в "Particle Accelerators"



Белошицкий П.Ф., Перельштейн Э.А.

P9 - 11195

Об импедансе цилиндрического слоя вращающихся электронов в открытой периодической структуре

Найден импеданс E-слоя в открытой периодической структуре типа "беличья клетка". Получено приближенное выражение для импеданса первых гармоник. Исследована зависимость импеданса от геометрических параметров структуры.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Beloshitsky P.F., Perelstein E.A.

P9 - 11195

On the Coupling Impedance of E-Layer in the "Squirrel Cage"

The coupling impedance of E-layer in the "squirrel cage" has been calculated using the Riemann-Gilbert method. An analytical formula has been derived for first harmonics. The dependence of the coupling impedance on geometrical parameters of the "squirrel cage" has been calculated numerically.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Для реализации коллективного метода ускорения ионов электронными кольцами^{/1/} важно обеспечить азимутальную когерентную устойчивость колец в процессах их формирования и ускорения^{/2/}. С этой целью специальным образом выбирается геометрия пучка и камеры, которая характеризуется так называемым импедансом. Уменьшение его величины приводит к повышенной стабильности колец. Чтобы получить достаточно малый импеданс, вблизи колец размещаются металлические экраны^{/2/}.

Однако даже тонкие металлические экраны создают дополнительные трудности при формировании импульсных внешних магнитных полей и ограничивают рабочую частоту коллективных ускорителей^{/2, 3/}.

Для повышения рабочей частоты желательно перейти к разрезанным металлическим экранам так, чтобы индуцированные в них токи существенно не искажали внешних полей. Для высокочастотных полей возмущения требуется, чтобы разрезанный экран работал как сплошной.

Кроме того, в коллективных ускорителях разрезанный по образующим цилиндрический экран - "белижье колесо" используется для фокусировки кольца при ускорении^{/4/}. В этом случае представляет интерес вопрос об азимутальной устойчивости кольца в такой геометрии. Таким образом, возникает задача о вычислении импеданса кольца в открытых периодических структурах.

Известно, что наибольшую опасность представляют азимутальные неустойчивости, связанные с H-волнами. Поэтому в данной работе решается модельная задача, позволяющая проследить качественные особенности поведения импеданса в зависимости от геометрических параметров структуры.

1. Вычислим импеданс цилиндрического слоя радиуса r_0 вращающихся с частотой ω_0 релятивистских электронов / E - слой / в периодической структуре / рис. 1 /, представляющей собой беличье колесо радиуса a с периодом структуры ℓ , шириной щели d / ℓ и d выражены в радианах /.

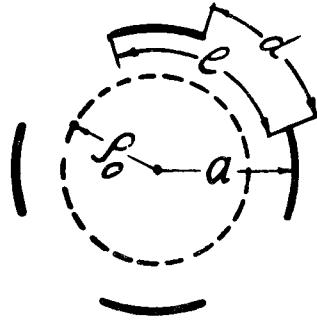


Рис. 1. "Беличье колесо".

Матрицу импеданса Z_{mn} введем, используя соотношение между фурье-гармониками азимутальных компонент электрического поля $E_{\phi m}$ и возмущения линейной плотности тока $\delta I_{\phi m}$

$$2\pi r_0 E_{\phi m} |_{r=r_0} = -\sum_n Z_{mn} \delta I_{\phi n} = -\sum_n Z_{mn} \int \delta j_{\phi n} r dr. \quad /1/$$

Некоторые свойства матрицы Z_{mn} приведены в приложении 1.

Возмущения плотности заряда $\delta \rho$ и тока $\delta j_{\phi m}$ определим как

$$\delta \rho = \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0} \sum \delta q_m e^{i(m\phi - \omega t)}, \quad /2/$$

$$\delta j_{\phi m} = \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0 m} \omega r \delta q_m.$$

Электрическое поле найдем, решая краевую задачу с периодическими по ϕ граничными условиями, как это сделано в работе /5/

$$E_{\phi m} |_{r=r_0} = \pi r_0 k^2 \left\{ -\frac{\delta q_m}{m} J'_m(kr_0) H_m^{(1)'}(kr_0) + \sum_{\ell} \frac{\delta q_{\ell}}{\ell} x_{\frac{m-\ell}{N} + \ell_0} \frac{J'_{\ell}(kr_0) H_{\ell}^{(1)'}(ka)}{J'_m(ka)} J'_m(kr_0) \right\}, \quad /3/$$

где $J_m(x)$ и $H_m^{(1)}(x)$ - функции Бесселя и Ханкеля; штрихом обозначены производные по аргументу, $k = \omega/c$, $N = 2\pi/\ell$, значок "o" у индекса k_0 означает взятие ближайшего к

$\frac{k}{N}$ целого числа, Σ' означает суммирование по всем

ℓ таким, что $\frac{m-\ell}{N}$ - целое число.

Величины x_k определяются из системы линейных уравнений, совпадающей с системой в /6/

$$x_k = \delta_k^{m_0} - \frac{|m_0|}{m_0} W_k^{m_0}(u) + (k+\mu) V^k(u) (x_0 - \delta_0^{m_0}) + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \epsilon_n W_k^n(u), \quad /4/$$

$$\left[\frac{2P_{\mu-1}(-u)}{P_{\mu-1}(-u) + P_{\mu}(-u)} - \epsilon_0 \right] (x_0 - \delta_0^{m_0}) = \epsilon_0 \delta_0^{m_0} + \mu \left[-\frac{|m_0|}{m_0} V^{m_0}(u) + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \epsilon_n V^n(u) \right],$$

$(k = \pm 1, \pm 2, \dots),$

где δ_k^m - символ Кронекера, $P_\nu(-u)$ - функции Лежандра,

$$u = \cos \frac{\pi d}{\ell}, \quad \mu = \frac{m}{N} - m_0, \quad -\frac{1}{2} \leq \mu < \frac{1}{2},$$

$$\epsilon_n = 1 - \frac{iN(n+\mu) \frac{|n|}{n}}{\pi(ka)^2 J'_{N(n+\mu)}(ka) H_{N(n+\mu)}^{(1)}(ka)}, \quad /5/$$

$$V^n(u) = \frac{1}{n+\mu} \{ P_n(u) - \frac{P_{\mu-1}(-u)}{P_{\mu-1}(-u)+P_\mu(-u)} [P_n(u) - P_{n-1}(u)] \}, \quad /6/$$

$$W_m^n(u) = V_{m-1}^{n-1}(u) - \mu V^n(u) V_{m-1}^{-1}(u), \quad /7/$$

$$V_m^n(u) = \frac{m+1}{2(m-n)} [P_m(u) P_{n+1}(u) - P_{m+1}(u) P_n(u)], \quad m \neq n,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+1} \chi_{n+1-p}(u) P_{p-n-1}(u), \quad n \geq 0,$$

$$V_n^n(u) = V_{-n}^{-n}(u) = -V_{n-2}^{n-2}(u), \quad n > 1, \quad /8/$$

$$V_{-1}^{-1}(u) = 0,$$

где $\chi_0(u) = 1$; $\chi_1(u) = -u$; $\chi_n(u) = P_n(u) - 2uP_{n-1}(u) + P_{n-2}(u)$ ($n \geq 2$).

Импеданс Z_{mm} в соответствии с формулами /1/ и /3/ выражается через коэффициенты x_k

$$\tilde{Z}_{mm} = \frac{eZ_{mm}}{4\pi} = \begin{cases} \pi^2 k r_0 J'_n(kr_0) H_n^{(1)'}(kr_0) \delta_m^n - \frac{J'_m(kr_0) H_n^{(1)'}(ka)}{J'_m(ka) H_n^{(1)'}(kr_0)} x_{\frac{m-n}{N} + n_0}, & \frac{m-n}{N} = 0, \pm 1, \dots, \\ 0, & \frac{m-n}{N} \neq 0, \pm 1, \dots \end{cases} \quad /9/$$

2. Ограничимся рассмотрением диагональных элементов матрицы импеданса. Для азимутальных неустойчивостей учет недиагональных членов приводит к поправкам порядка малости $\nu/\gamma_0 / \nu$ - погонный электрон, γ_0 - релятивистский фактор/. Максимальный инкремент, связанный с неоднородностью среды /7/, в $(\nu/\gamma_0)^{1/2}$ раз меньше инкремента на длинах волн, кратных частоте обращения ω_0 .

Для первых гармоник $(\frac{m}{N} \ll \frac{r_0}{a} (\frac{\ell}{d})^{1/2})$ и $(\frac{m}{N} \ll 1)$ можно получить приближенное решение системы /4/

$$\tilde{Z}_{mm} = \pi^2 m J'_m(m) H_m^{(1)'}(m) \left\{ 1 - \frac{J'_m(m) H_m^{(1)'}(m \frac{a}{r_0})}{J'_m(m \frac{a}{r_0}) H_m^{(1)'}(m)} x_0 \right\}, \quad /10/$$

$$x_0 = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \epsilon_0} \frac{m}{N} \ln \frac{1-u}{2}}. \quad /11/$$

Здесь и в дальнейшем мы считаем вращение электронов ультрарелятивистским, так что $\beta = 1$.

В пределе, когда ширина щели d много меньше ширины ленты $\ell - d$ так, что выполняется условие

$$\frac{2m}{N} \left| \ln \frac{\pi d}{2\ell} \right| \gg 1, \quad /12/$$

импеданс равен

$$\tilde{Z}_{mm} = \pi^2 m J'_m(m) H_m^{(1)'}(m) \left\{ 1 - \frac{J'_m(m) H_m^{(1)'}(m \frac{a}{r_0})}{J'_m(m \frac{a}{r_0}) H_m^{(1)'}(m)} \right\} \quad /13/$$

и совпадает с импедансом E-слоя в сплошной металлической трубе.

Таким образом, для подавления азимутальных неустойчивостей с помощью разрезанных экранов следует выдерживать условие /12/.

В обратном предельном случае, когда $\frac{m}{N} |\ln \sin^2 \frac{\pi d}{2l}| \ll 1$,

импеданс равен примерно импедансу Е-слоя в свободном пространстве

$$\tilde{Z}_{mm} \approx \pi^2 m H_m^{(1)'}(m) J_m'(m). \quad /14/$$

При выполнении условия $1 \ll m \ll \gamma^3$, используя асимптотику цилиндрических функций, получим

$$\tilde{Z}_{mm} \approx \frac{3^{1/3} \Gamma^2(\frac{2}{3})}{2^{2/3}} (1 + i\sqrt{3}) m^{-1/3}. \quad /15/$$

Зависимость импеданса от параметров $N, d/l$ представлена на рис. 2.

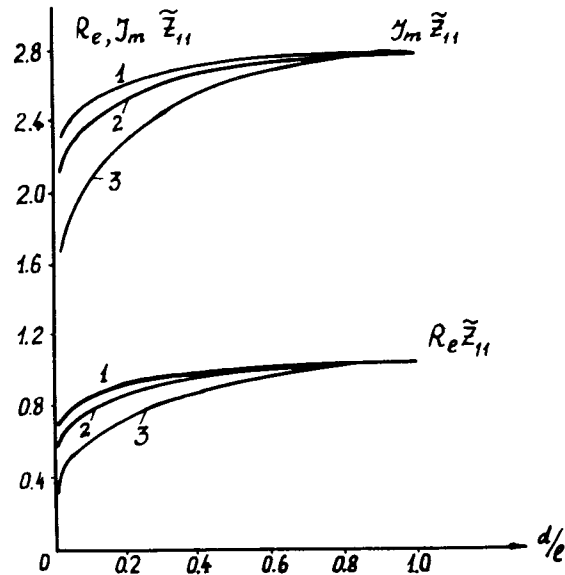


Рис. 2. Зависимость импеданса первой гармоники от ширины щели. 1 - $N=30$; 2 - $N=20$; 3 - $N=10$.

Как видно из рисунка, импеданс для первой гармоники увеличивается с ростом числа разрезов N и мал только в узкой области $\frac{d}{l} \ll 1$. Отметим также слабую зависи-

мость импеданса на первых гармониках от отношения a/r_0 .

С помощью численного решения системы /4/ было исследовано поведение импеданса на высоких ($m \geq N$) гармониках. Учитывая быстрое убывание величины $\epsilon_n = O(\frac{1}{n^2})$,

для вычисления величин x_k мы ограничились семью уравнениями. Это обеспечивает точность 1-3%. Зависимость импеданса от номера гармоники m представлена на рис. 3,4, зависимость от отношения a/r_0 - на рис. 5.

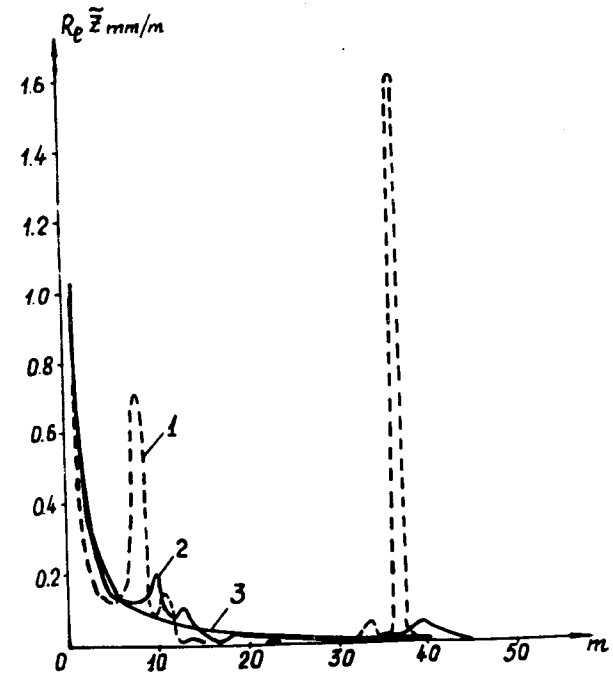


Рис. 3. Зависимость действительной части импеданса от номера гармоники. 1 - $\frac{d}{l}=0,1$; 2 - $\frac{d}{l}=0,5$; 3 - $\frac{d}{l}=0,9$; $N=20$.

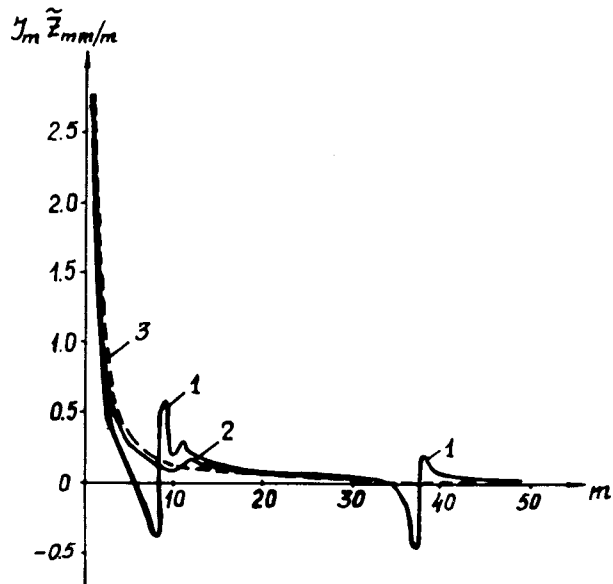


Рис. 4. Зависимость мнимой части импеданса от номера гармоники. 1 - $\frac{d}{l} = 0,1$; 2 - $\frac{d}{l} = 0,5$; 3 - $\frac{d}{l} = 0,9$; $N = 20$.

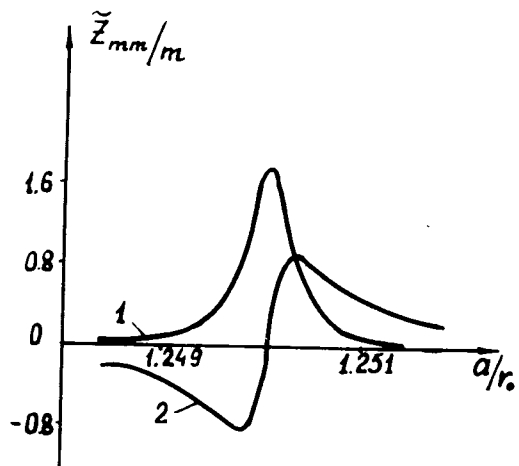


Рис. 5. Зависимость импеданса от отношения a/r_0 . 1 - $\text{Re } \tilde{Z}_{mm}$, 2 - $\text{Im } \tilde{Z}_{mm}$; $m = 37$, $N = 20$.

На рис. 5 виден резонансный характер изменения импеданса при изменении радиуса E-слоя. Узкая ширина резонанса, однако, оставляет открытым вопрос о существовании этого резонанса при учете конечной ширины слоя электронов.

Авторы признательны Н.Ю.Казаринову за полезные обсуждения и помощь в работе.

Приложение 1

Непосредственно из определения матрицы импеданса /1/ с учетом вещественности электрического поля получается соотношение, аналогичное известному для тензора диэлектрической проницаемости /8/

$$Z_{m,n}^*(\omega) = Z_{-m,-n}(-\omega). \quad /П.1/$$

С излучением E-слоя в открытой структуре на произвольной частоте ω связано требование положительной определенности формы

$$\sum_{m,n} A_{mn}(\omega) \delta J_n \delta J_m^*, \quad A_{mn}(\omega) = Z_{mn}(\omega) + Z_{nm}^*(\omega). \quad /П.2/$$

Матрица A_{mn} эрмитова, следовательно, для положительной определенности эрмитовой формы /П.2/ необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A_{mn} были положительны /9/. Для первых $m \leq N$ гармоник это приводит к такому же, как и в азимутально-симметричном случае, условию $\text{Re } Z_{mm} > 0$. Если излучение в системе отсутствует, то, согласно /П.2/, матрица импеданса антиэрмитова.

Литература

1. Veksler V.I. e.a. Collective Linear Acceleration of Ions. Proc. of IV Internat. Conf. on High Energy Accelerat., Cambridge, 1967, p. 289.
2. Саранцев В.П., Перельштейн Э.А. Физика плазмы, 1977, 3, с. 449.

3. Алексахин Ю.И., Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. *ЖТФ*, 1975, 45, с. 933.
4. Иванов И.Н. и др. *ЭЧАЯ*, 1,2, М., Атомиздат, 1971, с. 391.
5. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. *ЖТФ*, 1962, 32, с. 381.
6. Третьякова С.С. и др. *ЖТФ*, 1967, 37, с. 1923.
7. Масунов Э.С. *ЖТФ*, 1974, 44, с. 1903.
8. Силин В.П., Рухадзе А.А. *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*. Атомиздат, М., 1961.
9. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*, Наука, М., 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1977 года.