

T-19

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



670/2-78

P9 - 11039

Н.И.Тарантин

СИСТЕМА КОЭФФИЦИЕНТОВ
ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУЧКА
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В МАГНИТНОМ ДИПОЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ
Часть I. Радиальное движение.
Хроматический способ

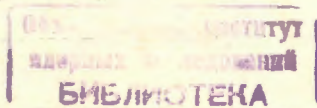
1977

P9 - 11039

Н.И.Тарантин

СИСТЕМА КОЭФФИЦИЕНТОВ
ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУЧКА
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В МАГНИТНОМ ДИПОЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ
Часть I. Радиальное движение.
Хроматический способ

Направлено в ЖТФ



Тарантин Н.И.

P9 - 11039

Система коэффициентов линейного преобразования пучка заряженных частиц в магнитном дипольном элементе.

Часть I. Радиальное движение. Хроматический способ

Получен набор систематизированных коэффициентов линейного преобразования пучка заряженных частиц для радиального движения их в хроматическом магнитном дипольном элементе.

Дан способ графического определения положений источника, приемника и основных коэффициентов линейного преобразования.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Tarantin N.I.

P9 - 11039

Coefficient System for Linear Transformation of the Beam of Charged Particles by a Magnetic Dipole Element, Part I. Radial Motion, Chromatic Method

A set of systematized coefficients for linear transformation of the beam of charged particles for radial motion of particles in a chromatic magnetic dipole element was obtained. A rule for graphical presentation of positions of a source, a collector and main coefficients for linear transformation is presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Reactions, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для формирования и анализа пучков заряженных частиц применяются различные магнитные системы, в которых широко используются дипольные магниты для отклонения и фокусировки пучка частиц, разделения частиц по массам, скоростям и зарядам, разгруппировки сгустков частиц, обеспечения изохронности пролета частиц. В известных методах расчета действия дипольных магнитов используются относительно сложные выражения для коэффициентов преобразования пучка частиц и громоздкие приемы расчета. В частности, в одной из фундаментальных монографий по этому вопросу^{/1/} преобразование пучка на участке системы с дипольным магнитом от кроссовера до кроссовера пучка рассматривается как последовательность преобразований, отвечающих свободному от магнитного поля промежутку, действиям краевого магнитного поля, клиновидного магнита, секторного магнита и далее предшествующих секторному магниту элементов, но в обратном порядке. При таком методе рассмотрения теряется наглядность, очень важная на начальном этапе выбора и прикидочного расчета системы, и затрудняется точный расчет магнитной системы, особенно в высоких приближениях и даже в случае использования электронных вычислительных машин. Поэтому кажутся целесообразными попытки, направленные на упрощение и поиски наглядного представления коэффициентов преобразования, ведущие к облегчению выбора и расчета элементов магнитной системы для формирования и анализа пучка заряженных частиц.

В связи с вышеизложенным в настоящей работе была проведена систематизация преобразований пучка частиц, производимых дипольным магнитом, в зависимости от начальных параметров пучка и назначения дипольного магнита. В работе были применены новые параметры, характеризующие магнитный дипольный элемент в новом, более простом приеме рассмотрения его действия. Систематизация преобразований, производимых дипольным магнитом, и введение новых параметров привели к менее сложным и более систематизированным выражениям для коэффициентов линейного преобразования пучка заряженных частиц в магнитном дипольном элементе. Эти коэффициенты, а также условия, необходимые для осуществления того или иного типа преобразования, имеют наглядное графическое представление, облегчающее выбор и расчет элементов магнитной системы на начальном этапе.

В настоящей работе получен набор коэффициентов линейного преобразования для радиального движения заряженных частиц в случае хроматического способа преобразования. Дальнейшее рассмотрение проводится в последующих работах.

1. РАДИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ДИПОЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Магнитный дипольный элемент, включающий в себя собственно дипольный магнит и два промежутка без магнитного поля от источника /или кроссовера/ до входной границы магнита и от выходной границы до приемника /или следующего кроссовера/, представлен на рис. 1. Там же приведены траектория заряженной частицы и принятые обозначения. В области поля дипольного магнита используется цилиндрическая левовинтовая система координат с осью z , совпадающей с осью симметрии магнитного поля. Отсчет азимутального угла ϕ ведется от радиуса-вектора r , проходящего через точку пересечения главной траектории частицы и входной эф-

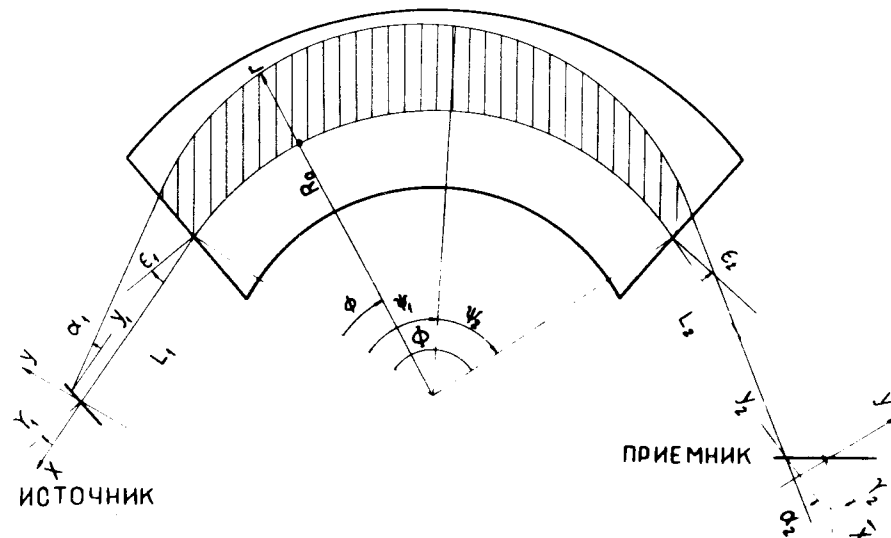


Рис. 1. Траектория радиального движения заряженной частицы в магнитном дипольном элементе. Стрелками указаны направления положительного отсчета величин.

фективной границы дипольного магнита. В свободных от магнитного поля областях используются декартовы системы координат с началом в точках пересечения плоскостей источника и приемника с главной траекторией частицы. Оси z этих систем направлены в сторону читателя, так же как и ось z цилиндрической системы.

Эффективные входная и выходная границы дипольного магнита с радиально-неоднородным аксиально-симметричным полем определены соотношением

$$\phi_{гр}(\rho) = \phi_1 + \int_{\phi_1}^{\phi_0} \frac{E_z(\rho, \phi, 0)}{B_z(\rho)} d\phi, \quad /1/$$

где $\rho = (r - R_0) / R_0$ - относительное отклонение радиальной координаты от главной траектории $r = R_0$, $\phi_{гр}(\rho)$ - уравнение эффективной границы, $B_z(\rho, \phi, 0)$ - аксиальная составляющая магнитного поля в меридианной плос-

кости ($z = 0$) в окрестности границы дипольного магнита, $B_z(\rho)$ - аксиальная составляющая в медианной плоскости вдали от границы магнита в области невозмущенного магнитного поля, ϕ_0 и ϕ_1 - значения азимутальной координаты, отвечающие условиям $B_z(\rho, \phi_0, 0) = 0$ и $B_z(\rho, \phi_1, 0)/B_z(\rho) = 1$.

Аксиальная составляющая невозмущенного магнитного поля в плоскости $z = 0$ с точностью до первого порядка малой величины $\rho(|\rho| \ll 1)$ дается в виде $B_z(\rho, \phi, 0) = B_0(1 + a_1\rho)$, где $-1 \leq a_1 \leq 0$ отвечает недефокусирующему ни в аксиальном, ни в радиальном направлениях магнитному полю. Из условий симметрии топографии магнитного поля, а также из условий $\text{rot} B = 0$ и $\text{div} B = 0$, обусловленных пренебрежимо малым значением магнитного поля, создаваемого движущимися в зазоре магнита заряженными частицами, по сравнению с полем магнита, получаем

$$B_\rho(\rho, \phi, z) = B_0 a_1 \zeta, \quad B_\phi = 0 \quad \text{и}$$

$$B_z(\rho, \phi, z) = B_0(1 + a_1\rho) = B_z(\rho), \quad /2/$$

где $\zeta = z/R_0$.

Уравнение для радиального движения заряженной частицы в магнитном поле в левовинтовой цилиндрической системе координат, имеющее общий вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = \frac{e}{c}(v_z B_\phi - v_\phi B_z), \quad /3/$$

после подстановки выражений для составляющих поля /2/ и замены производных по времени производными по углу ϕ запишется с точностью до первого порядка малой величины ρ в виде:

$$\frac{mv}{R_0}(\rho'' + \rho - 1) = \frac{eB_0}{c}(1 + a_1\rho). \quad /4/$$

В уравнениях /3/ и /4/ m - масса, e - электрический заряд, v_ϕ , v_z и v - азимутальная, аксиальная составляющие скорости и полная скорость частицы, c - ско-

рость света; точка означает дифференцирование по времени, штрих - дифференцирование по углу ϕ . Будем считать, что масса m , скорость v и заряд e рассматриваемой частицы немного отличаются от соответствующих величин для главной частицы, масса, скорость и заряд которой равны соответственно m_0 , v_0 и e_0 , а радиус кривизны в магнитном поле B_0 равен $R_0 = m_0 v_0 c / B_0 e_0$. Тогда $mv/eB_0 = R_0(1 + \delta)$, где

$\delta = \frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta e}{e_0}$ ($|\delta| \ll 1$) и уравнение /4/ примет следующий вид:

$$\rho'' + \omega^2 \rho - \delta = 0, \quad /5/$$

где $\omega = \sqrt{1 + a_1}$.

Уравнение /5/, справедливое только для невозмущенного поля /2/, можно распространить и на область краевого магнитного поля введением дополнительных поправок к условиям на эффективной границе, определяемым прямолинейным движением частицы до /для входной/ или за /для выходной/ границей. Как будет показано позднее, для эффективных границ, введенных соотношением /1/, поправки для радиального движения, выражаемые в виде дополнительного преломления или смещения траектории частицы при пересечении эффективной границы, являются малыми величинами более высокого порядка, чем первый. Поэтому граничные условия для решения уравнения /5/ в линейном приближении могут быть получены только из рассмотрения прямолинейной траектории частицы от источника до входной эффективной границы магнита. Эти условия суть

$$\rho_1(\phi_{\text{гр}}) = \eta_1 + a_1 \ell_1 \quad \text{и} \quad \rho_1'(\phi_{\text{гр}}) = \eta_1 t_1 + a_1(1 + \ell_1 t_1), \quad /6/$$

где $\eta_1 = y_1/R_0$, $\ell_1 = L_1/R_0$, $t_1 = \text{tg} \epsilon_1$,

y_1 - координата точки выхода частицы из источника, a_1 - угол наклона траектории частицы к плоскости хоз, $|\eta_1| \ll 1$, $|a_1| \ll 1$.

Заметим, что эффективные границы магнита рассматриваются здесь прямолинейными, поскольку кривизна границ не проявляется в результатах, получаемых в линейном приближении. Частное решение уравнения /5/ с граничными условиями /4/ имеет вид

$$\rho_1(\phi) = (\eta_1 + \alpha_1 l_1 - \frac{\delta}{\omega^2}) \cos \omega \phi + \frac{1}{\omega} [\eta_1 t_1 + \alpha_1 (1 + l_1 t_1)] \sin \omega \phi + \frac{\delta}{\omega^2}. \quad /7/$$

Найдем другое частное решение, дающее траекторию частицы, приходящей на приемник в точку с координатой y_2 и под углом α_2 к плоскости xoz . Граничные условия на выходной границе в этом случае могут быть записаны так:

$$\rho_2(\phi_{гр}) = \eta_2 - \alpha_2 l_2 \quad \text{и} \quad \rho_2'(\phi_{гр}) = -\eta_2 t_2 + \alpha_2 (1 + l_2 t_2), \quad /8/$$

где $\eta_2 = y_2/R_0$, $l_2 = L_2/R_0$, $t_2 = \text{tg} \epsilon_2$, $|\eta_2| \ll 1$ и $|\alpha_2| \ll 1$.

Решение уравнения /5/, отвечающее условиям /8/, есть

$$\rho_2(\phi) = (\eta_2 - \alpha_2 l_2 - \frac{\delta}{\omega^2}) \cos \omega (\Phi - \phi) + \frac{1}{\omega} [\eta_2 t_2 - \alpha_2 (1 + l_2 t_2)] \sin \omega (\Phi - \phi) + \frac{\delta}{\omega^2}, \quad /9/$$

где Φ - угол отклонения в дипольном магните основной ($\delta=0$) частицы, движущейся по главной траектории $\eta_1=0$, $\alpha_1=0$.

Для того чтобы связать выходные координаты частицы η_2 и α_2 с входными η_1 , α_1 и δ , продолжим траекторию частицы /7/, выраженную через начальные координаты /6/, траекторией /9/, определяемой конечными координатами /8/. Из механики движения материального тела в поле сил известно, что траектория тела однозначно определяется его скоростью в какой-либо

точке. Поэтому, чтобы продолжить траекторию $\rho_1(\phi)$ траекторией $\rho_2(\phi)$, необходимо положить

$$\rho_1(\psi_1) = \rho_2(\psi_1) \quad \text{и} \quad \rho_1'(\psi_1) = \rho_2'(\psi_1), \quad /10/$$

где ψ_1 - произвольное значение угла ϕ , а $\rho'(\phi) = \dot{\rho}(\phi) R_0 / v \phi$. Представив η_2 и α_2 в виде

$$\eta_2 = H_\eta \eta_1 + H_\alpha \alpha_1 + H_\delta \delta, \quad \alpha_2 = A_\eta \eta_1 + A_\alpha \alpha_1 + A_\delta \delta$$

и приравняв коэффициенты при η_1 , α_1 и δ в левой и правой частях равенств /10/, получаем три системы, каждая из которых состоит из двух уравнений, определяющих коэффициенты преобразования координат траектории частицы. Например, для H_η и A_η имеем:

$$(c_2 + \frac{t_2 s_2}{\omega}) H_\eta - [l_2 c_2 + (1 + l_2 t_2) \frac{s_2}{\omega}] A_\eta = c_1 + \frac{t_1 s_1}{\omega} \quad /11a/$$

и

$$(\omega s_2 - t_2 c_2) H_\eta + [-\omega l_2 s_2 + (1 + l_2 t_2) \frac{c_2}{\omega}] A_\eta = -\omega s_1 + t_1 c_1. \quad /11b/$$

Здесь $s_i = \sin \omega \psi_i$, $c_i = \cos \omega \psi_i$, $i = 1, 2$, $\psi_2 = \Phi - \psi_1$. Решения этих систем уравнений приведены ниже:

$$H_\eta = (c_1 + \frac{t_1 s_1}{\omega}) [-\omega l_2 s_2 + (1 + l_2 t_2) c_2] + (-\omega s_1 + t_1 c_1) [l_2 c_2 + (1 + l_2 t_2) \frac{s_2}{\omega}], \quad /12/$$

$$A_\eta = (-\omega s_1 + t_1 c_1) (c_2 + \frac{t_2 s_2}{\omega}) + (c_1 + \frac{t_1 s_1}{\omega}) (-\omega s_2 + t_2 c_2), \quad /13/$$

$$H_{\alpha} = [\ell_1 c_1 + (1 + \ell_1 t_1) \frac{s_1}{\omega}] [-\omega \ell_2 s_2 + (1 + \ell_2 t_2) c_2] + \\ + [-\omega \ell_1 s_1 + (1 + \ell_1 t_1) c_1] [\ell_2 c_2 + (1 + \ell_2 t_2) \frac{s_2}{\omega}], \quad /14/$$

$$A_{\alpha} = [-\omega \ell_1 s_1 + (1 + \ell_1 t_1) c_1] (c_2 + \frac{t_2 s_2}{\omega}) + \\ + [\ell_1 c_1 + (1 + \ell_1 t_1) \frac{s_1}{\omega}] (-\omega s_2 + t_2 c_2), \quad /15/$$

$$H_{\delta} = \frac{1}{\omega^2} (c_2 - c_1) [-\omega \ell_2 s_2 + (1 + \ell_2 t_2) c_2] + \\ + \frac{1}{\omega} (s_1 + s_2) [\ell_2 c_2 + (1 + \ell_2 t_2) \frac{s_2}{\omega}], \quad /16/$$

$$A_{\delta} = \frac{1}{\omega} (s_1 + s_2) (c_2 + \frac{t_2 s_2}{\omega}) + \\ + \frac{1}{\omega^2} (c_2 - c_1) (-\omega s_2 + t_2 c_2), \quad /17/$$

Использованный здесь прием решения уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле путем продолжения одного частного решения другим позволил упростить процедуру решения. Вместо обычно применяемой процедуры нахождения координат точки пересечения криволинейной в магнитном поле траектории частицы с выходной границей магнита в настоящей работе находятся координаты точки пересечения выходной границы прямолинейной после прохождения магнитного поля траекторией частицы, аналогично тому как это делается для входной границы. Этот прием позволил также выделить координату $\phi = \psi_1$ и, соответственно, угол $\psi_2 = \Phi - \psi_1$, являющиеся, как будет показано ниже, удобными параметрами для описания действия магнитного дипольного элемента.

Заметим, что этот прием, но в других вариантах, использовался ранее в работах /2,3/.

Практика показывает, что магнитный дипольный элемент в зависимости от эмиттанса источника и назначения дипольного элемента используется для осуществления одного из четырех представленных в табл. 1

Таблица 1

Классификация типов преобразований

Тип преобразования	Условие применения	Назначение применения	Условие осуществления
Зажигательное стекло	$ \eta_1 _{\max} \gg \ell_1 \alpha_1 _{\max}$	$ \eta_2 _{\max} \ll \ell_2 \alpha_2 _{\max}$	$H_{\eta} = 0$
Телескоп	$ \eta_1 _{\max} \gg \ell_1 \alpha_1 _{\max}$	$\ell_2 \alpha_2 _{\max} \ll \eta_2 _{\max}$	$A_{\eta} = 0$
Проектор	$\ell_1 \alpha_1 _{\max} \gg \eta_1 _{\max}$	$ \eta_2 _{\max} \ll \ell_2 \alpha_2 _{\max}$	$H_{\alpha} = 0$
Конденсор	$\ell_1 \alpha_1 _{\max} \gg \eta_1 _{\max}$	$\ell_2 \alpha_2 _{\max} \ll \eta_2 _{\max}$	$A_{\alpha} = 0$

преобразований, названных по аналогии с действием известных световых приборов. В табл. 1 $|\eta_i|_{\max}$ - наибольшая по абсолютной величине координата, а $|\alpha_i|_{\max}$ - наибольший по абсолютной величине угол наклона траектории частицы при выходе частицы из источника ($i=1$) или при приходе на приемник ($i=2$). Преобразование типа "зажигательное стекло" трансформирует параллельный или приблизительно параллельный пучок частиц в сходящийся, типа "телескоп" - параллельный в параллельный, типа "проектор" - расходящийся в сходящийся и типа "конденсор" - расходящийся в параллельный.

Каждый из указанных выше типов преобразования пучка частиц может быть осуществлен магнитным дипольным элементом двумя различными способами, отличающимися один от другого различным ходом тра-

екторий частиц в зазоре дипольного магнита и различными характеристиками дисперсии и изохронности дипольного элемента. Это определяется тем, что каждый из коэффициентов /12-17/ может быть обращен в нуль двумя способами. Например, как легко видеть, N_a равняется нулю при выполнении одного из следующих условий:

$$-\omega \ell_1 s_1 + (1 + \ell_1 t_1) c_1 = 0, \quad -\omega \ell_2 s_2 + (1 + \ell_2 t_2) c_2 = 0, \quad /18/$$

$$\ell_1 c_1 + \frac{1}{\omega} (1 + \ell_1 t_1) s_1 = 0, \quad \ell_2 s_2 + \frac{1}{\omega} (1 + \ell_2 t_2) s_2 = 0. \quad /19/$$

При выполнении условий /18/ имеет место квазипараллельный ход основных траекторий при $\phi = \psi_1$, т.е. $\rho_1'(\psi_1) = \rho_2'(\psi_1) = 0$, и этим выделяются значения углов ψ_1 и $\psi_2 = \Phi - \psi_1$, которые были пока не определены. При таком способе осуществления преобразования и при значениях ψ_1 и ψ_2 , заключенных в определенных пределах, магнитный дипольный элемент имеет не равную нулю определяющую дисперсию $/H_\delta \neq 0$ для зажигательного стекла и проектора и $A_\delta \neq 0$ для телескопа и конденсора/. Поэтому магнитные дипольные элементы с этим способом преобразования пучка частиц и сам способ преобразования логично назвать хроматическими.

2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУЧКА ЧАСТИЦ В ХРОМАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ДИПОЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Коэффициенты для различных типов линейного преобразования пучка заряженных частиц в хроматическом дипольном элементе даны в табл. 2. В таблице использованы дополнительные обозначения: $s = \sin \omega \Phi$ и $c = \cos \omega \Phi$. Значения параметров, входящих в выражения

Таблица 2

Коэффициенты линейного преобразования пучка частиц в хроматическом магнитном дипольном элементе

Тип и условия осуществления преобразования	Коэффициенты				H δ	A δ
	H γ	A γ	H α	A α		
Зажигательное стекло $\frac{s_1}{c_1} = \frac{t_1}{\omega} - \frac{s_2}{c_2} = \frac{1}{\omega} (t_2 + \frac{1}{\ell_2})$	0	$-\frac{c_2}{\ell_2 c_1}$	$\frac{\ell_2 c_1}{c_2}$	$\frac{c_1}{c_2} - \frac{\ell_1 c_2}{\ell_2 c_1} - \frac{s}{\omega \ell_2}$	$\frac{\ell_2 (s_1 + s_2)}{\omega c_2}$	$\frac{s_1 + s_2}{\omega c_2} - \frac{1 - c}{\omega^2 \ell_2}$
Телескоп $\frac{s_1}{c_1} = \frac{t_1}{\omega}, \quad 1 = 1,2$	$\frac{c_2}{c_1}$	0	$\frac{\ell_1 c_2}{c_1} + \frac{\ell_2 c_1}{c_2} + \frac{s}{\omega}$	$\frac{c_1}{c_2}$	$\frac{\ell_2 (s_1 + s_2)}{\omega c_2} - \frac{1 - c}{\omega^2}$	$\frac{s_1 + s_2}{\omega c_2}$
Проектор $\frac{s_1}{c_1} = \frac{1}{\omega} (t_1 + \frac{1}{\ell_1}), \quad 1 = 1,2$	$-\frac{\ell_2 c_1}{\ell_1 c_2}$	$\frac{c_1}{\ell_1 c_2} - \frac{c_2}{\ell_2 c_1} + \frac{s}{\omega \ell_1 \ell_2}$	0	$-\frac{\ell_1 c_2}{\ell_2 c_1}$	$\frac{\ell_2 (s_1 + s_2)}{\omega c_2}$	$\frac{s_1 + s_2}{\omega c_2} - \frac{1 - c}{\omega^2 \ell_2}$
Конденсор $\frac{s_1}{c_1} = \frac{1}{\omega} (t_1 + \frac{1}{\ell_1}), \quad \frac{s_2}{c_2} = \frac{t_2}{\omega}$	$\frac{c_2}{c_1} - \frac{\ell_2 c_1}{\ell_1 c_2} - \frac{s}{\omega \ell_1}$	$-\frac{c_1}{\ell_1 c_2}$	$\frac{\ell_1 c_2}{c_1}$	0	$\frac{\ell_2 (s_1 + s_2)}{\omega c_2} + \frac{1 - c}{\omega^2}$	$\frac{s_1 + s_2}{\omega c_2}$

для коэффициентов преобразования, ограничены следующими условиями:

$$0 \leq \rho_i \leq \infty, \quad -\frac{1}{2}\pi < \epsilon_i < \frac{1}{2}\pi,$$

$$-\frac{1}{2}\pi < \omega\psi_i \leq \frac{1}{2}\pi, \quad i = 1, 2, \quad \psi_1 + \psi_2 > 0.$$

Однако наклон границ дипольного магнита ϵ на практике не берется более 60° /по абсолютной величине/, чтобы не усиливать влияния краевого магнитного поля, эффект которого необходимо учитывать при рассмотрении движения частицы во втором и более высоких приближениях.

При значениях $\rho_i = 0$ и $\omega\psi_i = \frac{1}{2}\pi$, $i = 1, 2$, в выражениях для некоторых коэффициентов появляются неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$. Раскрытие неопределенностей для этих случаев дано в табл. 3.

При $\omega = 0$ ($a_1 = -1$) следует брать $t_i = 0$ ($i = 1, 2$) в случае параллельного хода траекторий частиц пучка через входную или выходную границу и $t_i = -\frac{1}{\rho_i}$ ($i = 1, 2$) в случае расходящегося или сходящегося пучка частиц. Углы ψ_1 и ψ_2 при этом могут иметь любые значения. Предельные выражения для коэффициентов в этом случае

легко найти, используя эквивалентную замену $\frac{s_i}{\omega} = \psi_i$,
 $c_i = 1, \quad \frac{s}{\omega} = \Phi \quad \text{и} \quad \frac{1-c}{\omega^2} = \frac{\Phi^2}{2}$ в формулах табл. 2.

Полученные коэффициенты линейного преобразования отвечают требованию сохранения площади элемента фазовой плоскости η - a , вытекающему из общей теоремы Лиувилля. Площадь элемента фазовой плоскости η_2 - a_2 найдем, рассматривая площадь четырехугольника ABCD, полученного в результате преобразования прямоугольного элемента $\Delta\eta_1\Delta a_1$, как геометрическую сумму площа-

Таблица 3

Коэффициенты линейного преобразования пучка частиц в хроматическом магнитном дипольном элементе при значениях $\rho_i = 0$ и $\omega\psi_i = \frac{1}{2}\pi$

Тип преобразования и значения i	Коэффициенты					
	H_η	A_η	H_a	A_a	H_b	A_b
Зажигательное стекло $i = 2$	0	$-\frac{\omega}{c_1}$	$\frac{c_1}{\omega}$	$-\frac{\omega s_1}{c_1} - s_1$	$\frac{1+s_1}{\omega^2}$	$\frac{c_1}{\omega}$
Проектор $i = 1$	$-\frac{\omega s_2}{c_2}$	$\frac{s_2}{\rho_2} - \frac{\omega}{c_2}$	0	$-\frac{c_2}{\omega s_2}$	$\frac{\rho_2(1+s_2)}{\omega c_2}$	$\frac{1+s_2}{\omega c_2} - \frac{1+s_2}{\omega^2 \rho_2}$
Проектор $i = 2$	$-\frac{c_1}{\omega s_1}$	$\frac{s_1}{\rho_1} - \frac{\omega}{c_1}$	0	$-\frac{\omega s_1}{c_1}$	$\frac{1+s_1}{\omega^2}$	$\frac{c_1}{\omega}$
Проектор $i = 1, 2$	-1	0	0	-1	$\frac{2}{\omega^2}$	0
Конденсор $i = 1$	$-\frac{\omega s_2}{c_2} - s_2$	$-\frac{\omega}{c_2}$	$\frac{c_2}{\omega}$	0	$\frac{\rho_2(1+s_2)}{\omega c_2} + \frac{1+s_2}{\omega^2}$	$\frac{1+s_2}{\omega c_2}$

дей треугольников AOB, BOC, COD и DOA, где O - начало системы координат $\eta_2 - a_2$. /Направление обхода вершин четырехугольника выбрано в направлении кратчайшего поворота оси η_2 к оси a_2 /. Например, площадь треугольника AOB

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}[\vec{OB} \times \vec{OA}] = \frac{1}{2}(H_a A_a - H_a A_\eta) \Delta \eta_1 \cdot a_1.$$

Площадь же четырехугольника равна

$$S_{ABCD} = (H_\eta A_a - H_a A_\eta) \Delta \eta_1 \cdot \Delta a_1. \quad /20/$$

После подстановки в /20/ коэффициентов, определяемых формулами /12-17/ или представленных в табл. 2 и 3, получаем

$$H_\eta A_a - H_a A_\eta = 1, \text{ т.е. } S_{ABCD} = \Delta \eta_1 \Delta a_1.$$

Заметим, что $H_\eta A_a - H_a A_\eta$ есть в то же время детерминант матрицы преобразования величин η_1, a_1 и δ в величины η_2, a_2 и δ .

Форма необходимых условий для преобразования пучка частиц и структура полученных коэффициентов преобразования позволяют использовать графический прием для нахождения мест положения источника и приемника, а также для определения значений некоторых коэффициентов. На рис. 2 представлено такое графическое построение для магнитного дипольного элемента с преобразованием типа "проектор". В этом построении используют

соответственно величины $\omega L_i, \omega \psi_i$ и $\arctg(\frac{\text{tg} \epsilon_i}{\omega})$

вместо L_i, ψ_i и $\epsilon_i (i=1,2)$. В случае однородного поля ($\omega=1$) первые совпадают с последними.

Положение источника (L_1) и приемника (L_2) в зависимости от параметров дипольного магнита $\{R_0, \omega, \epsilon_i, \psi_i\}$ определяется построением трех нормалей, а именно: нормали к эффективной границе в точке входа /выхода/ главной траектории, нормали к радиусу-вектору r при $\phi = \psi_1$ в начале координат и нормали к главной траектории в месте расположения источника

/приемника/, и условием, что эти три нормали должны пересечься в одной точке A(B).

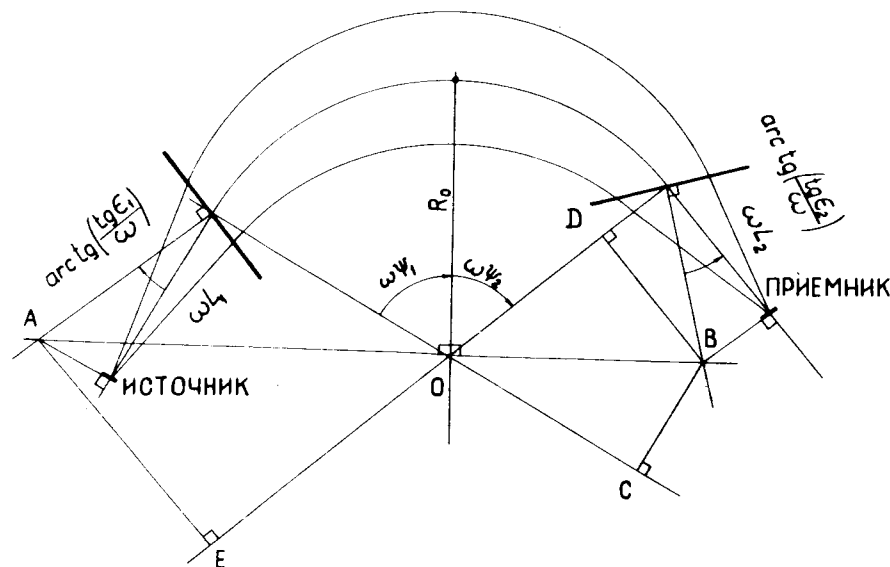


Рис. 2. Способ графического определения положений источника (L_1) приемника (L_2) и основных коэффициентов линейного преобразования пучка частиц в хроматическом магнитном дипольном элементе. Квадратами отмечены прямые углы. $H_\eta = -\frac{OB}{OA}, A_a = -\frac{OA}{OB}, H_\delta = (OC + OD)/R_0 \omega^2, AE = \omega L_1 c_2 / c_1, BC = \omega L_2 c_1 / c_2.$

При параллельном ходе траекторий через границу, имеющем место для преобразований типа "зажигательное стекло", "телескоп" и "конденсор", нормали к эффективной границе и радиусу-вектору r пересекаются в бесконечности, т.е. они параллельны. Положение источника и приемника в этом случае может быть в любой точке главной траектории.

Легко убедиться, что $H_\eta = -\frac{OB}{OA}, A_a = -\frac{OA}{OB},$

$H_{\delta} = (OC + OD)/R_0 \omega^2$, значения $\ell_1 c_2/c_1$ и $\ell_2 c_1/c_2$, входящих в выражение для коэффициента A_{η} , определяются отрезками АЕ и ВС.

Представленный прием графического определения положений источника и приемника, а также основных характеристик магнитного дипольного элемента является дальнейшим развитием известных правил Бербера^{/4/} и Картана^{/5/}, вошедших в руководство по магнитной оптике /см., например, /6/ /, а также менее известного правила Джадда /7/.

Еще одной характеристикой магнитного дипольного элемента является разность длин различных траекторий частицы от источника до приемника, обычно называемая неизохронностью магнитного дипольного элемента. Знание этой характеристики, определяющей меру неодновременности прихода заряженных частиц на приемник магнитного дипольного элемента, очень существенно при проведении измерений методом времени пролета, при осуществлении разгруппировки сгустков частиц.

Дифференциальная разница между элементами длины для заданной и главной ($\eta_1 = \alpha_1 = \delta = 0$) траекторий частицы в магнитном поле с точностью до второго порядка малых величин ρ и $d\phi$ определяется выражением

$$d\ell = R_0 d\lambda = (r - R_0) d\phi = R_0 \rho(\phi) d\phi. \quad /21/$$

При прямолинейном движении частицы на участках без магнитного поля дифференциальная разница длин есть малая величина третьего порядка. Поэтому полная разность между длиной заданной и длиной главной траектории частицы для углов наклона источника и приемника $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ может быть найдена путем интегрирования $d\ell$ от входной до выходной границ магнита:

$$\lambda = \int_0^{\psi_1} \rho_1(\phi) d\phi + \int_{\psi_1}^{\Phi} \rho_2(\phi) d\phi. \quad /22/$$

где $\rho_1(\phi)$ и $\rho_2(\phi)$ даются формулами /7/ и /9/. После подстановки и интегрирования /22/ получаем

$$\lambda = \Lambda_{\eta} \eta_1 + \Lambda_{\alpha} \alpha_1 + \Lambda_{\delta} \delta, \quad /23/$$

где

$$\Lambda_{\eta} = \frac{1}{\omega} \left\{ s_1 + (H_{\eta} - A_{\eta} \ell_2) s_2 + \frac{t_1(1-c_1)}{\omega} + [H_{\eta} t_2 - A_{\eta}(1 + \ell_2 t_2)] \frac{1-c_2}{\omega} \right\}, \quad /24/$$

$$\Lambda_{\alpha} = \frac{1}{\omega} \left\{ \ell_1 s_1 + (H_{\alpha} - A_{\alpha} \ell_2) s_2 + \frac{t_1(1-c_1)(1 + \ell_1 t_1)}{\omega} + [H_{\alpha} t_2 - A_{\alpha}(1 + \ell_2 t_2)] \frac{1-c_2}{\omega} \right\}, \quad /25/$$

$$\Lambda_{\delta} = \frac{1}{\omega} \left\{ -\frac{s_1}{\omega^2} + (H_{\delta} - A_{\delta} \ell_2 - \frac{1}{\omega^2}) s_2 + [H_{\delta} t_2 - A_{\delta}(1 + \ell_2 t_2)] \frac{1-c_2}{\omega} + \frac{\Phi}{\omega} \right\}. \quad /26/$$

Частные выражения коэффициентов неизохронности для различных типов преобразования пучка приведены в табл. 4.

Таблица 4

Коэффициенты неизохронности траекторий заряженных частиц в хроматическом магнитном дипольном элементе

Тип преобразования	Коэффициенты		
	Λ_{η}	Λ_{α}	Λ_{δ}
Зажигательное стекло и телескоп	$\frac{s_1 + s_2}{\omega c_1}$	$\frac{\ell_1(s_1 + s_2)}{\omega c_1} + \frac{1-c}{\omega^2}$	$\frac{1}{\omega^2}(\Phi - \frac{s}{\omega})$
Проектор и конденсор	$\frac{s_1 + s_2}{\omega c_1} - \frac{1-c}{\omega^2 \ell_1}$	$\frac{\ell_1(s_1 + s_2)}{\omega c_1}$	$\frac{1}{\omega^2}(\Phi - \frac{s}{\omega})$

Раскрытие неопределенностей при значениях $\ell_1 = 0$ и

$\omega\psi_1 = 1/2\pi$ для преобразований типа "проектор" и "конденсор" дает $\Lambda_\eta = \frac{c_2}{\omega}$ и $\Lambda_\alpha = \frac{1+s_2}{\omega^2}$.

При $\omega=0$ неопределенности в табл. 4 раскрываются в результате подстановок $\frac{s_i}{\omega} = \psi_i$, $c_i = 1$ $i = 1, 2$, $\frac{s}{\Phi} = \Phi^2$ и $\frac{1-c}{\omega^2} = 1/2\Phi^2$.

Если учесть условия применения преобразования того или иного типа /см. табл. 1/, то для пучка основных частиц ($\delta=0$) неизохронность магнитного дипольного элемента будет определяться преимущественно Λ_η для преобразований типа "зажигательное стекло" и "телескоп" и Λ_α для преобразований типа "проектор" и "конденсор". Практически проявляющаяся неизохронность, обусловленная максимальным разбросом длин траекторий, будет равна

$$\Delta\lambda \approx \frac{(s_1+s_2)\Lambda\eta_1}{\omega c_1} \quad /27/$$

в первом случае и

$$\Delta\lambda \approx \frac{(s_1+s_2)\ell_1\Lambda\alpha_1}{\omega c_1} \quad /28/$$

во втором, где $\Delta\eta_1 = \eta_{1\max} - \eta_{1\min}$ а $\Delta\alpha_1 = \alpha_{1\max} - \alpha_{1\min}$. Легко убедиться, что правая часть соотношений /27/ и /28/ может быть представлена в единой форме, ранее полученной другим способом в работе /8/.

$$\Delta\lambda \approx R_{\max} \Delta\eta_1 \Delta\alpha_1, \quad /29/$$

где R_{\max} - максимальная разрешающая способность магнитного дипольного элемента, равная $H_\delta/H_\alpha \Delta\alpha_1$ для преобразования типа "зажигательное стекло", $H_\delta/H_\alpha \Delta\alpha_1$ для "телескопа", $H_\delta/H_\eta \Delta\eta_1$ - для "проектора" и $H_\delta/H_\eta \Delta\eta_1$ - для "конденсора". Под макси-

мальной разрешающей способностью здесь понимается разрешающая способность, которая может быть достигнута, если исключить aberrации второго и более высоких порядков.

С другой стороны, интегральное выражение /22/, определяющее λ , есть мера площади радиального сечения пучка Σ , ограниченной траекториями $\rho_1(\phi)$ и $\rho_2(\phi)$, главной траекторией, входной и выходной границами дипольного магнита, а именно: с точностью до первого порядка малых величин эта площадь равна

$$\Sigma = R_0^2 \left[\int_0^{\psi_1} \rho_1(\phi) d\phi + \int_{\psi_1}^{\Phi} \rho_2(\phi) d\phi \right]. \quad /30/$$

На рис. 1 площадь, выражаемая формулой /30/, заштрихована.

Поэтому

$$\Delta\lambda \approx R_{\max} \Delta\eta_1 \Delta\alpha_1 = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{R_0} = \frac{\sigma}{R_0}, \quad /31/$$

где $\sigma_{\max(\min)} = \frac{\Sigma_{\max(\min)}}{R_0}$ - площадь радиального сече-

ния пучка /деленная, как λ и η_1 , на R_0 /, ограниченная соответствующей краевой траекторией $\rho_{\max(\min)}(\phi)$ и главной траекторией, σ - площадь, ограниченная двумя краевыми траекториями.

Можно показать, что соотношение /31/ справедливо и для многоэлементных магнитных систем, содержащих несколько дипольных магнитов и линз /см., например, /9,10/ /.

Впервые некоторые аспекты связи между радиальным сечением пучка и величинами дисперсии и коэффициента увеличения были рассмотрены в работе /11/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Steffen K. *High Energy Beam Optics*. New York-London-Sydney, 1965.
Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии. "Мир", М., 1969.
2. Dempsey D.F. *Rev.Sci.Instr.*, 1955, 26, p.1141.
3. Тарантин Н.И., Демьянов А.В. *ЖТФ*, 1965, 35, с.186.
4. Barber N.F. *Proc. Leeds Phil. Soc.*, 1933, 2, p.427.
5. Cartan L. *Journ. Phys. Rad.*, 1937, 8, p.453.
6. Бейнбридж К.Т. Динамика и оптика заряженных частиц. В кн.: Экспериментальная ядерная физика, том I. ИЛ., М., 1955, с.231.
7. Judd D.L. *Rev.Sci.Instr.*, 1950, 21, p.213.
8. Басаргин Ю.Г. *ЖТФ*, 1969, 39, с.241.
9. Тарантин Н.И. *ЖТФ*, 1967, 37, с.375.
10. Тарантин Н.И. ОИЯИ, P13-10663, Дубна, 1977.
11. Bruck H. A Very General Expression for the Dispersion. In: *Electromagnetically Enriched Isotopes and Mass Spectrometry*, London, 1956, p.231.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1977 года.