

1206/2-78

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С34511

Д-361

13/III-78

P9 - 11059

Ю.С.Дерендяев, К.В.Ходатаев

КОМПРЕССИЯ ИНТЕНСИВНОГО  
КОЛЬЦЕВОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА  
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЗЕРКАЛЬНОГО ЗАХВАТА

**1978**

**P9 - 11059**

**Ю.С.Дерендяев, К.В.Ходатаев**

**КОМПРЕССИЯ ИНТЕНСИВНОГО  
КОЛЬЦЕВОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА  
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЗЕРКАЛЬНОГО ЗАХВАТА**

**Компрессия интенсивного кольцевого релятивистского пучка при использовании зеркального захвата**

Анализируются условия равновесия, фокусировки и компрессии релятивистского пучка в системе, состоящей из экрана для зеркального захвата и компрессионных катушек. Полученные численным методом результаты иллюстрируют возможность магнитной компрессии в такой системе.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

**Compression of the Intense Ring Relativistic Beam When Using a Mirror Capture**

The conditions of equilibrium focusing and compression of the relativistic beam in a system, consisting of a screen for mirror capture and compressing bobbins, are analysed. The results of calculations illustrate the possibility of a magnetic compression in such a system.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

## ВВЕДЕНИЕ

Для получения интенсивных кольцевых пучков релятивистских электронов был предложен метод "зеркального захвата"<sup>1/</sup>. Этот метод отличается тем, что вывод пучка на равновесную орбиту и устойчивое удержание на ней обеспечивается магнитным полем токов изображения, наводимых в хорошо проводящем экране, а также режимом самофокусировки, возникающим при распространении пучка в плазме. Предварительные эксперименты<sup>2/</sup> подтвердили возможность осуществления этого метода.

Одна из перспектив использования таких кольцевых пучков в системах коллективного ускорения ионов<sup>3/</sup> связана с их магнитной компрессией и последующей зарядовой декомпенсацией до требуемого уровня. В настоящей работе исследуются влияние формы тороидального экрана на его фокусирующие свойства и на положение равновесия пучка при различных значениях тока в пучке и катушках магнитной системы, а также делаются выводы о возможности и особенностях компрессии в такой системе.

Использование схемы магнитной компрессии, разработанной применительно к адгезатору<sup>4/</sup>, в нашем случае затруднительно из-за присутствия проводящего короткозамкнутого экрана. Требование постоянства магнитного потока, пронизывающего короткозамкнутый виток (в предположении достаточно высокой его проводимости), при нулевых начальных условиях удовлетворяется, если магнитное поле вблизи экрана имеет знак,

противоположный знак поля в центральной области. Поэтому магнитное поле, создаваемое токами в катушках компрессора, имеет квадрупольную особенность на радиусе, меньшем, чем радиус экрана. За исключением трудно реализуемых случаев, пучок после зеркального захвата оказывается на равновесной орбите с радиусом, большим, чем радиус квадрупольной точки. При этом обычный режим включения токов в адгезаторе не приведет к желаемой компрессии. При возрастании поля в системе пучок (в зависимости от знака тока в катушках) либо прижмется к экрану и "погибнет" на нем, либо будет стремиться к радиусу квадрупольной точки и, войдя в зону дефоксировки, потеряет устойчивость.

Эту трудность можно обойти, если применить обратную последовательность включения катушек и пропустить ток в них обоих знаков.

В расчете используется упрощенная гидродинамическая модель пучка. Компенсация объемного заряда пучка принята полной, так что поле электростатического заряда равно нулю. Скомпенсированный пучок циркулирует в вакууме (плотность и проводимость окружающего газа пренебрежимо малы). Ток в пучке меньше альфвеновского,  $\frac{\lambda y}{y} \ll 1$ . тороидальность слабая.

Электромагнитное поле ввиду большой длительности процесса считается квазистационарным. Система симметрична по азимуту и относительно плоскости, совмещенной с орбитой кольцевого пучка. Комбинацию проводящего экрана и катушек магнитного поля для зеркального захвата с последующей магнитной компрессией для краткости будем в дальнейшем называть просто системой зеркального захвата.

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В силу принятой азимутальной симметрии в системе протекают только азимутальные токи. Поэтому катушки, экран и пучок можно рассматривать как систему

взаимосвязанных элементарных кольцевых проводников с токами  $I_m$ , координатами  $r_m$  и  $z_m$ , самоиндукцией  $L_{mm}$ , сопротивлением  $\mathcal{R}_m$  и взаимоиנדукциями  $L_{mn}$ ,  $m \neq n$ . Если считать, что координаты элементарных проводников экрана и катушек заданы, а для пучка

$$\begin{aligned} r_m &= R + a_m, \quad R = \langle r_m \rangle, \\ z_m &= Z + b_m, \quad Z = \langle z_m \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_m$  и  $b_m$  заданы, то поведение системы будет описываться уравнениями равновесия пучка по  $r$  и  $z$

$$F = \sum_m \frac{N_m \gamma \beta^2 m c^2}{R + a_m} + \frac{1}{2c^2} \sum_{m,n} I_m I_n \frac{\partial L_{mn}}{\partial R} = 0, \quad m \in \Pi; \quad (2)$$

$$G = \frac{1}{2c^2} \sum_{m,n} I_m I_n \frac{\partial L_{mn}}{\partial Z} = 0, \quad m \in \Pi; \quad (3)$$

уравнениями для элементарных токов, наведенных в экране,

$$\frac{1}{c^2} \sum_n \frac{dL_{mn} I_n}{dt} + \mathcal{R}_m I_m = 0, \quad m \in \sigma, \quad (4)$$

и уравнением азимутального движения пучка

$$\frac{d\gamma\beta}{dt} = -\frac{1}{m_{II}} \sum_{II}^m \frac{e}{2\pi(R+a_m)m c^3} \sum_n \frac{\partial L_{mn} I_n}{\partial t}, \quad m \in \Pi, \quad (5)$$

а также начальными и граничными условиями

$$I_m(t=0) = I_m^0, \quad m \in \Pi, \quad \gamma(t=0) = \gamma^0; \quad (6)$$

$$I_m = I_m(t), \quad m \in K, \quad (7)$$

$m, -e, \beta v$  - масса, заряд и скорость электронов пучка,  $c$  - скорость света,

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad (8)$$

$$N_m = \frac{I_m 2\pi(R+a_m)}{-e\beta c}, \quad (9)$$

$\Omega, \Pi, K$  - множество значений индексов, адресующих величинам соответственно к экрану, пучку и катушкам.

Система (2) - (5) зависана для случая, когда катушки магнитной системы питаются от источников тока; в общем случае ее следует дополнять уравнениями для  $m \in K$ , левая часть которых аналогична левой части (4), а правая содержит характеристики питающей цепи.

Коэффициенты взаимной индукции  $L_{mn} = L_{mn}(r_m, z_m, r_n, z_n)$ , самоиндукции  $L_{nn} = L_{nn}(r_n, z_n, r_n, z_n)$  и их производные по координатам определяются известными соотношениями для соосных тонких кольцевых проводников.

В дальнейшем для простоты будем считать, что

$$N_m = \frac{N}{m_{11}}.$$

Так как условия циркулирующего движения частиц пучка меняются медленно, то имеет место постоянство адиабатических инвариантов<sup>5,7</sup>

$$\text{Inv} = \frac{1}{2\pi} \oint \bar{P}_1 d\bar{s}, \quad (10)$$

где  $\bar{P}_r$  - проекция обобщенного импульса электрона,  $\bar{P} = \bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}$ , на некоторую плоскость, на которой проекция траектории частицы дает замкнутый контур интегрирования.

Проекция (10) на плоскость  $z = \text{const}$  дает

$$\text{Inv}_\phi = \frac{1}{2\pi} (2\pi r p_\phi - \frac{e}{c} \oint A_\phi dr).$$

Применяя ко второму слагаемому теорему Стокса, получим

$$\text{Inv}_\phi = \gamma \beta m c r - \frac{e}{2\pi c} \Phi, \quad (11)$$

где  $\Phi$  - поток магнитного поля через контур интегрирования. В принятых ранее обозначениях (11) преобразуется к виду

$$\gamma \beta R - \gamma \beta \bar{R} = \frac{e}{2\pi m c^3} \langle \sum_n L_{mn} I_n - \sum_n \overset{\circ}{L}_{mn} \overset{\circ}{I}_n \rangle, m \in \Pi. \quad (12)$$

Выражение (12) является приближенным решением уравнения (5).

Проекция (10) на плоскость  $\phi = \text{const}$  дает значения адиабатического инварианта для поперечного движения частиц пучка

$$\text{Inv}_r = \frac{1}{2\pi} \oint P_r dr, \quad \text{Inv}_z = \frac{1}{2\pi} \oint P_z dz$$

или для линейного осциллятора

$$\gamma a^2 \omega_r = \gamma \overset{\circ}{a} \overset{\circ}{\omega}_r, \quad \gamma b^2 \omega_z = \gamma \overset{\circ}{b} \overset{\circ}{\omega}_z, \quad (13)$$

где  $a, b, \omega_{r,z}$  - амплитуды и частоты поперечных колебаний отдельных электронов в  $r$ - и  $z$ -направлениях,

$$\omega_r = \left( -\frac{1}{\gamma m} \frac{\partial F_1}{\partial r} \right)^{1/2}, \quad \omega_z = \left( -\frac{1}{\gamma m} \frac{\partial G_1}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (14)$$

$F_1, G_1$  - силы, действующие на одну частицу в поле ансамбля.

Соотношения (13) и (14) определяют изменение размеров поперечного сечения пучка в процессе компрессии.

Введя безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{R}{R_0}, \quad \bar{a} = \frac{a}{R_0}, \quad \bar{b} = \frac{b}{R_0}, \quad \varrho = \frac{L}{2\pi R_0}, \\ \mathcal{J} &= \frac{eI}{mc^3}, \quad \mathcal{F} = \frac{R_0 F}{mc^2 N}, \quad \mathcal{G} = \frac{R_0 G}{mc^2 N}, \\ \mathcal{H} &= \frac{e^2 N}{2\pi m c^3 R_0}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_1}, \quad \bar{t} = \frac{c^2 R_1 t}{2\pi R_0}, \end{aligned}$$

где  $N$  - полное число электронов в кольце,  $R_0$  - радиус экрана, уравнения (2), (4) и (12) выпишем в виде\*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &< \frac{\gamma\beta}{R} + \frac{\mathcal{H}}{2m_{\Pi}} \sum_{n \in \Pi} \frac{\beta^2}{(R+a_m)(R+a_n)} \frac{\partial \mathcal{L}_{mn}}{\partial R} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n \in K} \frac{\beta}{R+a_m} \mathcal{J}_n \frac{\partial \mathcal{L}_{mn}}{\partial R} >_{m \in \Pi} = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

\* Знак ~ в дальнейшем будем опускать, специально оговаривая случаи употребления размерных величин.

$$\mathcal{G} = \left\langle \frac{\pi}{2m_{II}} \sum_{n \in II}^{m_{II}} \frac{\beta^2}{(R+b_m)(R+b_n)} \frac{\partial \mathcal{L}_{mn}}{\partial Z} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{n \in K, \gamma} \frac{\beta}{R+b_m} \mathcal{J}_n \frac{\partial \mathcal{L}_{mn}}{\partial Z} \right\rangle_{m \in II} = 0; \quad (15)^*$$

$$\sum_n \mathcal{J}_n \frac{d \mathcal{L}_{mn}}{dt} + \mathcal{R}_m \mathcal{J}_m = 0, \quad m \in \gamma; \quad (16)$$

$$\gamma \beta R - \gamma \beta \mathring{R} = \left\langle 2 \sum_n (\mathcal{L}_{mn} \mathcal{J}_n - \mathring{\mathcal{L}}_{mn} \mathring{\mathcal{J}}_n) \right\rangle_{m \in II}; \quad (17)$$

Уравнение (15)\* имеет решение  $Z = 0$  в силу симметрии задачи. Если предположить, что  $\mathcal{R}_m = 0$ , то интегрирование (16) с учетом нулевых начальных условий дает

$$\sum_n \mathcal{J}_n \mathcal{L}_{mn} = 0, \quad m \in \gamma, \quad (18)$$

или

$$\sum_{m \in \gamma} \mathcal{J}_m \mathcal{L}_{mn} = - \sum_{m \in II, K} \mathcal{J}_n \mathcal{L}_{mn}, \quad n \in \gamma.$$

Среди возможных решений системы (15) - (17) интерес представляют лишь те, для которых выполняются условия фокусировки кольцевого пучка как целого, а именно

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial R} < 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Z} < 0. \quad (20)$$

Если полная масса кольцевого пучка с ионным наполнением равна

$$N \left( \frac{m_i}{z_i} \cdot \gamma m \right),$$

то нормированные частоты его колебаний как целого относительно положения равновесия определяются соотношениями

$$\Omega_R^2 = - \frac{1}{\gamma + \frac{m_i}{m z_i}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial R}, \quad (21)$$

$$\Omega_Z^2 = - \frac{1}{\gamma + \frac{m_i}{m z_i}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Z}. \quad (22)$$

В качестве масштаба частоты колебаний здесь принято

$$\Omega^2 = \frac{c^2}{R_g^2}. \quad (23)$$

Когда величины

$$R^2 K_R^2 = - \frac{R^2}{\gamma \beta^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial R},$$

$$R^2 K_Z^2 = - \frac{R^2}{\gamma \beta^2} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Z},$$

где  $K_R, K_Z$  имеют смысл волнового числа, нормированного на величину  $1/R_0$ , равны  $n^2$  ( $n=1,2,\dots$ ), пучок может находиться в слабозмущенном стационарном состоянии, несимметричном по  $\phi$ .

## НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ

Поиск решений, соответствующих компрессии пучка с выносом условий устойчивости (19), (20), мы начали с расчета равновесных начальных состояний в бездиссипативном случае (система уравнений (15) и (18)). Форма и взаимное расположение экрана и катушек системы зеркального захвата показаны на рис.1. На рис.2 приведена зависимость  $R$  от тока в пучке  $\mu_{\Pi} = \sum_n \int_{\Pi} j_n / \gamma \beta$  для трех типичных вариантов формы экрана. Вид зависимостей характеризуется наличием асимптотического стремления равновесного радиуса к постоянному значению, отличному от нуля, при возрастании тока в пучке. При  $\mu_{\Pi} > 1$  равновесный радиус определяется конкуренцией магнитных сил саморасталкивания кольцевого пучка и его отталкивания токами изображения в экране. Поскольку упомянутые силы пропорциональны второй степени тока, а центробежная сила - первой, то при токе в пучке выше некоторого значения, роль центробежной силы в общем балансе становится несущественной и равновесный радиус перестает зависеть от тока. По мере того как форма экрана становится более закрытой, равновесный радиус возрастает. Вариант 3 отличается наличием трех значений  $R$  в некоторой области значений  $\mu_{\Pi}$ . Ветвь с  $\partial R / \partial \mu_{\Pi} < 0$  соответствует устойчивости по  $r$ , а ветвь с  $\partial R / \partial \mu_{\Pi} > 0$  - неустойчивости.

Типичные распределения наведенных пучком токов в экране показаны на рис.3. Ток пучка 20 кА,  $\gamma = 5$ .

На рис.4 приведены зависимости  $R^2 K_R^2, R^2 K_Z^2$  от  $\mu_{\Pi}$ , соответствующие 1 и 3 вариантам формы экрана, показанном на рис.2. В дальнейшем для исследования был принят вариант 2 формы экрана и ток пучка  $\mu_{\Pi} = 0,25$ .

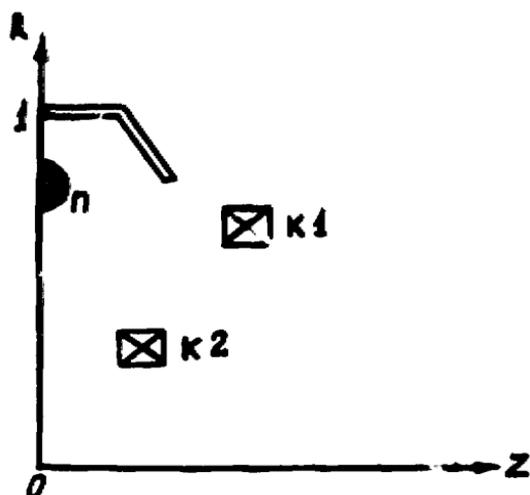


Рис. 1. Форма и взаимное расположение экрана и катушек системы зеркального захвата.

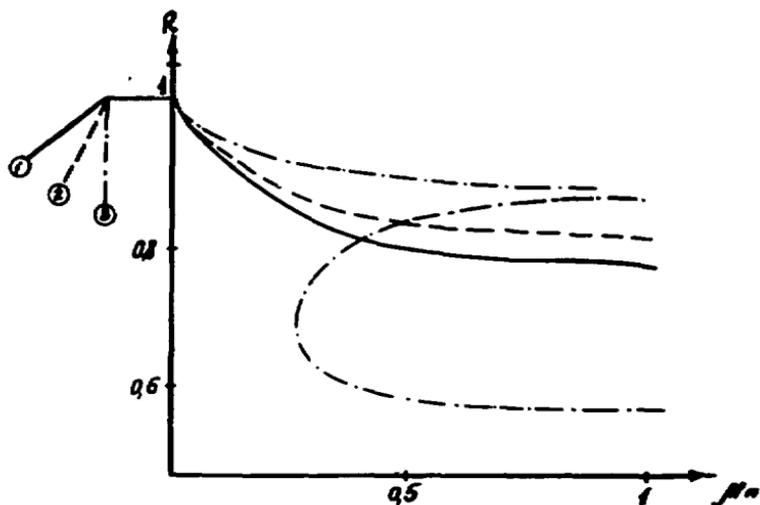


Рис. 2. Зависимость равновесного радиуса  $R$  от тока в пучке  $\mu_{||}$  при различной геометрии экрана.

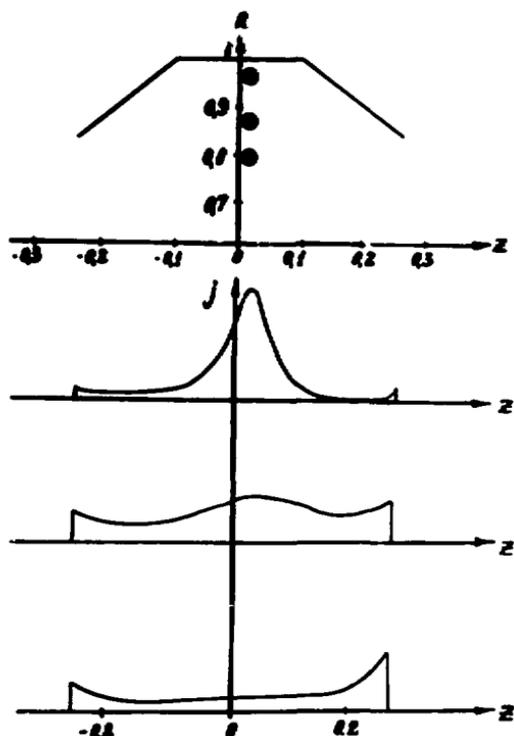


Рис.3. Плотность наведенного тока в экране в зависимости от положения пучка.

На рис.5 а) и б) показаны различные зависимости равновесной орбиты:  $R(\mu_{K1}, \mu_{K2} = 0, \mu_{II} = 0,25)$ ,  $R(\mu_{K1} = 0, \mu_{K2}, \mu_{II} = 0,25)$ , где  $\mu_{K1} = \sum_{n \in K1} g_n / \gamma\beta$ ,  $\mu_{K2} = \sum_{n \in K2} g_n / \gamma\beta$ .

Характерной особенностью зависимостей  $R$  от токов в катушках является наличие асимптот при  $R$ , соответствующем квадрупольной точке магнитного поля, соз-

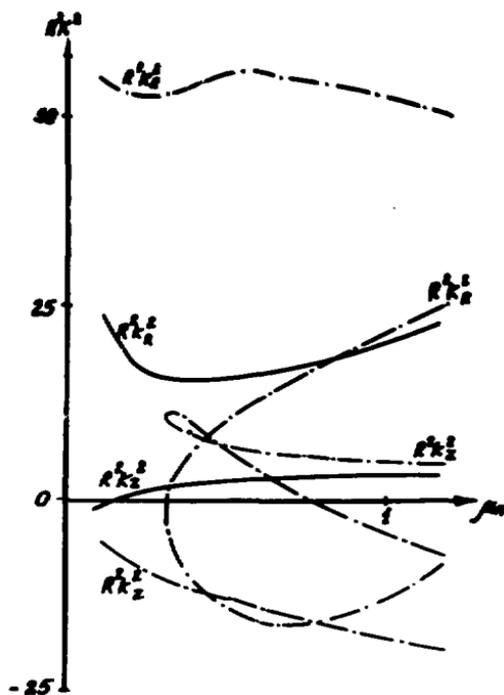


Рис. 4. Зависимость  $R^2 K_R^2$ ,  $R^2 K_Z^2$  от тока в пучке для 1 и 3 вариантов формы экрана.

даваемого катушками в отсутствие пучка, и при  $R$ , равном 0 и 1.

Режим обычного адгезатора соответствует участку зависимости, обозначенному на рис. 5 литерами А, В.

На рис. 6 показаны зависимости равновесного радиуса  $R$ , величины  $-R^2 K_R^2$ ,  $-R^2 K_Z^2$ , токов в катушках  $K_1$  и  $K_2$  от параметра  $r$ , имеющего смысл времени. Связь между токами в катушках, задаваемая

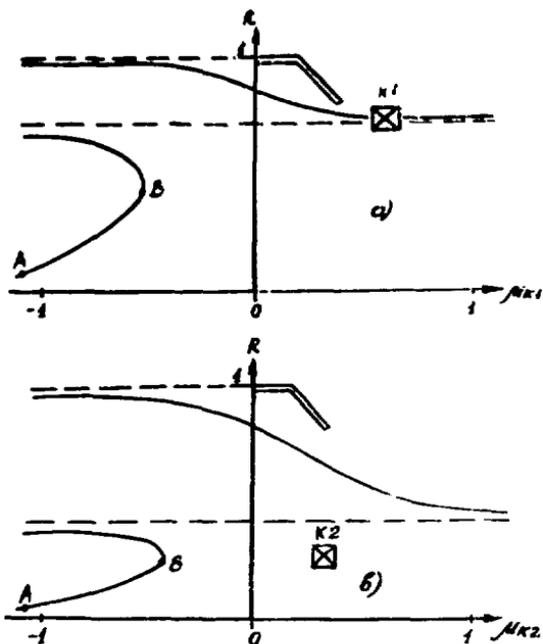


Рис. 5. Зависимость равновесной орбиты от тока в катушках:

- а)  $R(\mu_{\kappa 1}, \mu_{\kappa 2} = 0, \mu_{\parallel} = 0,25)$   
 б)  $R(\mu_{\kappa 1} = 0, \mu_{\kappa 2}, \mu_{\parallel} = 0,25)$ .

параметрически, подбиралась так, чтобы получить монотонно спадающую зависимость  $R(\tau)$  при одновременном выполнении условий (19), (20).

Кривая  $R(\tau)$  на рис. 6 соответствует  $\mu_{\parallel} = \text{const}$ . Поскольку в нулевом приближении по неоднородности суммарного компрессирующего поля

$$(\gamma \beta R)^{(0)} = \text{const},$$

ТАК ЧТО

$$\mu_{\parallel}^{(0)} = \text{const.}$$

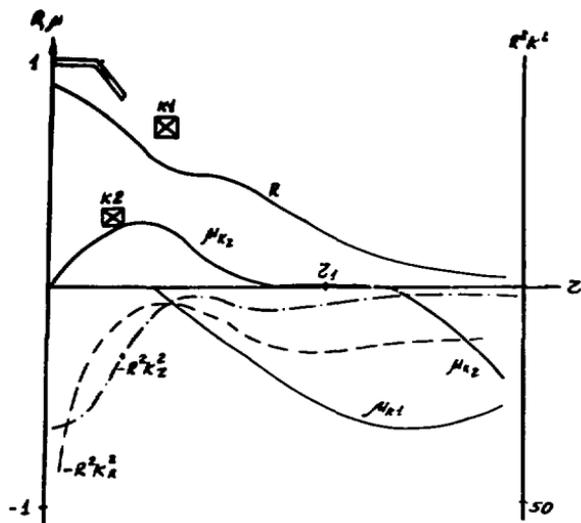


Рис.6. Характеристики компрессии пучка в системе зеркального захвата.

то кривую  $R(r)$  на рис.6 можно рассматривать в качестве нулевого приближения  $R^{(0)}(r)$  компрессионной траектории. При этом параметр  $r$  приобретает смысл времени. При  $r > r_1$  система входит в режим обычного компрессора типа "адгезатор".

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный вариант компрессии, еще далекий, конечно, от оптимального, пока лишь указывает осуществимость компрессии пучка в присутствии короткозамкнутого хорошо проводящего экрана с помощью вполне достижимых значений ампервитков в компрессирующих катушках.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ходатаев К.В. Атомная энергия, 1972; 32, 5, 379.
2. Диденко А.Н. и др. Труды ИИЯФЭ ИА, Атомизд., 1974; М., 4, 46.
3. Векслер В.Н. и др. Препринт ОИЯИ, Р9-3440-2, Дубна, 1968.
4. Иванов И.Н. и др. Препринт ОИЯИ, Р9-1132, Дубна, 1968.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, 6-е изд., М., "Наука" 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 декабря 1977 года.