

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С 345а1
Ж - 122

27/II-78

P9 - 11123

В.М. Жабицкий

985/2-78

ИМПЕДАНС ЭЛЕКТРОННОГО ШНУРА,
ЭКРАНИРОВАННОГО ПЛОСКОЙ
МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКОЙ

1977

P9 - 11123

В.М.Жабицкий

ИМПЕДАНС ЭЛЕКТРОННОГО ШНУРА,
ЭКРАНИРОВАННОГО ПЛОСКОЙ
МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКОЙ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Импеданс электронного шнура, экранированного плоской металлической решеткой

Дан теоретический расчет влияния анизотропных экранов на электромагнитное поле электронного шнура. Анизотропный экран представляет собой плоскую металлическую решетку, образованную бесконечно тонкими и идеально проводящими лентами, ориентированными перпендикулярно к направлению движения электронов в шнуре. Электромагнитное поле в такой структуре найдено путем сведения граничной электромагнитной задачи к задаче Римана-Гильберта. Последняя сводится к решению двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. В длинноволновом приближении приведено аналитическое решение этой системы. В этом же приближении найдено выражение импеданса шнура между двумя анизотропными экранами и импеданса шнура около одного анизотропного экрана. Приведены численные расчеты для импеданса шнура между анизотропными экранами.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Impedance of Electron Straight Beam Screened with a Flat Metallic Lattice

Theoretical calculation of the effect of anisotropic screens on electromagnetic field of electron straight beam is presented. Anisotropic screen is a flat metallic lattice formed by infinitely thin and perfectly conducting strips oriented perpendicularly to the electron motion in the beam. The electromagnetic field in this structure has been determined by the reduction of boundary electrodynamic equation to the Riemann-Hilbert problem. The latter one is reduced to the solution of two infinitely linear algebraic equations. In the long-wave approach the analytical solution of this system is found. In similar approach the expression for the beam impedance between two anisotropic screens and the beam impedance close to one anisotropic screen is found. Numerical calculations for the beam impedance between anisotropic screens are given.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

На модели коллективного ускорителя ОИЯИ для экранирования электромагнитного поля кольца в адгезаторе предполагается использовать "разрезанные" или анизотропные экраны ^{1/}, расположенные симметрично относительно медианной плоскости в вакуумной камере адгезатора. Эти экраны имеют радиальные разрезы, наличие которых уменьшает величину подсадки переменных магнитных полей системы компрессии кольца. В настоящей работе произведен теоретический расчет влияния экранов с разрезами на электромагнитное поле электронного шнура. Замена кольца прямым шнуром сделана с целью упрощения задачи, но позволяет оценить влияние анизотропных экранов на величину квазистатической части импеданса кольца.

Определим электромагнитное поле токов возмущения в электронном шнуре, помещенном между двумя анизотропными экранами (рис.1). Шнур образован электронами, движущимися с релятивистской скоростью $c\beta$ вдоль оси OY. Каждый анизотропный экран представляет собой плоскую периодическую металлическую решетку, образованную бесконечно тонкими и идеально проводящими металлическими лентами, параллельными оси OX. Ширина лент равна d , а период решетки $-l$. Анизотропные экраны расположены в плоскостях $z = \pm L$.

Электромагнитное поле токов возмущения в электронном шнуре, расположенном между анизотропными плоскостями, представим в виде суммы двух полей: собственного электромагнитного поля токов возмущения в шнуре, находящемся в свободном пространстве, и

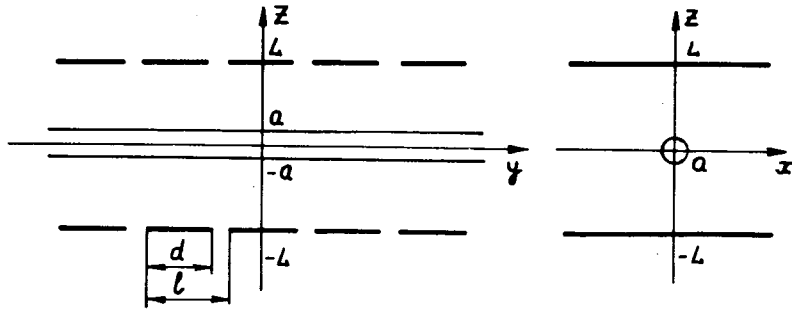


Рис. 1. Шнур электронов радиуса a в поперечном сечении, расположенный между анизотропными плоскостями. l - периодичность расположения лент, d - ширина металлических лент, $2L$ - расстояние между анизотропными плоскостями.

наведенного поля, обусловленного наличием анизотропных экранов. Плотность возмущения заряда представим в виде фурье-интеграла по времени и продольной координате:

$$\rho(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint e^{i(ky - \omega t)} \rho^{k\omega} dk d\omega,$$

$$\rho^{k\omega} = \frac{I_{k\omega}}{Sc\beta} \sigma(x, z), \quad (1)$$

где $\sigma(x, z)$ - функция, характеризующая распределение заряда по сечению шнура S , $I_{k\omega}$ - фурье-компонента тока возмущения. При наличии в шнуре только продольного движения в силу уравнения непрерывности фурье-компонента плотности тока возмущения есть:

$$j_y^{k\omega} = c\beta\rho^{k\omega}, \quad \beta = \frac{\omega}{ck}. \quad (2)$$

Собственное электромагнитное поле возмущений плотности заряда (1) и тока (2) определяется фурье-ком-

понентами потенциала $\phi^{k\omega}$ и продольной составляющей вектор-потенциала $A_y^{k\omega}$:

$$\begin{aligned} \phi^{k\omega} &= \frac{2 \cdot I_{k\omega}}{S \cdot c \cdot \beta} \int_S \sigma(x_0, z_0) dS_0 \int_0^\infty \cosh(x-x_0) e^{-q|z-z_0|} q^{-1} dh = \\ &= \frac{2 \cdot I_{k\omega}}{S \cdot c \cdot \beta} \int_S \sigma(x_0, z_0) K_0\left(\frac{k}{\gamma} \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}\right) dS_0; \quad (3) \end{aligned}$$

$$A_y^{k\omega} = \beta \cdot \phi^{k\omega}; \quad q = \sqrt{k^2 + h^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{k^2}{\gamma^2} + h^2}.$$

Фурье-компоненты $\phi^{k\omega}$ и $A_y^{k\omega}$ для шнура, у которого поперечное сечение есть круг радиуса a и функция $\sigma = 1$ внутри этого круга (что соответствует равномерному распределению плотности заряда по сечению), получаются из (3) после проведения интегрирования и имеют вид:

$$\phi^{k\omega} = \frac{2 \cdot I_{k\omega}}{c\beta} \cdot \left(\frac{2\gamma}{ka}\right) \begin{cases} \frac{\gamma}{ka} - K_1\left(\frac{ka}{\gamma}\right) I_0\left(\frac{k\gamma}{\gamma}\right), & r < a \\ K_0\left(\frac{k\gamma}{\gamma}\right) I_1\left(\frac{ka}{\gamma}\right), & r > a, \end{cases} \quad (4)$$

где I и K - модифицированные функции Бесселя соответственно первого и третьего рода, $r^2 = x^2 + z^2$. Используя (4) и определение импеданса $^{1/2}$, получим следующие выражения для импеданса шнура в свободном пространстве:

$$\tilde{Z}_{c.n.} = \frac{c}{4\pi n} Z_n = \frac{i}{\beta\gamma^2} \cdot 2 \left(\frac{\gamma}{ka} \right)^2 (1 - 2K_1\left(\frac{ka}{\gamma}\right) I_1\left(\frac{ka}{\gamma}\right)). \quad (5)$$

В случае $\frac{ka}{\gamma} \ll 1$ из (5) получим:

$$\tilde{Z}_{c.n.} \approx \frac{i}{\beta\gamma^2} \left(\frac{1}{4} - C - \ln \frac{ka}{2\gamma} \right), \quad (6)$$

где C - постоянная Эйлера.

Наведенное электромагнитное поле, обусловленное наличием анизотропных экранов, в сумме с собственным полем (3) шнура в свободном пространстве должно обеспечивать выполнение граничных условий в плоскостях $z = \pm L$. Поскольку предположено, что ленты являются идеально проводящими и бесконечно тонкими, то на них тангенциальная составляющая вектора напряженности суммарного электрического поля должна обращаться в нуль, а на щелях должны быть непрерывны все компоненты суммарного электромагнитного поля. Чтобы обеспечить выполнение этих граничных условий, добавим к (3) решения однородных волновых уравнений для $\phi^{k\omega}$ и $A_y^{k\omega}$, фурье-компоненты которых можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \phi^{k\omega} &= - \frac{2 \cdot I_{k\omega}}{S \cdot c \cdot \beta} \int_S \sigma(x_0, z_0) dS_0 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ih(x-x_0)} dh \times \\ &\quad \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{2\pi m}{l} y} q_m^{-1} \Phi_m(z), \\ A_y^{k\omega} &= - \frac{2 \cdot I_{k\omega}}{S \cdot c \cdot \beta} \int_S \sigma(x_0, z_0) dS_0 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ih(x-x_0)} dh \times \\ &\quad \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{2\pi m}{l} y} \frac{k\beta \Phi_m(z)}{\left(k + \frac{2\pi m}{l}\right) q_m}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Phi_m(z) = \begin{cases} \bar{A}_m \cdot e^{-q_m(z-L)} & (z > L) \\ A_m (e^{-q_m(L-z)} + e^{-q_m(L+z)}), & (|z| < L) \\ \bar{A}_m e^{q_m(z+L)} & (z < -L) \end{cases}$$

$$q_m = \sqrt{\left(k + \frac{2\pi m}{l}\right)^2 + h^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2},$$

где A_m и \bar{A}_m - неизвестные коэффициенты. Выражения (7) для $\phi^{k\omega}$ и $A_y^{k\omega}$ удовлетворяют калибровочному условию Лоренца. В (7) записаны только симметричные относительно отражений $z \rightarrow -z$ решения однородных волновых уравнений, что соответствует симметричному по z распределению плотности заряда в шнуре. При произвольном распределении плотности заряда к (7) необходимо добавить антисимметричные решения. Из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора напряженности электрического поля, используя (3) и (7), получим следующую связь между коэффициентами A_m и \bar{A}_m :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (e^{-q(L+z_0)} + e^{-q(L-z_0)}) - A_0 (1 + e^{-2qL}) &= -\bar{A}_0, \\ A_m (1 + e^{-2q_m L}) &= \bar{A}_m, \quad (m \neq 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Для нахождения коэффициентов A_m используем метод, изложенный в работах ^{3,4,5/}. При помощи граничных условий и (8) нетрудно построить две системы функциональных уравнений, которым удовлетворяют A_m :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{|m|}{m} (1 - \epsilon_m) A_m e^{i(k + \frac{2\pi m}{\ell})y} = -\xi \cdot e^{iky} \quad (\text{на металлических лентах})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i(k + \frac{2\pi m}{\ell})y} = 0 \quad (\text{на щелях}) \quad (9)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m A_m}{k + \frac{2\pi m}{\ell}} = 0 \quad (\text{в середине щели})$$

$$\epsilon_m = 1 - \frac{|m|}{m} (1 + e^{-2q_m L}) \frac{|k + \frac{2\pi m}{\ell}|}{k + \frac{2\pi m}{\ell}} \times$$

$$\times \sqrt{1 - \frac{k^2 \beta^2 - h^2}{(k + \frac{2\pi m}{\ell})^2}},$$

$$\xi = -\frac{q}{2k} (e^{-q(L+z_0)} + e^{-q(L-z_0)}).$$

Решение функциональных уравнений (9) методом задачи Римана-Гильберта сводится к решению двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода. В случае $\frac{k\ell}{2\pi} \ll 1$ можно записать приближенное решение системы алгебраических уравнений:

$$A_0 \approx \xi \frac{\eta \cdot \ln \frac{1+u}{2}}{\eta \cdot \epsilon_0 \cdot \ln \frac{1+u}{2} + (1 - \eta \cdot \ln \frac{1+u}{2})};$$

(10)

$$A_m = 0, (m \neq 0); \eta = \frac{k\ell}{2\pi} \ll 1; u = \cos(\frac{\pi d}{\ell}).$$

Подставляя (10) в (7) и определяя по потенциалам $E_y^{k\omega}$, получим следующее выражение для импеданса шнура, расположенного между двумя анизотропными экранами:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_{\text{с.п.}} - \frac{i}{\beta\gamma^2} \int_0^{\infty} \frac{2kD \cdot e^{-\frac{2kL}{\gamma} \sqrt{1+\lambda^2}} d\lambda}{1 + kD (1 + e^{-\frac{2kL}{\gamma} \sqrt{1+\lambda^2}}) \sqrt{1+\lambda^2}}, \quad (11)$$

где $D = -\frac{e}{2\pi\gamma} \ln \frac{1+u}{2}$; $\tilde{Z}_{\text{с.п.}}$ определено в (5). В случае свободного пространства $D = 0$ (поскольку $u = \cos \frac{\pi d}{\ell} = 1$),

а при бесконечно узких щелях $D \rightarrow \infty$ (поскольку $u \rightarrow -1$) и (11) переходит в выражение для импеданса шнура между двумя идеально проводящими плоскостями.

Используя вышеизложенный метод нахождения электромагнитного поля шнура, помещенного между двумя анизотропными плоскостями, нетрудно получить выражение для импеданса шнура около одной анизотропной плоскости:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_{\text{с.п.}} - \frac{i}{\beta\gamma^2} \int_0^{\infty} \frac{kDe^{-\frac{2kL}{\gamma} \sqrt{1+\lambda^2}} d\lambda}{1 + kD \sqrt{1+\lambda^2}}, \quad (12)$$

где D совпадает с определением этой величины в (11), L - расстояние от центра шнура до анизотропной плоскости. В случае $D \rightarrow \infty$ (сплошной экран) из (12) получим:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_{\text{с.п.}} - \frac{i}{\beta\gamma^2} K_0(\frac{kL}{\gamma}). \quad (13)$$

При $\frac{kL}{\gamma} \ll 1$ и $a < L$ из (13) и (6) имеем

$$\bar{Z} \approx \frac{i}{\beta \gamma^2} \left(\ln \frac{2L}{a} + \frac{1}{4} \right), \quad (14)$$

что соответствует известной формуле импеданса электронного шнура около плоскости^{6/}.

На рис.2 приведены графики численного значения

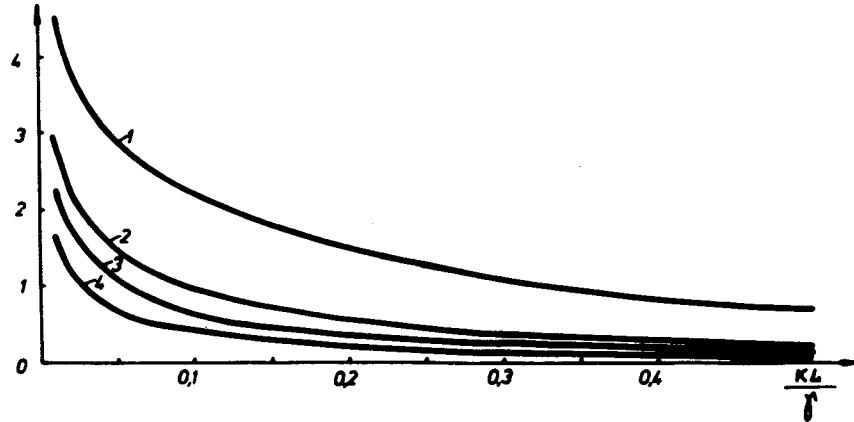


Рис.2. Графики численного значения величины интеграла из (11) в зависимости от $\frac{kL}{\gamma}$.

1 - $D \rightarrow \infty$ (сплошные стенки), 2 - $D = 7,6$,
3 - $D = 3,8$, 4 - $D = 1,9$.

интеграла, входящего в выражение для \bar{Z} из (11). Параметром, отличающим разные кривые на рисунке, является D . На рис.3 приведены графики численного значения импеданса для различных значений D и зафиксированной величины отношения расстояния между экранами к радиусу шнура в поперечном сечении. Из графиков рис.3 видно, что экранировка поля шнура увеличивается с ростом D , т.е. при увеличении ℓ и величины от-

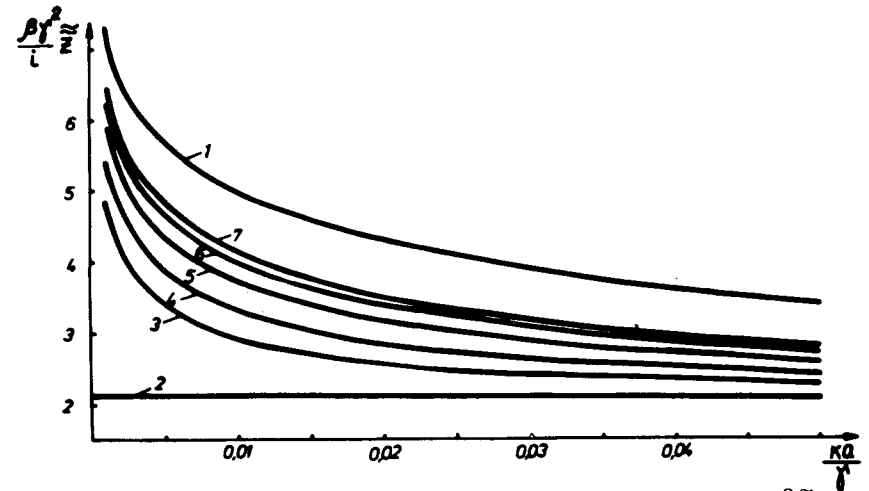


Рис.3. Графики численного значения величины $\beta \gamma^2 \bar{Z} / i$ в зависимости от $\frac{ka}{\gamma}$ при $\frac{L}{a} = 5$.

1 - $D = 0$ (свободное пространство), 2 - $D \rightarrow \infty$ (сплошные стенки), 3 - $D = 15,2$, 4 - $D = 7,6$, 5 - $D = 3,8$, 6 - $D = 2,5$, 7 - $D = 1,9$.

ношения ширины ленты к ширине щели. При значении $\frac{ka}{\gamma} = 0,0125$ и $L/a = 5$ (см. рис.3) введение сплошных экранов уменьшает величину импеданса в 2,2 раза, а введение анизотропных экранов для приведенных на рис.3 значений D уменьшает эту величину в 1,3-1,5 раза.

Оценить величину квазистатической части импеданса кольца, помещенного между анизотропными экранами, можно из (11) при замене величины k на n/R , где n - номер гармоники азимутального тока возмущения в кольце радиуса R . Такая оценка справедлива в случае больших длин волн токов возмущения в кольце, расположенном вблизи стенок (т.е. при $\frac{nL}{R} \ll 1$), и при $\frac{\ell}{R} \ll 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буланов В.А. и др. II Симпозиум по коллективным методам ускорения. ОИЯИ, Д9-10500. с. 51, Дубна, 1977.
2. Алексахин Ю.И. и др. ОИЯИ, Р9-7065, Дубна, 1973.
3. Третьяков О.А. и др. РЭ, (1965), 10, 1233.
4. Третьяков О.А., РЭ, (1965), 10, 1343.
5. Агранович З.С. и др. ЖТФ, (1962), 32, 381.
6. Алексахин Ю.И., Саранцев В.П., ОИЯИ, Р9-7357, Дубна, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 декабря 1977 года.